随机过程通论

王梓坤 著

上卷

北京师范大学出版社

随机过程通论

王梓坤 著

下卷

北京师范大学出版社

随机过程通论

上 卷

王 梓 坤

北京师范大学出版社

随机过程通论

下　卷

王梓坤

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

随机过程通论/王梓坤著.—北京:北京师范大学出版社,1996.3
ISBN 7-303-03631-8

Ⅰ.随… Ⅱ.王… Ⅲ.随机过程-概论 Ⅳ.0211.6

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第01744号

北京师范大学出版社出版发行
(邮编 100875 北京新街口外大街19号)
北京师范大学印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本:787×1092 1/16 印张:39.75 字数:1018千
1996年5月第1版 1996年5月第1次印刷
印数:27 001—28 500册
ISBN 7-303-03631-8/O·182 定价:50.00元
(上、下卷)

内 容 提 要

本书分上下两卷，上卷介绍随机过程的一般理论、平稳过程。前九章附有习题与解答（或提示），下卷叙述布朗运动与位势理论的关系、马尔科夫链与生灭过程，包括基本理论和国内一些科研成果。以完整的书的形式系统地论述生灭过程及其概率构造，本书也许是第一部。书末附录 2 综述了超过程，它是当今国际上最新的研究课题之。

上、下两卷基本上是独立的，阅读下卷时不必通读上卷。

读者对象为高等院校和研究单位的大学生、研究生、老师和科研人员。

上卷再版前言

本卷初版于 1965 年， 1978 年重印. 尽管随机过程理论发展非常迅速，这里所叙述的关于马尔科夫过程与平稳过程的理论仍是很重要的，它们至今仍是每位研究概率论者不可不知的基本理论. 在这一版中，改正了一些错误.

初版后承一些著名大学用作教本或参考书，热心的读者曾多次赐教，他们的重要意见已吸收在新版中，作者谨对他们表示衷心的谢忱.

作者还衷心地感激韩丽娟、洪良辰、廖昭懋、蒋铎、洪吉昌等各位教授，他们关心本书的再版，并给于了许多帮助。

各章之末附有参考文献，卷末有参考书目.

§1.2 表示第 1 章第 2 节， §3 则表示本章内第 3 节.

王梓坤　1995.8.10

上卷序

本卷的目的是叙述随机过程论 (简称过程论) 的基本理论. 要达到此目标, 不可避免地会碰到两个问题: 什么是过程论的基本理论? 怎样才能把它叙述得谨严而又易懂? 前者是选材问题; 后者涉及叙述的方式.

原来, 过程论虽是一门年轻的数学学科, 它的蓬勃发展不过是近三十年左右的事; 但由于实际需要的推动和数学工作者的努力, 这门学科已经具有非常丰富的内容. 诸子百家, 巧立门户, 早已形成群峰竞秀, 万水争流的局面. 因此, 要在一本篇幅不大的书里, 比较直接而又详细地叙述它的核心部分, 必须认真选材, 才有可能不浪费或少浪费读者的精力. 幸好 1961 年我国部分概率论工作者曾交换意见, 认为概率论的基本理论中, 至少应该包括极限理论, 平稳过程和马尔科夫过程三方面. 这给作者以很大的启发. 遵照这一意见, 本卷主要由三部分组成: 随机过程的一般理论, 马尔科夫过程和平稳过程 (极限理论不在本书范围内). 在这三部分的具体取材中, 作者参考了 Колмогоров, Добрушин, Дынкин, Doob, Loève 和伊藤清等人的著作, 并包含了作者本人的若干结果. 特别是江泽培教授的平稳过程讲义, 给了作者很大的启发与帮助, 谨此深表谢意.

迄今叙述过程论的方式主要有两种: 一是理论性的, 严谨而系统, 但不证明的细节太多, 以致初学时发生不少困难; 另一种是实用性的, 关于应用方面的材料很丰富, 涉及面广, 但作为数学基本理论, 却似乎不很适当. 本书的任务要求采用第一种方式, 为了便于初学, 作者力求把选定的内容写细. 我们希望, 即使在没有外援的自学条件下, 也有可能坚持到底. 除最后一章外, 各章末备有习题, 它们都不太难, 而且几乎每题都附有提示或解答, 这些习题对加深理解无疑是有益处的. 此外, 在各章末的附记中, 简短地指出了作者所知的进一步值得注意的问题与参考文献, 这当然是十分浅薄和挂一漏万的.

基于上述想法, 我们力求在全书中贯彻选材精炼而叙述详细的原则.

上卷共十章, 可把它们分成三个单元: 一、三章主要讲过程的一般理论; 二、四、五、六、十章讲马尔科夫过程; 七、八、九章讲 (弱) 平稳过程. 后二单元基本上是彼此独立的. 书末附篇中收集了要用到的测度论知识, 读者最好先看一下, 以便了解正文中的符号.

上卷底稿在南开大学部分地讲授过, 作者衷心感谢听众所提出的许多宝贵意见. 吴荣教授详细阅读了底稿, 并提出了许多改进建议; 来新三先生校对了文字; 胡国定教授对本书的写作始终关心和鼓励. 作者谨对以上诸位敬致谢意; 同时还感谢审校者的大力协助.

由于作者学识浅薄, 尽管竭力而为, 错误缺点, 仍然难免, 敬请随时指教, 以便改进.

1963 年 1 月

下卷序

本卷的目的在于叙述布朗运动与位势、生灭过程与马尔科夫链 (Birth-death Processes and Markov Chains) 的基本理论，并介绍近年来的一些研究进展．所谓马尔科夫链是指时间连续，状态可列，时齐的马尔科夫过程．这种链之所以重要，一是由于它的理论比较完整深入，可以作为一般马尔科夫过程及其它随机过程的借鉴，二是它在自然科学和许多实际问题 (例如物理，生物，化学，规划论，排队论等) 中有着越来越多的应用．

生灭过程是一种特殊的马尔科夫链，虽然有关的资料已相当丰富，但迄今国内外似乎还没有一本系统的专著来阐述它们．一些著名的学者如 D. G. Kendall, G. E. H. Reuter, W. Feller, 特别是 S. Karlin, J. McGregor 等人，在这方面做过许多深入而重要的研究，他们用的大都是分析数学的方法，作者深愧未能遍尝百味之鲜．我们用的主要是概率方法，即从考察运动的轨道出发，提取直观形象，然后辅以数学计算和测度论的严格证明．此法的优点是概率意义比较清楚，但可能失之于冗长．

现代概率论的重要进展之一是发现了马尔科夫过程（简称马氏过程）与位势理论（简称势论）之间的深刻联系。这一发现使势论中许多概念和结论获得了明确的概率意义，同时也使马氏过程有了新的分析工具，因而两者相互促进，丰富了彼此的内容．本书试图通过比较简单的马氏过程，即布朗运动，以及与它相对应的古典位势（牛顿位势与对数位势），来对一般理论作一前导．

第十一、十二章讨论布朗运动与古典位势．第十三、十四章讨论马尔科夫链的分析性质与轨道行为，第十五章讲一些专题，第十六、十七章讲生灭过程；这后三章基本上是国内近年来的一些研究成果．详见下卷关于各节内容的历史的注．

前两章承科学出版社于 1983 年出版发行单行本，生灭过程与马尔科夫链也曾由科学出版社于 1980 年出版．后由作者与杨向群教授合作，扩充了内容，由 Springer-Verlag 与 Science Press 出版了英文本，书名仍为《 Birth and Death Processes and Markov Chains 》，1992.

超过程是当今国际概率界关注的一个新的发展方向．附录 2 是关于超过程的一篇综合报告，它是钱敏平教授建议作者写作的．

作者衷心感谢吴荣、杨向群、刘文、杨振明、钱敏平等教授，他们仔细阅读了底稿并提出了许多改进意见．

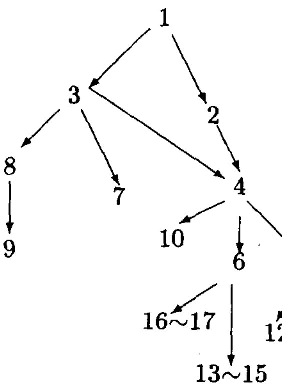
1995 年 8 月 15 日

目　录

上卷　随机过程的一般理论

下卷 布朗运动、生灭过程与马尔科夫链

各章间关系图



上卷　随机过程的一般理论

第一章　随机过程的基本概念

§1.1　随机过程的定义

(一)　象许多其它数学学科一样，概率论需要自己的公理结构. 我们采用 A. H. Колмогоров 于 1933 年所引进的公理系统，它使概率论建立在测度论的基础上，因而有可能充分利用测度论中的结果和工具. 虽然如此，从历史上看，概率论的产生远在一般的测度理论建立以前，它有专门的术语和偏重的问题. 为了保留这些术语的直观意义，我们自然应该沿用概率论中的名词.

有关测度论的预备知识都收集在附篇中.

测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 如果满足条件 $P(\Omega)=1$, 就称为 **概率空间**. 本书中，为了避免许多繁琐的关于零测集的子集的说明，总设 P 为 **完全的概率测度**. 概率论中，称 Ω 中的点 ω 为 **基本事件**,Ω 为 **基本事件空间**,$\mathcal{F}$ 中的集 A 为 **事件**, 称 $P(A)$ 为 **A的概率**. 定义在 Ω 上取实数值的 $\mathcal{F}$ 可测函数 $x(\omega)$ 称为 **随机变量**,ω 的复数值函数 $\xi(\omega)$, $\xi(\omega)=y(\omega)+iz(\omega)$, 如果它的实部 $y(\omega)$ 和虚部 $z(\omega)$ 都是随机变量，就称为 **复随机变量**. 以后如果同时研究多个随机变量，除非特别声明，我们总设它们定义在同一个概率空间上.

对随机变量 $x(\omega)$, 函数

$$F(\lambda)=P(x(\omega)\leqslant\lambda) \tag{1}$$

称为 **$x(\omega)$的分布函数**, 它对一切 $\lambda\in R_1$ 有定义，而且是 λ 的不下降右连续函数，满足条件

$$\lim_{\lambda\to-\infty}F(\lambda)=0,\quad \lim_{\lambda\to\infty}F(\lambda)=1 \tag{2}$$

(右连续性及 (2) 由测度的连续性公理推出). 因此，$F(\lambda)$ 具备一维分布函数的一切性质，从而它在 $\mathcal{B}_{1,F}$ 上产生一个 **概率分布** [1] , 后者定义为 $F(\lambda)$ 所产生的 Lebesgue–Stieltjes 测度，即测度

$$\int_A dF(\lambda),\quad A\in\mathcal{B}_{1,F}. \tag{3}$$

这测度在 $\mathcal{B}_1$ 上的限制叫做 **$x(\omega)$的分布**.

对于任何一个一维分布函数 F(以后“一维”二字省去), 如果存在某个 Lebesgue 可测而且可积函数 f, 使

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}f(\mu)\,d\mu\quad(\lambda\in R_1) \tag{4}$$

就称 f 为 **F的分布密度**, 或者说， F 有分布密度为 f.

[1] 记号 $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_{1,F}$ 等的意义见附篇 (二) 段.

今设有 n 个随机变量 $x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega)$, 它们构成一个 n 维随机矢量

$$X(\omega)=(x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega)). \tag{5}$$

n 元函数

$$F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=P(x_1(\omega)\leqslant\lambda_1,\cdots,x_n(\omega)\leqslant\lambda_n) \tag{6}$$

是一 n 维分布函数 [附篇中 (4) 式的满足是由于它左方的值等于 $P(\lambda_j<x_j(\omega)\leqslant\mu_j,\ j=1,\cdots,n)\geqslant 0$], 称为 $X(\omega)$ **的联合分布函数**. 它在 $\mathcal{B}_{n,F}$ 上产生一个概率分布，后者定义为 $F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 所产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度，即测度

$$\int\cdots\int_A F(d\lambda_1,\cdots,d\lambda_n),\quad A\in\mathcal{B}_{n,F}. \tag{7}$$

这测度在 $\mathcal{B}_n$ 上的限制叫做 $X(\omega)$ 的分布.

对于任一 n 维分布函数 F, 如果存在某个 Lebesgue 可测而且可积函数 f, 使

$$F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\int_{-\infty}^{\lambda_1}\cdots\int_{-\infty}^{\lambda_n}f(\mu_1,\cdots,\mu_n)\,d\mu_1\cdots d\mu_n \tag{8}$$

对任意 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in R_n$ 成立，就称 f 为 F **的分布密度**, 或者说， F 有分布密度为 f.

n 维随机矢量的一般化是随机过程. 设 $T\subset R_1$ 是已给的实数集，有穷或无穷，可列或不可列均可. 设 T 中每一元 t 对应于一随机变量 $x_t(\omega)$, 就称随机变量族 $x_t(\omega)$ $(t\in T)$ 为一随机过程[1]. 与 (5) 类似，记此过程 (随机过程的简称) 为

$$X(\omega)=\{x_t(\omega),t\in T\}, \tag{9}$$

$x_t(\omega)$ 有时也写为 $x(t,\omega)$ 或 $x(t)$ 或 x_t.

对任意 n 个值 $t_1,\cdots,t_n\in T$, 考虑 $x_{t_1},\cdots,x_{t_n}$ 的联合分布函数

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=P(x_{t_1}\leqslant\lambda_1,\cdots,x_{t_n}\leqslant\lambda_n), \tag{10}$$

当 n 在正整数集及 t_i 在 T 中变动时 $(1\leqslant i\leqslant n)$, 得到一族分布函数

$$F=\{F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),\quad n>0,\ t_i\in T\}, \tag{11}$$

称 F 为过程 $X(\omega)$**的有穷维分布函数族**.

与附篇中 (10),(11) 二式的证明完全一样 (只要在那里的证明中, 以 x_t,x_{t_i} 代替 $\lambda(t),\lambda(t_i)$), 可见 F 满足相容性条件，根据附篇定理 4, F 在 $\mathcal{B}_{T,F}$ 上产生一概率分布 P_F, 简记 P_F 为 F. 它在 $\mathcal{B}_T$ 上的限制叫 **过程 $X(\omega)$ 的分布**. 今证对任意 $A\in\mathcal{B}_T$, 有

$$F(A)=P(X(\omega)\in A).$$

实际上，使上式成立的全体 $A\in\mathcal{B}_T$ 构成 R_T 中的 λ- 系 Λ. 由 (10), Λ 包含全体形如 $(\lambda(t):\lambda(t_j)\leqslant\lambda_j,\ j=1,\cdots,n)$ 的集；既然全体这种集构成 R_T 中的 π- 系 Π, 由附篇引理 3, 可见 $\Lambda\supset\mathcal{F}\{\Pi\}=\mathcal{B}_T$.

---

[1]以 Y 表示定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机变量全体. 可以把随机过程 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 看成为定义在 T 上而取值于 Y 中的抽象函数；或者视为自 T 到 Y 中的映象.

在上述随机过程的定义中，我们假定了 T 是某实数集，它可解释为时间的集；其次，还假定了 $x_t(\omega)$ 的值为实数 (或复数) 其实从数学理论上看来，没有必要一定要这样做．例如，T 也可以取为平面上的点集，而 $x_t(\omega)$ 可取值于任意可测空间 $(E,\mathcal{B})$，其中 $\mathcal{B}$ 为抽象点 e 的集 E 中某指定的 σ 代数．这时，随机变量的定义应如下推广．称 $x(\omega)$ 为 **取值于 $(E,\mathcal{B})$ 中的随机变量**，如对任意 $B\in\mathcal{B}$，ω 集 $(x(\omega)\in B)\in\mathcal{F}$．显然，当 $(E,\mathcal{B})$ 为 $(R_1,\mathcal{B}_1)$ 时，这定义化归以前的定义．如对已给集 T 中任一点 t，有一取值于 $(E,\mathcal{B})$ 中的随机变量 $x_t(\omega)$ 与之对应，就称 $X(\omega)=\{x_t(\omega),t\in T\}$ 为 **取值于 $(E,\mathcal{B})$ 中的随机过程**；或简称 **随机过程**(如 $(E,\mathcal{B})$ 已明确固定)．因此，对随机过程 $X(\omega)$，$x_t(\omega)$ 是 $\omega\in\Omega$，$t\in T$ 的二元函数；当 $t\in T$ 固定时，$x_t(\omega)$ 是随机变量；而当 $\omega\in\Omega$ 固定时，$x_t(\omega)$ 是定义于 T 上而取值于 E 的函数，称为 (对应于 ω 的)**样本函数**．$(E,\mathcal{B})$ 称为 **相空间**．

然而以后如无特别声明，总设 t 及 $x_t(\omega)$ 都取实数值．

随着 T 及 E 是可列集[1]或非可列集，可将随机过程分为四类：E,T 均可列；均不可列；E 可列 T 不可列；T 可列 E 不可列．这是形式上的分类．另一种分类是根据过程内在的概率法则进行的，于是得到以后要专门讲述的各种过程，例如半鞅、正态过程、马氏过程、平稳过程等等，这留待将来细讲．事实上大多是把两种分类结合起来，研究时比较方便．因而，譬如说，马尔科夫过程中又分 E,T 均可列；均不可列等等四种 (但对正态过程，E 可列无意义)．

作为一例，试引进独立随机过程的观念．

称 **随机变量族 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 为独立的**，如对任意有穷多个不同的 t_i，$t_i\in T$，任意 $B_i\in\mathcal{B}$，$i=1,\cdots,n$，有

$$P(x_{t_i}(\omega)\in B_i,i=1,\cdots,n)=\prod_{i=1}^{n}P(x_{t_i}(\omega)\in B_i). \tag{12}$$

如果 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 独立，称 $X(\omega)=\{x_t(\omega),t\in T\}$ 为 **具有独立随机变量族的随机过程**，或简称为 **独立随机过程**．

更一般地，设对每个 $\lambda\in\Lambda$，$\Lambda\subset R_1$，存在一随机过程 $X_\lambda(\omega)=\{x_t(\omega),t\in T_\lambda\}$．考虑乘积空间 E^{T_λ} 中的乘积 σ 代数 $\mathcal{B}^{T_\lambda}$．说 **随机过程族 $X_\lambda(\omega)$，$\lambda\in\Lambda$ 是独立的**，如对任意有穷多个不同的 λ_i，$\lambda_i\in\Lambda$，任意 $B_{\lambda_i}\in\mathcal{B}^{T_{\lambda_i}}$，$i=1,\cdots,n$，有

$$P(X_{\lambda_i}(\omega)\in B_{\lambda_i},\ i=1,\cdots,n)=\prod_{i=1}^{n}P(X_{\lambda_i}(\omega)\in B_{\lambda_i}).$$

注意，一随机矢量可看成为一随机过程，故上定义中也蕴含着随机矢量族的独立性定义．

以下设 $(E,\mathcal{B})=(R_1,\mathcal{B}_1)$．条件 (12) 等价于：对任意 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in R_n$，有

$$P(x_{t_i}(\omega)\leqslant\lambda_i,\ i=1,\cdots,n)=\prod_{i=1}^{n}P(x_{t_i}(\omega)\leqslant\lambda_i), \tag{12_1}$$

这可记成

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\prod_{i=1}^{n}F_{t_i}(\lambda_i). \tag{12_2}$$

[1]为方便计，有穷集 (即只含有穷多个元的集) 也算可列集．

现在设 $T=(1,\cdots,n)$ 而考虑具有独立分量的随机矢量 $X(\omega)=(x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega))$, 因而它的分布函数

$$F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\prod_{i=1}^{n}F_i(\lambda_i).$$

令 $S_n(\omega)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i(\omega)$. 试证

引理 1 对任意 $\lambda_j\in R_1$, $j=1,\cdots,n-1$, $\lambda\in R_1$, 有

$$\begin{aligned}&P(x_j(\omega)\leqslant\lambda_j,\ j=1,\cdots,n-1;\ S_n(\omega)\leqslant\lambda)\\&=\int_{-\infty}^{\lambda_1}F_1(d\xi_1)\cdots\int_{-\infty}^{\lambda_{n-1}}F_n(\lambda-\xi_1-\cdots-\xi_{n-1})F_{n-1}(d\xi_{n-1}).\end{aligned}\tag{13}$$

证 令 $A\subset R_n$ 为如下的 n 维点集

$$A=\left((\xi_1,\cdots,\xi_n):\ \xi_j\leqslant\lambda_j,\ j=1,\cdots,n-1;\ \sum_{j=1}^{n}\xi_j\leqslant\lambda\right),$$

又以 W 表 (13) 左方括号中的 ω 集. 由积分变换定理及独立性假设, (13) 左方值等于

$$P(W)=\int_W 1\,P(d\omega)=\int\cdots\underset{A}{\int}F(d\xi_1,\cdots,d\xi_n)=\int\cdots\underset{A}{\int}F_1(d\xi_1)\cdots F_n(d\xi_n),$$

计算此式最后的 n 重积分, 即得 (13) 中右方的数值. □

作为 (13) 的特殊情形是

$$P(S_n(\omega)\leqslant\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(d\xi_1)\cdots\int_{-\infty}^{\infty}F_n(\lambda-\xi_1-\cdots-\xi_{n-1})F_{n-1}(d\xi_{n-1}).\tag{13_1}$$

(二) 下述定理在理论上具有重要的意义, 它肯定了以已给 F 为有穷维分布函数族的过程的存在.

定理 1 (存在定理) 设已给参数集 T 及满足相容性条件的有穷维分布函数族

$$F=\{F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),\ \ n>0,\ t_i\in T\},$$

则必存在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 及定义于其上的随机过程 $X(\omega)=\{x_t(\omega),t\in T\}$, 使 $X(\omega)$ 的有穷维分布函数族与 F 相重合.

证 令 $\Omega=R_T$; $\omega=\lambda(\cdot)$, $\lambda(\cdot)$ 表定义在 T 上的实值函数 $\lambda(t)$, $t\in T$; $\mathcal{F}=\mathcal{B}_T$.

P 为 F 所产生的 $\mathcal{B}_T$ 上的概率测度, 即 $P=P_F$(见附篇定理 4), 因而对 n 维柱集 $C_{t_1,\cdots,t_n}(B_n)$, 有

$$P(C_{t_1,\cdots,t_n}(B_n))=F_{t_1,\cdots,t_n}(B_n).\tag{14}$$

于是得到概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$, 即 $(R_T,\mathcal{B}_T,P_F)$. 在此空间上, 对每固定的 $t\in T$, 定义一 ω 的函数

$$x_t(\omega)=\lambda(t),\ \ 如\,\omega=\lambda(\cdot),$$

换句话说，$x_t(\omega)$ 是 R_T 上的 t 坐标函数，亦即 x_t 在 $\omega=\lambda(\cdot)$ 上的值，等于 $\lambda(\cdot)$ 在点 t 上的值 $\lambda(t)$. 由定义并采用附篇 (6) 式中的记号 W_n 即得

$$(x_{t_i}(\omega)\leqslant\lambda_i,\ i=1,\cdots,n)=W_n\in\mathcal{B}_T,$$

故 $X(\omega)=\{x_t(\omega),\ t\in T\}$ 是随机过程；由 (14)

$$P(x_{t_i}(\omega)\leqslant\lambda_i,\ i=1,\cdots,n)=P(W_n)=F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),$$

这表示 $X(\omega)$ 的有穷维分布函数族与 F 重合. □

上述定理肯定了以已给 F 为有穷维分布函数族的过程的存在性，然而这种过程及概率空间一般不唯一而有多种造法. 定理 1 证明中所造出的空间及过程称为 **标准的**.

为了说明造法不唯一，试述两种典型方法：联合与清洗概率空间. 利用这些方法，可以造出无穷多个具有上述性质的过程. 不仅如此，这些方法还有其它广泛的用途.

引理 2 (空间的联合) 设 $X(\omega_1)=\{x_t(\omega_1),\ t\in T\}$ 是定义在 $(\Omega_1,\mathcal{F}_1,P_1)$ 上的随机过程，$(\Omega_2,\mathcal{F}_2,P_2)$ 为另一概率空间，$\Omega_i=(\omega_i), i=1,2$. 令

$$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2,\ \mathcal{F}=\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2,\ P=P_1\times P_2, \tag{15}$$

$$y_t(\omega)=x_t(\omega_1),\ \text{如}\,\omega=(\omega_1,\omega_2), \tag{16}$$

则 $Y(\omega)=\{y_t(\omega),\ t\in T\}$ 是定义在 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机过程，而且 $X(\omega_1)$ 与 $Y(\omega)$ 有相同的有穷维分布函数族.

证 因为

$$(\omega:\ y_t(\omega)\leqslant\lambda)=(\omega=(\omega_1,\omega_2):\ x_t(\omega_1)\leqslant\lambda)=(\omega_1:\ x_t(\omega_1)\leqslant\lambda)\times\Omega_2\in\mathcal{F},$$

故 $Y(\omega)$ 是随机过程；第二结论则由于

$$\begin{aligned}&P(\omega:\ y_{t_i}(\omega)\leqslant\lambda_i,\ i=1,\cdots,n)\\&=P_1(\omega_1:\ x_{t_i}(\omega_1)\leqslant\lambda_i,\ i=1,\cdots,n)\times P_2(\Omega_2)\\&=P_1(\omega_1:\ x_{t_i}(\omega_1)\leqslant\lambda_i,\ i=1,\cdots,n).\ \square\end{aligned}$$

如果说空间的联合是为了解决原有空间太小的困难，那么空间的清洗便可免除由于空间太大而引起的麻烦. 有些基本事件空间过大，其中包含了许多不必要的点，此时自然想把它们清洗出去.

引理 3 (空间的清洗) 设对概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$, $\widetilde{\Omega}\subset\Omega$ 是外测度为 1 的集 [1]，则 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{P})$ 也是概率空间，其中

$$\widetilde{\mathcal{F}}=\widetilde{\Omega}\mathcal{F},\ \ \text{即}\,\widetilde{\mathcal{F}}=(B)\ (B=\widetilde{\Omega}A,\ A\in\mathcal{F}), \tag{17}$$

$$\widetilde{P}(B)=P(A); \tag{18}$$

又如 $X(\omega)=\{x_t(\omega),t\in T\}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机过程，则 $\widetilde{X}(\omega)=\{\widetilde{x}_t(\omega),t\in T\}$ 是 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{P})$ 上的随机过程，而且 $X(\omega)$ 与 $\widetilde{X}(\omega)$ 有相同的有穷维分布函数族，这里 $\widetilde{x}_t(\omega)=x_t(\omega),\omega\in\widetilde{\Omega}$.

[1] 即指 $\widetilde{\Omega}$ 具有性质：如 $C\in\mathcal{F}$, $\widetilde{\Omega}\subset C$, 则 $P(C)=1$.

证 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 是 $\widetilde{\Omega}$ 上的 σ 代数是显然的. 试证 $\widetilde{P}(B)$ 的值唯一. 设 $\widetilde{\Omega}A_1 = B = \widetilde{\Omega}A_2$, 则 $A_1\widetilde{\Omega}A_1 = A_1\widetilde{\Omega}A_2$, $(A_1 - A_1A_2)\widetilde{\Omega} = \phi$, 于是 $\Omega - (A_1 - A_1A_2) \supseteq \widetilde{\Omega}$. 因 $\widetilde{\Omega}$ 的外测度为 1, 故 $P(\Omega) - P(A_1 - A_1A_2) = 1$, $P(A_1 - A_1A_2) = 0$, 于是得证 $P(A_1) = P(A_1A_2)$; 同样, $P(A_2) = P(A_1A_2) = P(A_1)$, 因而证明了 $\widetilde{P}(B)$ 的值唯一. 显然 $\widetilde{P}(B) \geqslant 0$, $\widetilde{P}(\widetilde{\Omega}) = 1$, 而且 $\widetilde{P}$ 在 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 上完全可加, 故 $\widetilde{P}$ 是 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 上的概率测度.

最后, 由

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(\widetilde{x}_{t_i}(\omega) \leqslant \lambda_i,\ i=1,\cdots,n) &= \widetilde{P}(\widetilde{\Omega} \cap (x_{t_i}(\omega) \leqslant \lambda_i,\ i=1,\cdots,n)) \\ &= P(x_{t_i}(\omega) \leqslant \lambda_i,\ i=1,\cdots,n),\end{aligned}$$

即知 $X(\omega)$ 与 $\widetilde{X}(\omega)$ 有相同的有穷维分布函数族. □

现在举一例以说明上述结果. 先引进记号 $\binom{a_0\ a_1\ \cdots}{p_0\ p_1\ \cdots}$, 它代表一个分布 F, 使

$$F(\{a_i\}) = p_i > 0, \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1.$$

$\{a_i\}$ 表示只含一个点 a_i 的集, 叫做 **单点集**, 这种形状的分布 **F** 叫 **离散分布**, 它的分布函数为

$$F(\lambda) = \sum_{(i:a_i \leqslant \lambda)} p_i.$$

例 试造 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 及定义于其上的二随机变量 $x_1(\omega)$, $x_2(\omega)$ (即 $T = (1,2)$ 的过程), 使分别有分布

$$F_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad F_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

而且它们的联合分布为

$$F_{12} = \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

解 造法 1. 分布族 (F_1, F_2, F_{12}) 是相容的 [1], 故由存在定理, 可造标准过程. 此时

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = (R_2, \mathcal{B}_2, F_{12}),$$

其中 F_{12} 应理解为 $\mathcal{B}_2$ 中的分布, 即

$$F_{12}(A) = \frac{k}{4},$$

而 k 为 A 所含 $((0,0),(0,1),(1,0),(1,1)) = \widetilde{\Omega}$ 中点的个数. 然后定义

$$x_1(\omega) = \omega_1, \quad x_2(\omega) = \omega_2, \quad 如 \omega = (\omega_1, \omega_2) \in R_2.$$

造法 2. 因为 $F_{12}(\widetilde{\Omega}) = 1$, 故可清洗上面所造的 $\Omega = R_2$, 经清洗后, 所得为 $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{P})$, 其中 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 为 $\widetilde{\Omega}$ 中全体子集所成 σ 代数, $\widetilde{P} = F_{12}$. 又

$$\widetilde{x}_1(\omega) = \omega_1, \quad \widetilde{x}_2(\omega) = \omega_2, \quad 如 \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \widetilde{\Omega}.$$

[1] $F_{21} = F_{12}$ 略去.

造法 3. 令 $\Omega_1=(0,1)$, 它只含 0 与 1 二点. $\mathcal{F}_1$ 是 Ω_1 中全体子集所成 σ 代数, $P_1=F_1$. 又

$$x_1(\omega_1)=\omega_1,\quad \omega_1\in\Omega_1.$$

于是得到概率空间 $(\Omega_1,\mathcal{F}_1,P_1)$ 及其上定义的随机变量 $x_1(\omega_1)$, 显然 $x_1(\omega_1)$ 的分布是 F_1.

完全同样地造 $(\Omega_2,\mathcal{F}_2,P_2)$ 及 $x_2(\omega_2)$.

然后依照引理 2 造乘积空间:

$$(\Omega,\mathcal{F},P)=(\Omega_1\times\Omega_2,\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2,P_1\times P_2),$$

并在 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上, 定义二随机变量 $X_1(\omega)$ 及 $X_2(\omega)$, 使

$$X_1(\omega)=\omega_1,\ X_2(\omega)=\omega_2,\quad \text{如 } \omega=(\omega_1,\omega_2)\in\Omega.$$

易见 $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ 分别有分布 F_1 及 F_2, 再注意 $F_{12}=F_1\times F_2=P_1\times P_2$, 即知它们的联合分布为 F_{12}. 形象地说, 我们已把定义在二空间上的随机变量, “搬到”同一空间上来了.

(三) 简单回顾一下概率论中的基本观念和事实, 凡是在普通概率论教程中能找到证明的, 这里都不重新证明.

设 $x(\omega)$ 是随机变量, 因为它是 Ω 上的 $\mathcal{F}$ 可测函数, 故对它可取 Lebesgue 积分 (关于概率测度 P). 如果 $x(\omega)$ 的积分存在, 就称此积分值为 $x(\omega)$ 的 **数学期望**, 或 **期望** [1], 并记为 Ex 或 $Ex(\omega)$:

$$Ex=\int_\Omega x(\omega)P(d\omega). \tag{19}$$

直观地说, Ex 是 $x(\omega)$ 在全 Ω 上关于 P 的平均值. 由测度论可知, $x(\omega)$ 可积的充要条件是 $E|x|<\infty$. 既然期望无非就是 Lebesgue 积分, 所以期望的性质也就是 Lebesgue 积分的性质.

如果说, 期望表达随机变量的集中位置, 或者说“重心”, 那么方差 Dx 便表达 x 对它的期望 Ex 的分散程度, 我们定义

$$Dx=\int_\Omega (x(\omega)-Ex)^2P(d\omega). \tag{20}$$

Dx 非负但可能等于 ∞.

可测函数列的各种收敛性 (见附篇), 可以用作随机变量列的对应的各种收敛性的定义. 于是得到随机变量列 $\{x_n(\omega)\}$ 向随机变量 $x(\omega)$ 的 **概率1(即 几乎处处) 收敛**, **依概率**(或称 **依测度**) **收敛及均方收敛**(或一般地, **r方收敛**,$r>0$). 如所周知, 由概率 1 收敛或 r 方收敛都可推出依概率收敛. 反之, 如 $P\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, 即 $\{x_n\}$ 依概率收敛于 x, 那么 $\{x_n\}$ 的任一子列 $\{x'_n\}$ 必定包含一子子列 $\{x'_{k_n}\}$, $\{x'_{k_n}\}$ 以概率 1 收敛于 x.

更弱的一种收敛性如下: 设 $F_n(\lambda)$, $F(\lambda)$ 都是分布函数, 说 $\{F_n(\lambda)\}$ (或分布 F_n)弱收敛于 $F(\lambda)$(或分布 F), 并记为 $F_n\xrightarrow{W}F$, 如果在 $F(\lambda)$ 的连续点集 B 上, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(\lambda)=F(\lambda)$.

如果 $F_n\xrightarrow{W}F$, $F_n\xrightarrow{W}\widetilde{F}$, $F(\lambda)$ 与 $\widetilde{F}(\lambda)$ 的连续点集的交记为 C, 由不减函数的性质知 C 在 R_1 中稠密, 因而 $F(\lambda)$ 与 $\widetilde{F}(\lambda)$ 在 C 上一致, 再由分布函数的右连续性知 $F(\lambda)=\widetilde{F}(\lambda)$, $\lambda\in R_1$. 这证明了极限的唯一性.

---

[1]如果 $\xi(\omega)=y(\omega)+iz(\omega)$ 是复随机变量, 而且 Ey 及 Ez 存在, 便定义 ξ 的数学期望为 $E\xi=Ey+iEz$.

设随机变量 x_n 及 x 分别有分布函数为 $F_n(\lambda)$ 与 $F(\lambda)$, 如果 $F_n \xrightarrow{W} F$, 就说 $\{x_n\}$**依分布收敛**于 x. 注意这种收敛不需要通过 ω 来表达.

引理 4 设 $\{x_n\}$ 依概率收敛于 x, 则 $\{x_n\}$ 必依分布收敛于 x.

证 采用定义中的记号. 因

$$\begin{aligned}(\omega : x(\omega) \leqslant \lambda') &= (\omega : x_n \leqslant \lambda, x \leqslant \lambda') \cup (\omega : x_n > \lambda, x \leqslant \lambda') \\ &\subset (\omega : x_n \leqslant \lambda) \cup (\omega : x_n > \lambda, x \leqslant \lambda'),\end{aligned}$$

故 $P(x \leqslant \lambda') \leqslant F_n(\lambda) + P(x_n > \lambda, x \leqslant \lambda')$. 如 $P \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, 而且 $\lambda' < \lambda$, 则

$$P(x_n > \lambda, x \leqslant \lambda') \leqslant P(|x_n - x| \geqslant \lambda - \lambda') \to 0,$$

从而 $F(\lambda') \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} F_n(\lambda)$, $\lambda' < \lambda$.

同样, 对调 x 与 x_n, λ 与 λ', 再换 λ' 为 λ'', 即得

$$\varlimsup_{n\to\infty} F_n(\lambda) \leqslant F(\lambda''), \quad \lambda \leqslant \lambda''.$$

故如 $\lambda' < \lambda < \lambda''$, 则

$$F(\lambda') \leqslant \varliminf_{n\to\infty} F_n(\lambda) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} F_n(\lambda) \leqslant F(\lambda'').$$

由此可见, 如 $\lambda \in B$, 则令 $\lambda' \uparrow \lambda$, $\lambda'' \downarrow \lambda$, 即得

$$F(\lambda) = \lim_{n\to\infty} F_n(\lambda). \ \square$$

设 $x(\omega)$ 的分布函数为 F, 函数

$$\Phi(t) = Ee^{itx} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} F(d\lambda) \quad (t \in R_1)$$

称为 $x(\omega)$ 的 (或 F 的)**特征函数**. 它具有下列性质, 它们在概率论中都已证明.

A. Φ 是 $t \in R_1$ 上的有界、一致连续函数; 满足

$$|\Phi(t)| \leqslant \Phi(0) = 1, \quad \Phi(-t) = \overline{\Phi(t)}.$$

如 $E\{|x|^n\} < \infty$, 则 Φ 有 n 级连续导数, 而且

$$\Phi^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (i\lambda)^n e^{it\lambda} F(d\lambda), \quad |\Phi^{(n)}(t)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^n F(d\lambda).$$

B. 分布函数 F 被它的特征函数 Φ 唯一决定, 下列 Lévy 公式成立:

$$\frac{F(\mu) + F(\mu - 0)}{2} - \frac{F(\lambda) + F(\lambda - 0)}{2} = \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-it\mu} - e^{-it\lambda}}{-2\pi it} \Phi(t)\, dt.$$

C. 如 $x_1, \cdots, x_n$ 为独立随机变量, 分别有特征函数为 $\Phi_1, \cdots, \Phi_n$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ 的特征函数为

$$\Phi = \prod_{i=1}^{n} \Phi_i.$$

D. 如 $\{x_n\}$ 依分布收敛于 x, 则 $\{x_n\}$ 的特征函数列 Φ_n 收敛于 x 的特征函数 Φ, 而且这收敛在任一有穷 t 区间中是一致的.

E. 反之，设分布函数列 $\{F_n\}$ 对应的特征函数列为 Φ_n, 而且 $\{\Phi_n\}$ 收敛于特征函数 Φ, 如果对应于 Φ 的分布函数为 F, 则在 F 的连续点集上，有 $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(\lambda)=F(\lambda)$.

若只假定 $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(t)=\Phi(t)$ 存在，$t\in R_1$, 但补设此收敛在某一含 0 的开区间中一致，则 $\Phi(t)$ 必是特征函数，而且上述结果仍成立.

G. Bochner–Хинчин**定理** [1]　连续函数 $\Phi(t)$, $t\in R_1$, $\Phi(0)=1$, 是某分布的特征函数的充分与必要条件是：它具有非负定性，即对任意有穷多个复数 $a_1,\cdots,a_n$, 任意实数 $t_1,\cdots,t_n$, 有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\overline{a}_j\Phi(t_i-t_j)\geqslant 0.$$

下面我们将通常用到的一维分布 F 及与它对应的特征函数列成一表.

在下表中 $f(x)$ 表分布的密度；$\Phi(t)$ 表特征函数；如分布是离散的，则以 P_k 表分布在点 k 上的概率，换句话说，如 ξ 的分布是离散的，即存在可列点集 A, 使 $P(\xi\in A)=1$, 则 $P(\xi=k)=P_k$, $k\in A$; ξ 的 k 级矩 $E\xi^k$ 记为 m_k, 方差记为 D, $D\xi=E(\xi-m_1)^2=m_2-m_1^2$, 一般地，记 $c_k=E(\xi-m_1)^k$. 此外，回忆 Gamma 函数的定义.

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx\quad(p>0),$$

并注意 $\Gamma(n+1)=n!$.

类似地可以考虑 n 维随机矢量

$$X(\omega)=(x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega)),$$

它的分布函数记为 $F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$. 对任意 $m<n$, $(i_1,\cdots,i_m)\subset(1,\cdots,n)$, 定义

$$F_{i_1,\cdots,i_m}(\lambda_{i_1},\cdots,\lambda_{i_m})=\lim_{\substack{\lambda_i\to\infty\\ \text{一切}i\overline{\in}(i_1,\cdots,i_m)}} F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),$$

它叫做 **F的 m 维边沿分布函数**, 实际上是随机矢量 $(x_{i_1}(\omega),\cdots,x_{i_m}(\omega))$ 的分布函数. $X(\omega)$ 的数学期望是一 n 维矢量

$$EX=(Ex_1,\cdots,Ex_n),$$

其中 Ex_i 是 x_i 的期望. 与一维情况的方差相当的是协方差矩阵 DX

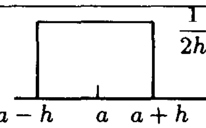
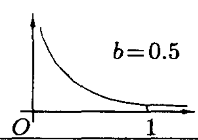
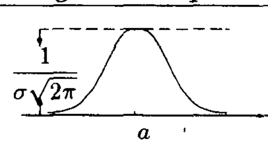
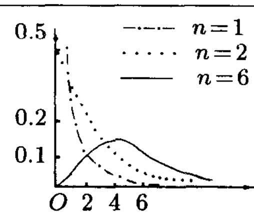
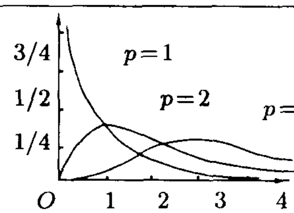
$$DX=(D_{ij}),\quad i,j=1,\cdots,n,$$

其中

$$\begin{aligned}D_{ij}&=E\{(x_i-Ex_i)(x_j-Ex_j)\}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda_i-Ex_i)(\lambda_j-Ex_j)F_{ij}(d\lambda_i,d\lambda_j).\end{aligned}$$

[1] 证明见 [1] 或 [4].

常　　用

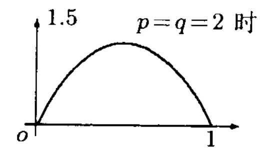
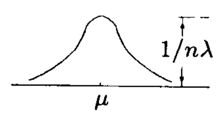
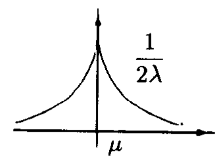
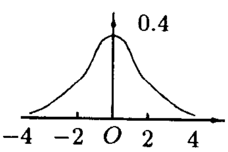
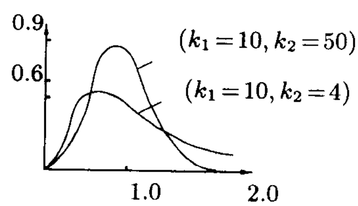
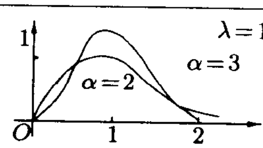
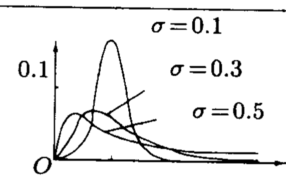
分布名称	分布或密度函数 $f(x)$	$f(x)$ 的图形
单点分布	$P_c=1$ (c为某常数)	
两点分布	$P_0=q,\ P_1=p,\ \left(\begin{matrix}p\geq 0, q\geq 0\\ p+q=1\end{matrix}\right)$	
二项分布 $B(n,p)$	$P_k=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ $p>0, q>0$为常数, $p+q=1$ $k=0,1,\cdots,n$	
普阿松 (Poisson) 分布$P(\lambda)$	$P_k=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $(k=0,1,\cdots,\lambda>0)$	
几何分布	$P_k=pq^{k-1},\ k=1,2,\cdots,$ ($p>0, q>0$为常数, $p+q=1$)	
均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2h}, & a-h\leq x\leq a+h;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ (a及$h>0$为常数)	
指数分布	$f(x)=\begin{cases}be^{-bx}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$ ($b>0$为常数)	
正态分布 $N(a,\sigma)$ $(\sigma>0)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ (a及$\sigma>0$为常数)	
$\chi^2(n)$ 分布	$f(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0,\\ \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & \end{cases}$ $x>0$.(n正整数)	
加马 (Gamma) −分布$\Gamma[b,p]$	$f(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0;\\ \dfrac{b^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-bx}, & x>0.\end{cases}$ ($b>0, p>0$常数)	

1. 设 C 为某类分布 (例如正态分布类), 如对任意 $F_1\in C$, $F_2\in C$, 它们的卷积 $F_1*F_2\in C$,(参看

分　布　表

特征函数 $\Phi(t)$	k阶矩m_k, (m_1为数学期望) k阶中心矩c_k, (c_2为方差)	附　注
e^{ict}	$m_k = c^k$ $c_k = 0$	
$pe^{it}+q$	$m_k = p$ $c_2 = pq$	
$(pe^{it}+q)^n$	$m_1 = np$ $c_2 = npq$	1. 加法定理成立[1)]： $B(n,p)*B(m,p)=B(n+m,p)$ 2. 如 ξ_i 独立，有相同的两点分布， $(i=1,\cdots,n)$则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$有二项分布
$e^{\lambda(e^{it}-1)}$	$m_1=\lambda$ $c_2=\lambda$	加法定理成立 $P(\lambda_1)*P(\lambda_2)=P(\lambda_1+\lambda_2)$
$pe^{it}(1-qe^{it})^{-1}$	$m_1 = p^{-1}$, $c_2 = qp^{-2}$	
$e^{ita}\dfrac{\sin th}{th}$	$m_k=\dfrac{1}{2h}\dfrac{(a+h)^{k+1}-(a-h)^{k+1}}{k+1}$ $(k=1,2,\cdots)$ $c_2=\dfrac{1}{3}h^2$	如 ξ 的分布函数 $F(x)$ 连续，则 $\eta=F(\xi)$在 $[0,1]$ 中均匀分布
$\left(1-\dfrac{it}{b}\right)^{-1}$	$m_1=\dfrac{1}{b}$ $c_2=\dfrac{1}{b^2}$	指数分布是 Gamma 分布的特殊情形
$e^{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$	各阶矩存在： $m_1=a$ $c_{2k+1}=0$ $c_{2k}=1\cdot 3\cdots(2k-1)\sigma^{2k}$	加法定理成立：如 ξ_i 独立，各有分布为 $N(a_i,\sigma_i)$, d为常数 则$\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\xi_i+d$的分布为 $N\left(\sum\limits_{i=1}^{n}c_ia_i+d,\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}c_i^2\sigma_i^2}\right)$
$\dfrac{1}{(1-2it)^{n/2}}$	$m_k=n(n+2)\cdots(n+2k-2)$, $(k=1,2,\cdots)$ $c_2=2n$.	1. 加法定理成立： $\chi^2(n)*\chi^2(m)=\chi^2(n+m)$. 2. 如 ξ_i 独立同分布为 $N(0,1)$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2$之分布为$\chi^2(n)$
$\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{it}{b}\right)^p}$	$m_k=\dfrac{1}{b^k}p(p+1)\cdots(p+k-1)$, $(k=1,2,\cdots)$; $c_2=\dfrac{p}{b^2}$	1. 它是 p 个 (p 为整数时) 指数分布的卷积；$p=1$ 时化为指数分布. 2. 加法定理成立： $\Gamma[b,p_1]*\Gamma[b,p_2]=\Gamma[b,p_1+p_2]$. 3. 当 $p=\dfrac{n}{2}, b=\dfrac{1}{2}$ 时化为 $\chi^2(n)$ 分布

§2.8(6)), 就说对 C 加法定理成立.

分布名称	分布或密度函数 $f(x)$	$f(x)$ 的图形
伯塔 (Beta) 分布	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\text{或}x\ge 1;\\ \dfrac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1}, & 0<x<1,\end{cases}$ $(p>0, q>0\text{常数})$	
柯西 (Cauchy) 分布$c(\lambda,\mu)$	$f(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2}$ $(\lambda>0\text{常数})$	
拉普拉斯 (Laplace) 分布	$f(x)=\dfrac{1}{2\lambda}e^{-\frac{\|x-\mu\|}{\lambda}}$ $(\lambda>0\text{常数}$	
学生 (Student) 分布($t(n)$分布)	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ 其中$\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx, (p>0)$	
F − 分布 (F_{k_1,k_2})	$f(x)=$ $\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}k_1^{\frac{k_1}{2}}k_2^{\frac{k_2}{2}}\dfrac{x^{\frac{k_1}{2}-1}}{(k_2+k_1x)^{\frac{k_1+k_2}{2}}} & \text{如}x\ge 0;\\ 0, & \text{如}x<0.\end{cases}$ $(k_1, k_2\text{为正常数})$	
韦布 (Weibull) 分布	$f(x)=\begin{cases}0, & (x\le 0);\\ \alpha\lambda x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^\alpha}, & (x>0)\end{cases}$ $(\lambda>0, \alpha>0\text{是常数})$	
对数正态分布	$f(x)=\begin{cases}0, & (x\le 0);\\ \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(\log x-a)^2}{2\sigma^2}}, & (x>0)\end{cases}$	

续表

特征函数 $\Phi(t)$	k阶矩m_k,(m_1为数学期望) k阶中心矩c_k,(c_2为方差)	附　　注
	$m_k=\dfrac{p(p+1)\cdots(p+k-1)}{(p+q)(p+q+1)\cdots(p+q+k-1)}$ $(k=1,2,\cdots)$ $c_2=\dfrac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$	1. 如$\xi_1,\cdots,\xi_{n+m}$独立，同分布为$N(0,\sigma)$,则 $\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2\Big/\sum_{j=1}^{n+m}\xi_j^2$ 有 Beta 分布，此时$p=\dfrac{m}{2},q=\dfrac{n}{2}$ 2. 当$p=q=\dfrac{1}{2}$时，化为反正弦分布，其密度为 $\dfrac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}},(0<x<1);$ 分布函数为$\dfrac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$
$e^{i\mu t-\lambda\|t\|}$	各阶矩都不存在	加法定理成立： $c(\lambda_1,\mu_1)*c(\lambda_2,\mu_2)$ $=c(\lambda_1+\lambda_2,\mu_1+\mu_2)$
$\dfrac{e^{i\mu t}}{1+\lambda^2t^2}$	各阶矩有穷	
	$k(<n)$阶矩有穷： $m_1=0,\quad(1<n);$ $m_{2v}=c_{2v}=$ $=\dfrac{1\cdot3\cdots(2v-1)n^v}{(n-2)(n-4)\cdots(n-2v)},$ $(2v<n)$	1. 设$\xi,\xi_1,\cdots,\xi_n$独立，同分布为$N(0,\sigma)$,则 $\xi\Big/\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}$有 Student 分布$t(n)$,(与$\sigma>0$无关). 2. $n=1$时化为 Cauchy 分布$c(1,1)$
	$m_k=\left(\dfrac{k_2}{k_1}\right)^k\dfrac{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}$ 对$k_1<2k<k_2$存在； $c_2=\dfrac{2k_2^2(k_1+k_2-2)}{k_1(k_2-2)^2(k_2-4)},\ (k_2>4).$	如 ξ,η 独立，分别有$\chi^2(k_1),\chi^2(k_2)$分布,则 $\dfrac{\xi/k_1}{\eta/k_2}$有$F-$分布$F_{k_1,k_2}$
	$m_k=\Gamma\left(\dfrac{k}{a}+1\right)\lambda^{-k/a},$ $c_2=\lambda^{-2/a}\left[\Gamma\left(\dfrac{2}{a}+1\right)-\left\{\Gamma\left(\dfrac{1}{a}+1\right)\right\}^2\right]$	当 $a=1$ 化为指数分布
	$m_1=e^{a+\sigma^2/2},$ $m_2=e^{2(a+\sigma^2)},$ $c_2=e^{2a+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1),$ $m_k=e^{na+(n^2\sigma^2)/2}$	设 ξ 有 $N(a,\sigma)$ 正态分布， 令 $\xi=\log\eta$, 则 η 有对数正态分布

令 $\mathbf{\Lambda}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in R_n$, $\mathbf{t}=(t_1,\cdots,t_n)\in R_n$, 记 $(\mathbf{t},\mathbf{\Lambda})=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i\lambda_i$, 并称 n 元函数

$$\Phi(\mathbf{t})=E\{e^{i(\mathbf{t},\mathbf{X})}\}=\int\cdots\int_{R_n}e^{i(\mathbf{t},\mathbf{\Lambda})}F(d\lambda_1,\cdots,d\lambda_n)$$

为 $X(\omega)$ 的特征函数. 一元特征函数的性质在多元情况仍保留，例如，分布函数由它的特征函数所唯一决定 [1].

§1.2 正态随机过程

(一) 在引入正态过程的定义以前，需要较仔细地研究 n 维正态分布的性质.

设已给 n 维矢量

$$\mathbf{m}=(m_1,\cdots,m_n)\in R_n$$

及 n 阶 **非负定对称** 矩阵 $\mathbf{\Lambda}=[\lambda_{jk}]$, 即满足下列条件的矩阵：对任意实数 $\eta_1,\cdots,\eta_n$, 有

$$\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_{jk}\eta_j\eta_k\geqslant 0,\quad \lambda_{jk}=\lambda_{kj}. \tag{1}$$

此外，如 (1) 中前式当且仅当一切 $\eta_j=0$ 时等号成立，则称 $\mathbf{\Lambda}$ 为 **正定对称的**. 考虑定义在 R_n 上的、 $\mathbf{t}=(t_1,\cdots,t_n)$ 的函数

$$f(\mathbf{t})=f(t_1,\cdots,t_n)=exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}m_jt_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_{jk}t_jt_k\right\}, \tag{2}$$

采用矩阵记号，可改写 (2) 为

$$f(\mathbf{t})=exp\left\{i\mathbf{m}\mathbf{t}'-\frac{1}{2}\mathbf{t}\mathbf{\Lambda}\mathbf{t}'\right\}, \tag{3}$$

其中 $\mathbf{t}'$ 为 $\mathbf{t}$ 的转置矩阵.

今证 $f(\mathbf{t})$ 为 n 元特征函数. 实际上，设 $\mathbf{\Lambda}$ 正定，由概率知结论正确，而且它所对应的分布 F 有密度函数为

$$\frac{|a_{jk}|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}(y_j-m_j)(y_k-m_k)\right],$$

这里 $[a_{jk}]=\mathbf{\Lambda}^{-1}$ 是 $\mathbf{\Lambda}$ 的逆矩阵. 如果 $\mathbf{\Lambda}$ 不是正定的，对任意正整数 s, 令 $\mathbf{\Lambda}_s=\mathbf{\Lambda}+\frac{1}{s}\mathbf{I}$, ($\mathbf{I}$ 为 n 阶幺矩阵，其元为 δ_{ij}), 则由 (1)

$$\eta\mathbf{\Lambda}_s\eta'=\eta\mathbf{\Lambda}\eta'+\frac{1}{s}\eta\eta'\geqslant\frac{1}{s}\eta\eta',$$

故 $\mathbf{\Lambda}_s$ 为正定的；如上所述

$$f_s(\mathbf{t})=\exp\left\{i\mathbf{m}\mathbf{t}'-\frac{1}{2}\mathbf{t}\mathbf{\Lambda}_s\mathbf{t}'\right\}$$

---

[1] 详细的叙述与证明可见参考书目中 [15].

是 n 元特征函数. 因为

$$f_s(\mathbf{t})=f(\mathbf{t})\exp\left\{-\frac{1}{2s}\mathbf{t}\mathbf{t}'\right\},$$

所以 $f_s(\mathbf{t})$ 在 $\mathbf{t}$ 的任意有界集上一致收敛于 $f(\mathbf{t})$, 从而得证 $f(\mathbf{t})$ 也是 n 元特征函数.

称 $f(\mathbf{t})$ 所决定的分布为 n**维正态分布**, 特别, 当 $\mathbf{\Lambda}$ 不是正定, 即 $\mathbf{\Lambda}$ 的行列式 $|\mathbf{\Lambda}|=0$ 时, 称此正态分布为 **退化的**.

由于 n 维正态分布由 $\mathbf{m}$ 及 $\mathbf{\Lambda}$ 决定, 故记它为 $N(\mathbf{m},\mathbf{\Lambda})$; 如 $n=1$, 则化为 $N(m,\sigma^2)$, 通常简写后者为 $N(m,\sigma)$, 我们以后也采用这个简单的记号. 如果 $\sigma=0$ 分布退化而质量集中在一个点 m 上. 注意 σ 总是非负数.

(二) 称随机变量集 $X(\omega)=(x(\omega))$ 为 **正态系**, 如果它的任意有穷多个元 $x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega)$ 的联合分布是 n 维正态的. 由此立知: $X(\omega)$ 的任一子集是正态系; 反之, 如某随机变量集的任一有穷子集是正态系, 那么它本身也是正态系.

定理 1 为使随机变量集 $X(\omega)$ 是正态系, 充分与必要条件是 $X(\omega)$ 中任意有穷多个元的线性组合的分布是一维正态的.

证 根据上述, 不失一般性, 我们只要对有穷集 $X(\omega)$ 作证明. 设

$$X(\omega)=\{x_1(\omega),x_2(\omega),\cdots,x_n(\omega)\}.$$

充分性: 由假定, 对任意实数 $a_j(j=1,\cdots,n)$, 随机变量

$$Y(\omega)=\sum_{j=1}^{n}a_jx_j(\omega)$$

有一维正态分布. 由此推出, 每个 x_j 都是正态的. 由于正态分布有各级矩, 故

$$m_j=Ex_j,\quad \lambda_{jj}=E(x_j-m_j)^2 \tag{4}$$

有穷; 再由 $E|x_j-m_j||x_k-m_k|\leqslant\sqrt{\lambda_{jj}\lambda_{kk}}<\infty$ 知

$$\lambda_{jk}=E(x_j-m_j)(x_k-m_k) \tag{5}$$

也有穷. 由此立得

$$EY=\sum_{j=1}^{n}m_ja_j,\quad D^2Y=\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_{jk}a_ja_k,$$

而 Y 有分布为 $N\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}m_ja_j,\Big[\sum\limits_{j,k=1}^{n}\lambda_{jk}a_ja_k\Big]^{1/2}\Big)$, 有特征函数为

$$E(e^{itY})=\exp\left\{it\sum_{j=1}^{n}m_ja_j-\frac{t^2}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_{jk}a_ja_k\right\}.$$

令 $t=1$, 得

$$E\left(e^{i\sum\limits_{j=1}^{n}a_jx_j}\right)=\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}m_ja_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_{jk}a_ja_k\right\}. \tag{6}$$

由于 $a_j \in R_1$ 可任意，上式表示 $x_1,\cdots,x_n$ 的分布是 n 维正态的.

必要性：设 $x_1,\cdots,x_n$ 的联合分布为 $N(\mathbf{m},\mathbf{\Lambda})$, $\mathbf{m}=(m_1,\cdots,m_n)$, $\mathbf{\Lambda}=(\lambda_{jk})$, 则对任意实数 $a_1,\cdots,a_n$, 有

$$E\left(e^{i\sum\limits_{j=1}^{n}a_jx_j}\right)=\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}m_ja_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_{jk}a_ja_k\right\}.$$

考虑 $x_1,\cdots,x_n$ 的任一线性组合

$$Z=a_0+\sum_{j=1}^{n}a_jx_j,$$

得

$$\begin{aligned}E(e^{itZ})&=E\left(e^{ia_0t}e^{i\sum\limits_{j=1}^{n}a_jtx_j}\right)=e^{ia_0t}E\left(e^{i\sum\limits_{j=1}^{n}(a_jt)x_j}\right)\\&=e^{ia_0t}\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}m_j(a_jt)-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_{jk}(a_jt)(a_kt)\right\}\\&=\exp\left\{i\left(a_0+\sum_{j=1}^{n}a_jm_j\right)t-\frac{t^2}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_{jk}a_ja_k\right\},\end{aligned}$$

这表示 Z 的分布为 $N\left(a_0+\sum\limits_{j=1}^{n}a_jm_j,\sqrt{\sum\limits_{j,k=1}^{n}\lambda_{jk}a_ja_k}\right)$. □

至于 (2) 中常数 m_j,λ_{jk} 的概率意义则有

系 1 设 $X(\omega)=(x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega))$ 的特征函数为 (2), 则

$$m_j=Ex_j,\quad \lambda_{jk}=E(x_j-m_j)(x_k-m_k). \tag{7}$$

证 根据定理 1 知 $x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega)$ 的任一线性组合有一维正态分布，仿照定理 1 充分性部分的证明 (参看 (4)-(6)), 知存在

$$\widetilde{m}_j=Ex_j,\quad \widetilde{\lambda}_{jk}=E(x_j-m_j)(x_k-m_k),$$

而且 $X(\omega)$ 的特征函数是

$$\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}\widetilde{m}_jt_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\widetilde{\lambda}_{jk}t_jt_k\right\}.$$

由假定，它应等于 (2) 中右方项，由此并利用 t_j 的任意性及 $\lambda_{jk}=\lambda_{kj}$, $\widetilde{\lambda}_{jk}=\widetilde{\lambda}_{kj}$, 即得

$$m_j=\widetilde{m}_j,\quad \lambda_{jk}=\widetilde{\lambda}_{jk}\ .\ \square$$

正态分布随机变量具有重要特性：独立性与不相关性是等价的. 精确些说，就是

引理 1 设 $X(\omega)=(x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega))$ 的分布是 n 维正态的，则不相关性即

$$\lambda_{jk}=0\ \ (j\neq k)$$

是 $x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega)$ 相互独立的充分与必要条件.

证 如不相关，则 (2) 化为

$$f(\mathbf{t})=\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}m_jt_j-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jj}t_j^2\right\}=\prod_{j=1}^{n}\exp\left\{im_jt_j-\frac{1}{2}\lambda_{jj}t_j^2\right\}.$$

既然 $\exp\left\{im_jt_j-\frac{1}{2}\lambda_{jj}t_j^2\right\}$ 是一维正态分布 $N(m_j,\sqrt{\lambda_{jj}})$ 的特征函数, 故由上式即知 $x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega)$ 相互独立，而且 $x_j(\omega)$ 的分布是 $N(m_j,\sqrt{\lambda_{jj}})$(如 $\lambda_{jj}=0$, 则退化为集中在 m_j 上的单点分布). 这便证明了充分性. 至于必要性则是一般随机变量所公共具有的:

$$\lambda_{jk}=E(x_j-m_j)(x_k-m_k)=E(x_j-m_j)\cdot E(x_k-m_k)=0.\ \square$$

引理 2 设一维正态分布列 $F_n=N(m_n,\sqrt{d_n})$ 弱收敛于一维分布 F, 则极限

$$m=\lim_{n\to\infty}m_n,\quad d=\lim_{n\to\infty}d_n \tag{8}$$

存在，而且 $F=N(m,\sqrt{d})$.

证 设 F_n,F 的特征函数分别为 f_n 及 f. 由假定

$$f(t)=\lim_{n\to\infty}f_n(t)=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{im_nt-\frac{d_n}{2}t^2\right\}, \tag{9}$$

因此，如能证明 (8) 中二极限存在，则引理得以证明.

由 (9)

$$\exp\left(-\frac{d_n}{2}t^2\right)=|f_n(t)|\to|f(t)|,$$

因 $f(t)$ 连续而且 $f(0)=1$, 故必存在 $t_0\neq 0$ 使 $f(t_0)\neq 0$, 从而 $-\frac{1}{2}d_nt_o^2\to\log|f(t_0)|\neq-\infty$, 故得证极限 $d=\lim\limits_{n\to\infty}d_n$ 存在.

由上一段证明及 $F_n\xrightarrow{W}F$ 知，关于 $t\in[0,1]$ 一致地有 $e^{\frac{d_n}{2}t^2}\to e^{\frac{d}{2}t^2}$, $f_n(t)\to f(t)$, 因而

$$e^{im_nt}\equiv f_n(t)e^{\frac{d_n}{2}t^2}\to f(t)e^{\frac{d}{2}t^2}, \tag{10}$$

故得

$$|f(t)e^{\frac{d}{2}t^2}|=\lim_{n\to\infty}|e^{im_nt}|=1.$$

今取积分路线

$$C_n:\ \xi=e^{im_nt},\qquad 0\leqslant t\leqslant 1;$$
$$C:\quad \xi=f(t)e^{\frac{d}{2}t^2},\ 0\leqslant t\leqslant 1,$$

由 (10), $C_n\to C$,(即指表示 C_n 的函数 e^{im_nt} 在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上一致收敛于表示 C 的函数 $f(t)e^{\frac{d}{2}t^2}$). 既然在积分路上, $|\xi|=1\neq 0$, 故

$$im_n=\int_{C_n}\frac{d\xi}{\xi}\to\int_C\frac{d\xi}{\xi}.$$

即极限 $m = \lim_{n\to\infty} m_n$ 存在. □

由定理 1 及引理 2 知正态系 X 具有下列性质.

定理 2 设 $X = (x(\omega))$ 是正态系，则

A. X 所张成的线性集 $L(X)$(即由 X 中有穷多个元的线性组合全体构成的集) 是正态系；

B. 在依概率收敛意义下， X 的闭包 $\overline{X}$(即指 $\overline{X}$ 中任一元可表为 X 中某一列相同或不相同的元在依概率收敛下的极限) 是正态系；故 $\overline{L(X)}$ 也是.

证 A. $L(X)$ 中有穷多个元的线性组合可表为 X 中有穷多个元的线性组合，故两次用定理 1 即得.

B. 任取有穷多个元 $x_i \in \overline{X}$, $i = 1, \cdots, k$. 令

$$x_i = P\lim_{n\to\infty} x_{in}, \quad x_{in} \in X,$$

则 $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = P\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i x_{in}\right)$, 因而 $\sum_{i=1}^{k} a_i x_{in}$ 的分布 F_n 弱收敛于 $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i$ 的分布 F. 但 $\sum_{i=1}^{k} a_i x_{in}$ 有正态分布，故由引理 2, 知 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, 因而 $a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ 也有正态分布，利用定理 1 即得所欲证. □

(三) 考虑复随机过程 $X(\omega) = \{x_t(\omega), t \in T\}$, 其中每 $x_t(\omega)$ 是复值随机变量. 设二级矩 $E|x_t|^2 < \infty, t \in T$, 因之也存在

$$m(t) = Ex_t(\omega) \tag{11}$$

及

$$\lambda(s,t) = E(x_s - Ex_s)\overline{(x_t - Ex_t)} = Ex_s\overline{x}_t - m(s)\overline{m(t)}. \tag{12}$$

引理 3 函数 $\lambda(s,t)$ $(s, t \in T)$ 具有下列性质

(a) $\lambda(s,t) = \overline{\lambda(t,s)}$; (13)

(b) 非负定性：对任意 $t_j \in T$, 任意复数 a_j, $j = 1, \cdots, n$, 有

$$\sum_{j,k=1}^{n} \lambda(t_j, t_k) a_j \overline{a}_k \geqslant 0. \tag{14}$$

证 (a) 由 (12) 直接推出. (14) 左方值等于

$$\begin{aligned}
&E\left[\sum_{j,k=1}^{n} (x(t_j) - m(t_j))\overline{(x(t_k) - m(t_k))} a_j \overline{a_k}\right] \\
&= E\left[\left\{\sum_{j=1}^{n}(x(t_j) - m(t_j))a_j\right\}\left\{\sum_{k=1}^{n}\overline{(x(t_k) - m(t_k))a_k}\right\}\right] \\
&= E\left|\sum_{j=1}^{n}(x(t_j) - m(t_j))a_j\right|^2 \geqslant 0. \ \square
\end{aligned}$$

称复过程 $x(t,\omega) = x_1(t,\omega) + ix_2(t,\omega)$ 为 **正态的** [1]，如随机变量集 $\{x_1(t,\omega), x_2(t,\omega), t \in T\}$ 是正态系.

[1] 以后 a_1, a_2 表复数 $a = a_1 + ia_2$ 的实、虚部分.

定理 3 设 T 为任一参数集，$m(t)(t\in T)$ 为任意复值函数，$\lambda(s,t)$ $(s,t\in T)$ 为任意满足条件 (a),(b) 的函数. 于是必存在正态过程 $X=\{x_t(\omega),t\in T\}$, 使 (11),(12) 成立；而且如 $m(t)$, $\lambda(s,t)$ 是实值函数，则可取 X 的实正态过程.

证 先设 $m(t),\lambda(s,t)$ 为实值函数，使 (a),(b) 满足. 对任意 n 个值，$t_j\in T, j=1,\cdots,n$, 造 n 维正态分布 $N(\mathbf{m},\mathbf{\Lambda})$, 这里 $\mathbf{m}=(m(t_1),\cdots,m(t_n))$ 而 $\mathbf{\Lambda}=(\lambda(t_j,t_k))$ 是 n 级矩阵；换言之，这分布的特征函数是

$$\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}m(t_j)a_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\lambda(t_j,t_k)a_ja_k\right\}, \tag{15}$$

在 (15) 中令 $a_j=0,\ n^0<j\leqslant n$, 则 (15) 化为 n^0 维正态分布 $N(\mathbf{m}^0,\mathbf{\Lambda}^0)$ 的特征函数，这里 $\mathbf{m}^0=(m(t_1),\cdots,m(t_{n^0}))$ 而 $\mathbf{\Lambda}^0$ 是 n^0 级矩阵 $(\lambda(t_j,t_k))$, $j,k\leqslant n^0$. 因此，由 (15) 决定的有穷维分布族是相容的. 由随机过程的存在定理，可找到实值正态过程 $\{x_t(\omega),t\in T\}$, 满足条件 (a),(b).

现在考虑取复值的 $m(t)$ 与 $\lambda(s,t)$. 如果能找到复过程 $x(t,\omega)=x_1(t,\omega)+ix_2(t,\omega)$, 满足条件

$$\left.\begin{aligned}&Ex_1(t)=m_1(t),\quad Ex_2(t)=m_2(t);\\&Ex_1(s)x_1(t)-Ex_1(s)\cdot Ex_1(t)=\frac{1}{2}\lambda_1(s,t);\\&Ex_2(s)x_2(t)-Ex_2(s)\cdot Ex_2(t)=\frac{1}{2}\lambda_1(s,t);\\&Ex_1(s)x_2(t)-Ex_1(s)\cdot Ex_2(t)=-\frac{1}{2}\lambda_2(s,t);\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

则 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 满足 (11),(12). 实际上，由 (a)

$$\lambda_1(s,t)=\lambda_1(t,s),\quad \lambda_2(s,t)=-\lambda_2(t,s). \tag{17}$$

然后以 (16) 代入 (11),(12) 的右方，所得即分别为 (11),(12) 的左方值.

因此，只要证明的确存在满足 (16) 的复正态过程 $\{x(t,\omega),t\in T\}$. 为证此，我们利用上面对实值情况已证明的结果，只要证具有性质 (16) 的 $\{x_1(t,\omega),x_2(t,\omega),t\in T\}$ 中，任意有穷个的协方差矩阵是对称的，非负定的. 不失一般性[1]，只要对 n 对随机变量 $x_1(t_j),x_2(t_j)$ $(j=1,\cdots,n)$ 作证明. 这样一来，剩下的问题只是证明 $2n$ 级矩阵

$$2(\rho_{jk})=\begin{pmatrix}\lambda_1(t_1,t_1)&\cdots&\lambda_1(t_1,t_n)&-\lambda_2(t_1,t_1)&\cdots&-\lambda_2(t_1,t_n)\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\lambda_1(t_n,t_1)&\cdots&\lambda_1(t_n,t_n)&-\lambda_2(t_n,t_1)&\cdots&-\lambda_2(t_n,t_n)\\-\lambda_2(t_1,t_1)&\cdots&-\lambda_2(t_n,t_1)&\lambda_1(t_1,t_1)&\cdots&\lambda_1(t_1,t_n)\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-\lambda_2(t_1,t_n)&\cdots&-\lambda_2(t_n,t_n)&\lambda_1(t_n,t_1)&\cdots&\lambda_1(t_n,t_n)\end{pmatrix}$$

[1]对称非负定矩阵的主子式也是对称非负定的. 因此，例如给定的是 $x_1(t_1);x_2(t_2),x_2(t_3)$, 则可把它们配成双而考虑 $x_1(t_1),x_1(t_2),x_1(t_3);x_2(t_1),x_2(t_2),x_2(t_3)$.

是对称的，非负定的. 对称性由 (17) 易见；为证非负定性，只需证对任意实数 [1] $a_1,\cdots,a_{2n}$, 和数

$$\sum_{j,k=1}^{2n}\rho_{jk}a_ja_k=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_1(t_j,t_k)(a_ja_k+a_{n+j}a_{n+k})$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_2(t_j,t_k)(a_{n+j}a_k-a_ja_{n+k}) \tag{18}$$

非负. 然而根据假定 (14), 有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\lambda(t_j,t_k)(a_j-ia_{n+j})(a_k+ia_{n+k})\\&=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\lambda(t_j,t_k)(a_ja_k+a_{n+j}a_{n+k})-\frac{i}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\lambda(t_j,t_k)(a_{n+j}a_k-a_ja_{n+k}),\end{aligned}$$

以 $\lambda(t_j,t_k)=\lambda_1(t_j,t_k)+i\lambda_2(t_j,t_k)$ 代入上式，把最后一方分解为虚实二部分，因为最后一方是实值 ($\geqslant 0$), 故虚部应为 0, 而实部则恰好等于 (18) 式中右方的值. 这样便证明了非负定性. □

注 1 在定理 3 的证明中，根据 (16) 所造出的复值过程 $x(t)=x_1(t)+ix_2(t)$ $(t\in T)$ 还满足

$$Ex(s)x(t)=m(s)m(t). \tag{19}$$

实际上，利用 (16) 得上式左方：

$$\begin{aligned}&Ex_1(s)x_1(t)+iEx_2(s)x_1(t)+iEx_1(s)x_2(t)-Ex_2(s)x_2(t)\\&=m_1(s)m_1(t)+\frac{1}{2}\lambda_1(s,t)+im_1(t)m_2(s)-\frac{i}{2}\lambda_2(t,s)\\&\quad+im_1(s)m_2(t)-\frac{i}{2}\lambda_2(s,t)-m_2(s)m_2(t)-\frac{1}{2}\lambda_1(s,t),\end{aligned}$$

由 (17), 上式右方化为

$$[m_1(s)+im_2(s)][m_1(t)+im_2(t)]=m(s)m(t).$$

注 2 试问满足 (11),(12) 的正态过程是否唯一？这问题的准确提法是：满足 (11),(12) 的相容的有穷维正态分布族是否唯一？在实值情况答案肯定，因为 n 维正态分布 $N(\mathbf{m},\mathbf{\Lambda})$

[1] 实际上，设 $a_j=b_j+ic_j$ 为复数，则

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{2n}\rho_{jk}a_j\overline{a}_k&=\sum_{j,k=1}^{2n}\rho_{jk}(b_j+ic_j)(b_k-ic_k)\\&=\sum_{j,k=1}^{2n}\rho_{jk}[b_jb_k+c_jc_k+ib_kc_j-ib_jc_k),\end{aligned}$$

由于 $\rho_{jk}=\rho_{kj}$, 故虚部为 0, 而实部则由上所证为非负.

完全由 $\mathbf{m}$ 及 $\mathbf{\Lambda}$ 决定. 在复值情形, 可以证明, 满足 (11),(12) 及 (19) 三条件的正态过程唯一. 实际上, 由此三条件得二方程

$$Ex(s)\overline{x(t)} = \lambda(s,t) + m(s)\overline{m(t)}, \quad Ex(s)x(t) = m(s)m(t).$$

以 $x = x_1 + ix_2, \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2, m = m_1 + im_2$ (自变量省去) 代入上二式中, 比较虚实部分得四个方程. 由此四方程可唯一确定 $Ex_1(s)x_1(t), Ex_1(s)x_2(t), Ex_1(t)x_2(s)$ 与 $Ex_2(s)x_2(t)$. 此外, (11) 还确定了 $Ex_1(t) = m_1(t), Ex_2(t) = m_2(t)$. 这样一来, 正态系 $\{x_1(t,\omega), x_2(t,\omega), t \in T\}$ 的联合分布便唯一确定.

根据定理 3, 可见当研究任意具有有穷二级矩过程 $\{z(t,\omega), t \in T\}$, $E|z(t)|^2 < \infty$ 的均方性质 (即可用一二级矩来表达的性质) 时, 不妨假定该过程为正态过程.

实际上, 令

$$m(t) = Ez(t).\ \lambda(s,t) = E(z(s) - m(s))\overline{(z(t) - m(t))}.$$

由引理 3, 此 $\lambda(s,t)$ 满足条件 (a),(b). 根据定理 3, 可找到正态过程 $\{x(t,\omega), t \in T\}$, 使

$$m(t) = Ex(t),\ \lambda(s,t) = E(x(s) - m(s))\overline{(x(t) - m(t))}.$$

从而二过程有相同的均方性质, 而且如 $\{z(t,\omega), t \in T\}$ 是实过程, 则 $\{x(t,\omega), t \in T\}$ 也可选为实正态过程. 不过要注意的是, 一般地二过程所在的概率空间是不同的.

实值正态过程的一个特点是: 由不相关性

$$Ex(s)x(t) = Ex(s) \cdot Ex(t) \quad (s,t \in T),$$

可得过程的独立性. 因此如原来的实值过程 $\{z(t,\omega), t \in T\}$ 满足 $Ez(s)z(t) = Ez(s) \cdot Ez(t)$, 那么上述实值正态过程 $\{x(t,\omega), t \in T\}$ 甚至可取为独立的.

称**随机变量集** $\{x(\omega)\}$ **为独立的**, 如其中任意有穷多个元是独立的; 称**复过程** $\{x(t,\omega), t \in T\}$ **是独立的**, 如二维随机矢量族 $\{x_1(t,\omega), x_2(t,\omega)\}$, $t \in T$, 是独立的.

继续讨论刚才的问题. 如果原来的复值过程 $\{z(t,\omega), t \in T\}$ 满足 $Ez(s)\overline{z(t)} = Ez(s)E\overline{z(t)}$, 试问如上所造的满足 (19) 的复正态过程 $\{x(t,\omega), t \in T\}$ 是否也独立呢? 答案仍然肯定. 因为由假定及 (19), 同时有

$$Ex(s)\overline{x(t)} = Ex(s)E\overline{x(t)}, \quad Ex(s)x(t) = Ex(s)Ex(t).$$

由此二式得

$$Ex_1(s)x_1(t) = Ex_1(s)Ex_1(t); \quad Ex_1(s)x_2(t) = Ex_1(s)Ex_2(t);$$
$$Ex_2(s)x_2(t) = Ex_2(s)Ex_2(t); \quad Ex_2(s)x_1(t) = Ex_2(s)Ex_1(t).$$

因此, 正态系 $\{x_1(t,\omega), x_2(t,\omega), t \in T\}$ 是两两不相关的, 从而是独立的. 故过程 $\{x(t,\omega), t \in T\}$ 也是独立的.

§1.3 条件概率与条件数学期望

(一) 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为概率空间， $\Omega=(\omega)$, $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数， $y(\omega)$ 是某随机变量, $E|y|<\infty$.

定义 1 具有下列二性质的随机变量 $E(y|\mathcal{B})$ 称为 $y(\omega)$**关于** $\mathcal{B}$ **的条件数学期望**[1] (简称条件期望), 如果

1.1. $E(y|\mathcal{B})$ 是 $\mathcal{B}$ 可测函数；

1.2. 对任意 $A\in\mathcal{B}$, 有

$$\int_A E(y|\mathcal{B})P(d\omega)=\int_A yP(d\omega). \tag{1}$$

定义 2 设 $C\in\mathcal{F}$ 为任一事件，则它的示性函数，即

$$\chi_C(\omega)=\begin{cases}1, & \text{如}\omega\in C,\\ 0, & \text{如}\omega\overline{\in}C,\end{cases}$$

关于 $\mathcal{B}$ 的条件期望称为 C**关于** $\mathcal{B}$ **的条件概率**, 记为 $P(C|\mathcal{B})$.

换言之， $P(C|\mathcal{B})$ 是满足以下二条件的随机变量：

1.1′. $P(C|\mathcal{B})$ 为 $\mathcal{B}$ 可测函数；

1.2′. 对任意 $A\in\mathcal{B}$, 有

$$\int_A P(C|\mathcal{B})P(d\omega)=P(AC). \tag{2}$$

由于条件概率是条件期望的特殊情况，故只要讨论后者就够了.

为使定义合理，必须保证满足条件 1.1 及 1.2 的随机变量存在. 为此，注意 (1) 的右方值 $\int_A yP(d\omega)$ 是 $\mathcal{B}$ 上的广义测度，而且 $\mathcal{B}$ 在上，它关于测度 P 是绝对连续的，即

$$\text{当}P(A)=0\text{ 时，}\int_A yP(d\omega)=0.$$

因此，由[2] Radon-Nikodym 定理可见：满足 1.1, 1.2 的随机变量 $E(y|\mathcal{B})$ 的确存在，而且一般地有许多个；但如有二随机变量 $E_1(y|\mathcal{B})$ 及 $E_2(y|\mathcal{B})$ 都满足 1.1 与 1.2, 那么

$$P(\omega:E_1(y|\mathcal{B})=E_2(y|\mathcal{B}))=1. \tag{3}$$

既然 y 关于 $\mathcal{B}$ 的条件期望一般不唯一，我们以后所说的条件期望 $E(y|\mathcal{B})$, 只是指它们之中的一个代表.

例 1 设 $\mathcal{B}=(\phi,\Omega)$. 为使 $E(y|\mathcal{B})$ 满足 1.1, 充分与必要条件是它为某一常数, 即 $E(y|\mathcal{B})=c$. 为使 1.2 成立，必须也只须 $c=Ey$. 实际上，以 c 代入 (1) 中的 $E(y|\mathcal{B})$, 并取 $A=\Omega$, 即得 $c=Ey$. 由于 $\mathcal{B}$ 只含 ϕ,Ω 二元，故此 c 使 (1) 对任意 $A\in\mathcal{B}$ 成立.

特别，如 $y=\chi_C$, 则 $E(\chi_C|\mathcal{B})=P(C)$.

---

[1]既然 $E(y|\mathcal{B})$ 是一随机变量，明确些应把 $E(y|\mathcal{B})$ 写成 $E(y|\mathcal{B})(\omega)$, 以表明它是 ω 的函数，这里及以后都略去了 ω. 关于下面的 $P(C|\mathcal{B})$ 也如此.

[2]参看附篇 (五).

例 2 设 $\mathcal{B}=(\phi,D,\overline{D},\Omega)$, $D\in\mathcal{F}$, $0<P(D)<1$, $\overline{D}=\Omega-D$. 试证此时

$$E(y|\mathcal{B})=\begin{cases}\dfrac{1}{P(D)}\displaystyle\int_D y(\omega)P(d\omega)=E(y|D), & \text{如}\omega\in D,\\ \dfrac{1}{P(\overline{D})}\displaystyle\int_{\overline{D}} y(\omega)P(d\omega)=E(y|\overline{D}), & \text{如}\omega\in \overline{D},\end{cases}\tag{4}$$

$$P(C|\mathcal{B})=\begin{cases}\dfrac{1}{P(D)}P(CD)=P(C|D), & \text{如}\omega\in D,\\ \dfrac{1}{P(\overline{D})}P(C\overline{D})=P(C|\overline{D}), & \text{如}\omega\in \overline{D},\end{cases}\tag{5}$$

而且 $E(y|\mathcal{B})$, $P(C|\mathcal{B})$ 是唯一的.

实际上，为使 1.1 成立， $E(y|\mathcal{B})$ 必须也只须呈下形：

$$E(y|\mathcal{B})=\begin{cases}c_1, & \text{如}\omega\in D,\\ c_2, & \text{如}\omega\in\overline{D}\end{cases}\quad(c_1,c_2\text{常数}).$$

以之代入 (1) 并令 $A=D$, 即得

$$c_1P(D)=\int_D yP(d\omega),$$

或 $c_1=\frac{1}{P(D)}\int_D yP(d\omega)=E(y|D)$; 同样证明 $c_2=E(y|\overline{D})$, 而且这样决定的 c_1,c_2 使 1.2 对一切 $A\in\mathcal{B}$ 成立. 因此，用 (4) 定义的 $E(y|\mathcal{B})$ 是 y 关于 $\mathcal{B}$ 的条件期望的一个代表. 今设 $\widetilde{E}(y|\mathcal{B})$ 是另一代表. 由上所述知

$$\widetilde{E}(y|\mathcal{B})=\begin{cases}\widetilde{c}_1, & \text{如}\omega\in D,\\ \widetilde{c}_2, & \text{如}\omega\in\overline{D}\end{cases}\quad(\widetilde{c}_1,\widetilde{c}_2\text{常数}).$$

如说 $\widetilde{c}_1\neq c_1$, 则 $P(E(y|\mathcal{B})\neq\widetilde{E}(y|\mathcal{B}))\geqslant P(D)>0$, 这与 (3) 矛盾，故 $\widetilde{c}_1=c_1$, 同样 $\widetilde{c}_2=c_2$.

在 (4) 中令 $y(\omega)=\chi_C(\omega)$, 即得 (5).

例 3 设 $\mathcal{B}=\mathcal{F}$. 易见 y 关于 $\mathcal{B}$ 的条件期望的一个代表就是 y, 即 $E(y|\mathcal{B})=y(\omega)$ (a.s.). 令 $y=\chi_C$, 则 $P(C|\mathcal{B})=\chi_C(\omega)$ (a.s.).

(二) 试研究 $E(y|\mathcal{B})$(特别地， $P(C|\mathcal{B})$) 的性质. 由于 $E(y|\mathcal{B})$ 是用可测性 1.1 和积分性质 1.2 定义的，容易想到关于通常的勒贝格积分的性质对 $E(y|\mathcal{B})$ 也成立.

以下的等式，不等式或极限关系式都是以概率 1 成立的，又 $y(\omega),y_i(\omega)$ 都是随机变量，而且 $E|y|<\infty$, $E|y_i|<\infty$. 以后不再一一声明上述条件.

A. 对任意 $c_1\in R_1,c_2\in R_1$, 有

$$E(c_1y_1+c_2y_2|\mathcal{B})=c_1E(y_1|\mathcal{B})+c_2E(y_2|\mathcal{B}).$$

证 我们先来说明证明这类关系式的一般方法. 上式表示 $c_1E(y_1|\mathcal{B})+c_2E(y_2|\mathcal{B})$ 是 $c_1y_1+c_2y_2$ 关于 $\mathcal{B}$ 的条件期望的一个代表，由定义只要证明： $c_1E(y_1|\mathcal{B})+c_2E(y_2|\mathcal{B})$ 是关于 $\mathcal{B}$ 可测的随机变量；而且对任意 $A\in\mathcal{B}$, 有

$$\int_A[c_1E(y_1|\mathcal{B})+c_2E(y_2|\mathcal{B})]P(d\omega)=\int_A(c_1y_1+c_2y_2)P(d\omega).\tag{6}$$

这里，由 $E(y_i|\mathcal{B})$ 的定义，它们都是 $\mathcal{B}$ 可测的，故 $c_1E(y_1|\mathcal{B})+c_2E(y_2|\mathcal{B})$ 也是 $\mathcal{B}$ 可测；又因对 $A\in\mathcal{B}$, 有

$$\int_A E(y_i|\mathcal{B})P(d\omega)=\int_A y_iP(d\omega)\quad(i=1,2),$$

以 c_i 乘上式两边后对 $i=1,2$ 求和即得 (6). □

B. 如 $y\geqslant 0$, 则 $E(y|\,\mathcal{B})\geqslant 0$.

证 令 $A=(\omega:E(y|\,\mathcal{B})<0)$, $A_m=(\omega:E(y|\,\mathcal{B})\leqslant -\frac{1}{m})$. 则 $A=\bigcup\limits_m A_m$,

$$-\frac{1}{m}P(A_m)\geqslant\int_{A_m}E(y|\mathcal{B})P(d\omega)=\int_{A_m}yP(d\omega)\geqslant 0,$$

故 $P(A_m)=0$, $P(A)\leqslant\sum\limits_m P(A_m)=0$. □

C. $|E(y|\,\mathcal{B})|\leqslant E(|y|\,|\,\mathcal{B})$.

证 由 B, 有 $E(|y|-y|\,\mathcal{B})\geqslant 0$, 由此及 A 得 $E(y|\,\mathcal{B})\leqslant E(|y|\,|\,\mathcal{B})$,

$$-E(y|\,\mathcal{B})=E(-y|\,\mathcal{B})\leqslant E(|y|\,|\,\mathcal{B}).\ \square$$

D[1]. 设 $0\leqslant y_n\uparrow y$, $E|y|<\infty$, 则

$$E(y_n|\mathcal{B})\uparrow E(y|\mathcal{B});$$

证 由 B, $0\leqslant E(y_1|\mathcal{B})\leqslant E(y_2|\mathcal{B})\leqslant\cdots$ (a.s.), 故对几乎一切 ω 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}E(y_n|\mathcal{B})$; 在极限不存在的 ω 上补定义为 0, 经过这样补定义后的极限是 $\mathcal{B}$ 可测的. 为证它等于 $E(y|\mathcal{B})$, 只要注意，用积分单调收敛定理两次，对任意 $A\in\mathcal{B}$, 有

$$\begin{aligned}\int_A\lim_{n\to\infty}E(y_n|\mathcal{B})P(d\omega)&=\lim_{n\to\infty}\int_A E(y_n|\mathcal{B})P(d\omega)\\&=\lim_{n\to\infty}\int_A y_nP(d\omega)=\int_A\lim_{n\to\infty}y_nP(d\omega)=\int_A yP(d\omega).\ \square\end{aligned}$$

E. 设 $y_n\to y$, $|y_n|\leqslant x$, $Ex<\infty$, 则

$$E(y_n|\mathcal{B})\to E(y|\mathcal{B}).$$

证 定义

$$z_n^+=\sup_{k\geqslant 0}y_{n+k},\quad z_n^-=\inf_{k\geqslant 0}y_{n+k}.$$

显然

$$0\leqslant x-z_n^+\uparrow x-y,\quad 0\leqslant x+z_n^-\uparrow x+y.$$

故由 D

$$E(x-z_n^+|\mathcal{B})\uparrow E(x-y|\mathcal{B});$$
$$E(x+z_n^-|\mathcal{B})\uparrow E(x+y|\mathcal{B}).$$

---

[1]数列 $a_n\uparrow a$ 表 $a_n\leqslant a_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$; 类似定义 $a_n\downarrow a$. 集列 $A_n\uparrow A$ 表 $A_n\subset A_{n+1}$, $A=\bigcup\limits_n A_n$; 类似地, $A_n\downarrow A$ 表 $A_n\supset A_{n+1}$, $A=\bigcap\limits_n A_n$.

从而

$$E(z_n^+|\mathcal{B}) \downarrow E(y|\mathcal{B}), \quad E(z_n^-|\mathcal{B}) \uparrow E(y|\mathcal{B}).$$

最后只要注意，由于 B

$$E(z_n^-|\mathcal{B}) \leqslant E(y_n|\mathcal{B}) \leqslant E(z_n^+|\mathcal{B}). \ \square$$

F. 如 $z(\omega)$ 对 $\mathcal{B}$ 可测， $E|yz| < \infty, E|y| < \infty$, 则

$$E(yz|\mathcal{B}) = zE(y|\mathcal{B}). \tag{7}$$

证 令 $\mathcal{L} = \{z(\omega) : E|yz| < \infty\}$, $L = \{z(\omega)$: 使 (7) 成立 $\}$ 由 A,D 知 L 是一 $\mathcal{L}$- 系. 但当 $z = \chi_M$ $(M \in \mathcal{B})$ 时

$$\begin{aligned}\int_A zyP(d\omega) &= \int_A \chi_M yP(d\omega) = \int_{AM} yP(d\omega) = \int_{AM} E(y|\mathcal{B})P(d\omega) \\ &= \int_A \chi_M E(y|\mathcal{B})P(d\omega) = \int_A zE(y|\mathcal{B})P(d\omega) \ (A \in \mathcal{B}).\end{aligned}$$

既然 $zE(y|\mathcal{B})$ 明显地是 $\mathcal{B}$ 可测的，故

$$\chi_M \in L \ (M \in \mathcal{B}).$$

根据附篇引理 4, 即得证. $\square$

G. 如 $y(\omega)$ 为 $\mathcal{B}$ 可测，则 $E(y|\mathcal{B}) = y$.

证 因此时 y 具备 1.1 及 1.2 中对 $E(y|\mathcal{B})$ 所需的性质. $\square$

H. 如 $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{F}$, 则

$$E[E(y|\mathcal{B}_2)|\mathcal{B}_1] = E(y|\mathcal{B}_1) = E[E(y|\mathcal{B}_1)|\mathcal{B}_2].$$

证 为证前一等式，只要注意如 $A \in \mathcal{B}_1$, 则 $A \in \mathcal{B}_2$, 故

$$\int_A E(y|\mathcal{B}_1)P(d\omega) = \int_A yP(d\omega) = \int_A E(y|\mathcal{B}_2)P(d\omega).$$

为证后一等式，注意 $E(y|\mathcal{B}_1)$ 为 $\mathcal{B}_2$ 可测，然后应用 G 即可. $\square$

条件数学期望还有一些重要的性质，见 §9.2 定理 3, §9.3 定理 1 及 §1.4 引理 2.

取随机变量为可测集的示性函数，由条件数学期望的性质立得条件概率的性质. 试举其中若干如下：设 $A \in \mathcal{F}$, $A_n \in \mathcal{F}$.

a. $0 \leqslant P(A|\mathcal{B}) \leqslant 1$.

b. 如 $P(A) = 0$, 则 $P(A|\mathcal{B}) = 0$; 如 $P(A) = 1$, 则 $P(A|\mathcal{B}) = 1$.

c. 如 $A_n \uparrow A$ 或 $A_n \downarrow A$, 则

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n|\mathcal{B}) = P(A|\mathcal{B}).$$

d. 如有穷个或可列个 A_n 互不相交，则

$$P\left(\bigcup_n A_n|\mathcal{B}\right) = \sum_n P(A_n|\mathcal{B}).$$

证 a. $1-\chi_A \geqslant 0$, 由 B, $E(1-\chi_A|\mathcal{B}) \geqslant 0$, 由 A, $1 = E(1|\mathcal{B}) \geqslant E(\chi_A|\mathcal{B}) = P(A|\mathcal{B})$. 类似证 $0 \leqslant P(A|\mathcal{B})$.

b. 如 $P(A)=0$, 直接由 $P(A|\mathcal{B})$ 的定义知 $P(A|\mathcal{B})=0$. 另一结论可自此结论推出，只要考虑补集 $\overline{A}$.

c. 如 $A_n \uparrow A$, $\chi_{A_n} \uparrow \chi_A$, 由 D 即得所欲证. 如 $A_n \downarrow A$, 则补集 $\overline{A}_n \uparrow \overline{A}$.

d. 由 A 知结论对有穷个 A_n 正确；由 c 知对可列个也对. □

条件概率相应于 F, G, H 的性质也不难转述.

(三) 设 $\{x_t(\omega), t \in T\}$ 为一族取值于可测空间 (E,σ) 中的随机变量，称 $E(y|\mathcal{F}\{x_t, t \in T\})$ 为实值随机变量 y **关于** $\{x_t, t\in T\}$ **的条件期望**, 并简记为 $E(y|x_t, t \in T)$.

今设 $T=(1,2,\cdots,n)$ 而考虑 $E(y|x_1,\cdots,x_n)$, 它是 $\mathcal{F}\{x_1,\cdots,x_n\}$ 可测的. 由附篇引理 6, 存在定义在 $E^n = E\times\cdots\times E$ 上的 $\sigma^n = \sigma\times\cdots\times\sigma$ 可测实值函数 $f(z_1,\cdots,z_n)$, $(z_i \in E)$, 使

$$E(y|x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega)) = f(x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega)). \tag{8}$$

我们称 $f(z_1,\cdots,z_n)$ 为 y 在条件 "$x_1(\omega)=z_1,\cdots,x_n(\omega)=z_n$" 下的条件期望, 并记为 $E(y|x_1=z_1,\cdots,x_n=z_n)$; 换言之，定义

$$E(y|x_1=z_1,\cdots,x_n=z_n) = f(z_1,\cdots,z_n).$$

于是 $E(y|x_1=z_1,\cdots,x_n=z_n)$ 是 E^n 上的 n 元 $z_1,\cdots,z_n$ 的函数，具有性质：

3.1. 它是 σ^n 可测的.

3.2. 对任意 $B\in\sigma^n$, 有

$$\int_{(X(\omega)\in B)} y(\omega)P(d\omega) = \int_B E(y|x_1=z_1,\cdots,x_n=z_n)\,P_X(dz). \tag{9}$$

这里 $X(\omega)=(x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega))$, $z=(z_1,\cdots,z_n)$; 而 P_X 为 $X(\omega)$ 的分布，它是 σ^n 上的概率测度.

实际上，由 $f(z_1,\cdots,z_n)$ 的 σ^n 可测性即得 3.1; 由测度论中积分变换定理得

$$\begin{aligned}\int_{(X(\omega)\in B)} y(\omega)P(d\omega) &= \int_{(X(\omega)\in B)} E(y|x_1,\cdots,x_n)P(d\omega)\\ &= \int_{(X(\omega)\in B)} f(x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega))P(d\omega)\\ &= \int_B f(z_1,\cdots,z_n)\,P_X(dz)\\ &= \int_B E(y|x_1=z_1,\cdots,x_n=z_n)\,P_X(dz).\end{aligned}$$

§1.4 半鞅序列

(一) 设 $T(\subset[-\infty,\infty])$ 为有序集，序关系 [1] 记作 "$\prec$". 随机过程 $\{x_t(\omega), t\in T\}$, 如果满足 $E|x_t|<\infty$, 而且对任一对 $s \prec t$ 有

$$x_s = E(x_t|x_u, u\prec s)\ \ (a.s.), \tag{1}$$

[1] 如读者不熟悉序的概念，可简单地理解 "$\prec$" 为 "$\leqslant$", 即可读下文. 本节只在第十章中用到.

则称此过程为**鞅**. 显然，条件 1 等价于：对任意 $A \in \mathcal{F}\{x_u, u \prec s\}$, 有

$$\int_A x_s P(d\omega) = \int_A x_t P(d\omega). \tag{2}$$

如将上述定义的 (1) 式中 "=" 换为 "⩽", 则过程称为**半鞅**.[1]

以下无特别声明时，总设 $T = (1, 2, \cdots)$, 其中序关系 "$\prec$" 即自然序. 这时条件 (1) 等价于

$$x_n = E(x_{n+1}|x_1, \cdots, x_n) \quad \text{(a.s.)}. \tag{3}$$

事实上，(3) 是 (1) 的特殊情形. 反之，由 (3) 知

$$x_n = E(x_{n+k}|x_1, \cdots, x_n) \quad (a.s.)$$

对 $k = 1$ 正确；今设它对 $k = m$ 也正确，则由 (3) 及 §1.3 H 得

$$\begin{aligned} E(x_{n+m+1}|x_1, \cdots, x_n) &= E[E(x_{n+m+1}|x_1, \cdots, x_{n+m})|x_1, \cdots, x_n] \\ &= E(x_{n+m}|x_1, \cdots, x_n) = x_n \quad \text{(a.s.)}, \end{aligned}$$

这便证明了 (1).

关于半鞅与鞅的关系有

引理 1 任一半鞅 $\{x_n, n > 0\}$ 可分解为

$$x_n = x'_n + x''_n, \tag{4}$$

其中 $\{x'_n, n > 0\}$ 为鞅而 $0 \leqslant x''_n \leqslant x''_{n+1}$ (a.s.).

证 定义 x''_n: 令 $x''_1 = 0$,

$$x''_n = \sum_{k=2}^{n} \{E(x_k|x_1, \cdots, x_{k-1}) - x_{k-1}\}. \tag{5}$$

由于 $\{x_n, n > 0\}$ 为半鞅，故 $0 \leqslant x''_n \leqslant x''_{n+1}$ (a.s.). 其次

$$\begin{aligned} E(x'_{n+1}|x_1, \cdots, x_n) &= E\left(\left[x_{n+1} - \sum_{k=2}^{n+1}\{E(x_k|x_1, \cdots, x_{k-1}) - x_{k-1}\}\right]\Big|x_1, \cdots, x_n\right) \\ &= E(x_{n+1}|x_1, \cdots, x_n) - \sum_{k=2}^{n+1}[E(x_k|x_1, \cdots, x_{k-1}) - x_{k-1}] \\ &= x_n - \sum_{k=2}^{n}[E(x_k|x_1, \cdots, x_{k-1}) - x_{k-1}] = x_n - x''_n = x'_n \quad \text{(a.s.)}, \end{aligned}$$

上面第二个等号用到 §1.3H 与 G. 注意 x''_n 及 x'_n 为 $\mathcal{F}\{x_1, \cdots, x_n\}$ 可测，以 $E(--|x'_1, \cdots, x'_n)$ 作用于上式两端，再用一次 §1.3 中的 H 与 G, 得

$$E(x'_{n+1}|x'_1, \cdots, x'_n) = x'_n \quad \text{(a.s.)}. \tag{6}$$

[1] 当代文献则称为下鞅

由 (5) 知 $Ex_n'' = \sum_{k=2}^{n}(Ex_k - Ex_{k-1})$, 故 x_n'' 可积，从而 $E|x_n'| \leqslant E|x_n| + E|x_n''| < \infty$. 这与 (6) 结合便得证 $\{x_n', n > 0\}$ 是一鞅序列. □

由于引理 1, 在某些问题中可把对半鞅的研究化为对鞅的研究.

下面的引理，可以帮助我们由已给半鞅作出许多新的半鞅. 考虑定义在有穷或无穷开区间 $I \subset R_1$ 上的函数 $g(x)$, 称它在 I 上是 **凸的**, 如对任二点 $x, y \in I$, 有

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(g(x) + g(y)). \tag{7}$$

引理 2 设 $g(x)$ 是在 R_1 上凸的连续函数，又 $E|\eta(\omega)| < \infty$, $E|g(\eta)| < \infty$, 则

$$g(E(\eta|\mathcal{B})) \leqslant E(g(\eta)|\mathcal{B}) \quad \text{(a.s.)}. \tag{8}$$

证 以 S 表全体有理数的集. 对 $\lambda_i \in S$, 定义

$$G(\lambda_i, \omega) = P(\eta(\omega) \leqslant \lambda_i|\mathcal{B}), \tag{9}$$

其中 $P(\eta(\omega) \leqslant \lambda_i|\mathcal{B})$ 是条件概率的任一固定的代表. 由 §1.3 条件概率的性质 a,b,c,d 知存在集 A, 使 $P(A) = 0$, 当 $\omega \overline{\in} A$ 时，作为 $\lambda_i \in S$ 的函数，$G(\lambda_i, \omega)$ 是单调不减，右连续的，而且 $\lim\limits_{\lambda_i \to \infty} G(\lambda_i, \omega) = 1$. 扩大 G 的定义域到一切 $\lambda \in R_1$ 而定义

$$G(\lambda, \omega) = \begin{cases} \lim\limits_{\lambda_i \downarrow \lambda} G(\lambda_i, \omega), & \text{如} \omega \overline{\in} A, \\ F(\lambda), & \text{如} \omega \in A, \end{cases} \tag{10}$$

其中 $F(\lambda)$ 是任一固定的与 ω 无关的分布函数. 于是对每 $\omega \in \Omega$, $G(\lambda, \omega)$ 是一个分布函数，从而产生 R_1 上的概率测度 $G(B, \omega)$, $(B \in \mathcal{B}_1)$.

令 $\mathcal{M} = (B : B \in \mathcal{B}_1$, 而且 $G(B, \omega)$ 是 ω 的 $\mathcal{B}$ 可测函数), 则 $\mathcal{M}$ 是一 λ- 系，由 (9),(10) 知 $\mathcal{M}$ 含一切 $(-\infty, \lambda]$, 故由附篇引理 3 知 $\mathcal{M} = \mathcal{B}_1$. 故得证：对每固定的 $B \in \mathcal{B}_1$, $G(B, \omega)$ 是 $\mathcal{B}$ 可测的.

记 $\mathcal{L} = (f(x) : f$ 为 $\mathcal{B}_1$ 可测，而且 $E|f(\eta(\omega))| < \infty)$; 又以 L 表一切使

$$E(f(\eta(\omega))|\mathcal{B}) = \int_{R_1} f(x)G(dx, \omega) \tag{11}$$

成立的 $f(x)$ 的集. 易见 L 是一 $\mathcal{L}$- 系，而且由 (9),(10) 知 L 包含一切 $(-\infty, \lambda]$ 的示性函数，故由附篇引理 4 知 (11) 对一切 $\mathcal{B}_1$ 可测的 $f(x)$ 成立，只要 $E|f(\eta(\omega))| < \infty$. 特别，由假设知 (11) 对 $f(x) = g(x)$ 及 $f(x) = x$ 成立. 于是要证明的 (8) 式化为

$$g\left(\int_{R_1} xG(dx, \omega)\right) \leqslant \int_{R_1} g(x)G(dx, \omega),$$

但由凸函数理论中的 Jensen 不等式 [1] 可知，上面不等式是正确的. □

[1] 见那汤松：实变函数论，第十章，§5, 定理 6.

注意，我们早已知道，如 $E|f(\eta)|<\infty$, 则

$$Ef(\eta)=\int_{R_1}f(x)F_\eta(dx),$$

这里 $F_\eta(x)=P(\eta\leqslant x)$ 是 η 的分布函数. (11) 式表示，对条件期望 $E(f(\eta)|\mathcal{B})$ 也有积分表达式，其中 $G(B,\omega)$ 称为 η**关于** $\mathcal{B}$ **的条件分布** [1].

例 1 设 $\{y_n\}$ 为独立随机变量序列，为使

$$\{x_n,n>0\},\quad x_n=\sum_{i=1}^n y_i$$

是鞅，充分与必要条件是 $Ey_n=0$, $n>1$. 此由

$$\begin{aligned}E(x_{n+1}|x_1,\cdots,x_n)&=E(x_n|x_1,\cdots,x_n)+E(y_{n+1}|x_1,\cdots,x_n)\\&=x_n+E(y_{n+1}|y_1,\cdots,y_n)=x_n+Ey_{n+1}=x_n\ \text{(a.s.)}\end{aligned}$$

看出. 上式中用到 §1.3 G 及 $\{y_n\}$ 的独立性.

例 2 上例一般可化为：设 $\{y_n\}$ 是任一列随机变量， $E|y_n|<\infty$, 而且

$$E(y_{n+1}|y_1,\cdots,y_n)=0\quad(n\geqslant 1),$$

则 $\{x_n,n>0\}$, $x_n=\sum\limits_{i=1}^n y_i$ 构成一鞅.

例 3 设 $x,y_n(n>0)$ 为随机变量， $E|x|<\infty$, 则 $\{x_n,n>0\}$ 成鞅，这里 $x_n=E(x|y_1,\cdots,y_n)$. 实际上，简记 $\mathcal{F}_n^0=\mathcal{F}(x_1,\cdots,x_n)$, $\mathcal{F}_n=\mathcal{F}(y_1,\cdots,y_n)$. 因 x_i 为 $\mathcal{F}_i$ 可测，故 $\mathcal{F}_n^0\subset\mathcal{F}_n$. 由 §1.3 H 得

$$E(x_{n+1}|\mathcal{F}_n)=E(E[x|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n)=E(x|\mathcal{F}_n).$$

再由 §1.3 H 及 G, 即得

$$E(x_{n+1}|\mathcal{F}_n^0)=E(E(x|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_n^0)=E(x_n|\mathcal{F}_n^0)=x_n\ \text{(a.s.)}.\tag{12}$$

例 4 例 3 的一般化可叙述如下：任取随机变量 x, $E|x|<\infty$ 及一列 σ 代数 $\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\subset\cdots$. 定义

$$x_n=E(x|\mathcal{F}_n),\tag{13}$$

则 $\{x_n,n>0\}$ 成鞅. 证明与例 3 中的完全一样.

例 5 设 $\{x_n,n>0\}$ 是半鞅，则 $\{x_n^+,n>0\}$ 是半鞅， x_n^+ 表 x_n 的非负部分 [2]. 实际上，显然 $E|x_n^+|<\infty$. 在引理 2 中取 $g(x)=x^+$, 由半鞅性及 $g(x)$ 的单增性得

$$g(x_n)\leqslant g(E[x_{n+1}|x_1,\cdots,x_n])\leqslant E(g(x_{n+1})|x_1,\cdots,x_n),$$

[1] 在 [16] 中称为 η 关于 $\mathcal{B}$ 的广义条件分布.

[2] 即 $x_n^+=x_n$, 如 $x_n\geqslant 0$; 否则 $x_n^+=0$. 显然 $x_n^+=\frac{1}{2}(x_n+|x_n|)$ 为 $\mathcal{F}\{x_n\}$ 可测.

即 $x_n^+ \leqslant E(x_{n+1}^+|x_1,\cdots,x_n)$. 再用 §1.3G,H 即得

$$x_n^+ \leqslant E(x_{n+1}^+|x_1^+,\cdots,x_n^+). \tag{14}$$

类似地可以证明：如半鞅 $x_n \geqslant 0$ (a.s.) 或者 $\{x_n, n>0\}$ 成鞅，则由 $E|x_n|^r < \infty (r \geqslant 1)$ 知， $\{|x_n|^r, n>0\}$ 是一半鞅.

注 1 鞅与半鞅的实际背景如下：某生产队第 n 年生产价值设为 x_n 元， x_n 是随机变量. $E(x_{n+1}|x_1,\cdots,x_n)$ 便是在已知前 n 年生产价值 $x_1,\cdots,x_n$ 的条件下，第 $n+1$ 年的平均价值. 一般地，生产队在第 $n+1$ 年初计划本年的生产时，只以第 n 年的生产所得价值 x_n 为本金，故可设上述条件期望只依赖于 x_n (与 $x_1,\cdots,x_{n-1}$ 无关), 而鞅性质

$$E(x_{n+1}|x_1,\cdots,x_n) = x_n,$$

则进一步表明生产队在第 $n+1$ 年平均所得仍为 x_n. 因此，如果把 x_n 全部投入生产，作为第 $n+1$ 年的本金时，结果是不盈也不亏. 而半鞅则表示盈利. 自然希望知道，经过多年以后的生产价值是否稳定，数学上便是研究鞅与半鞅的收敛性，即研究 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. (这个例子在资本主义国家里常用赌博的话来表达. 有一种赌法叫 Martingale, 这个字的另一种中文意思是 "鞅". 这也许是所以命名为鞅的原因.)

(二) 试研究鞅的收敛性. 先做些准备工作.

设已给闭区间 $[a,b]$ 及 n 个数 $x_1,\cdots,x_n$. 如果自 x_1 起，顺次到 x_n, 自区间的左方到右方共 h 次，便说 $x_1,\cdots,x_n$ 通过 $[a,b]$ 的次数为 h. 精确些说：令

$$x_{k_1} \leqslant a,\ x_{k_2} \geqslant b,\ x_{k_3} \leqslant a,\ x_{k_4} \geqslant b, \cdots,$$

其中 k_1 是第一个使 $x_{k_1} \leqslant a$ 的下标， k_2 是 k_1 以后第一个使 $x_{k_2} \geqslant b$ 的下标，等等. 设 k_{j_0} 是这样得到的最后一个下标，定义 $k_j = n+1$, $j_0 < j \leqslant n$. 如果上述的 k_i 一个也不存在，就令 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = n+1$. 如果至少存在一个 k_i, 则对每个 $k > k_1$, 根据 $x_1,\cdots,x_{k-1}$ 的值，可以决定一整数 j, 使 $k_j < k \leqslant k_{j+1}$.

当 $k_2 \leqslant n$ 时，定义通过次数为使 $k_{2h} \leqslant n$ 的最大整数 h; 当 $k_2 > n$ 时，定义通过次数为 0. 以下就用 h 来表通过次数. h 依赖于 $[a,b]$.

试讨论 h 与 x_i 间的关系. 为此，先对每个 $k>1$ 定义一数 i_k: 如果 $k \leqslant k_1$, 令 $i_k = 0$; 如果 $k > k_1$, 则定义 $i_k = 0$ 或 1, 视 k 所决定的 j 是奇或偶数而定. 先设 $h>0$. 如 $k_{2h+1} \leqslant n$, 则

$$\sum_{k=2}^{n} i_k(x_k - x_{k-1}) = i_{k_3}(x_{k_3} - x_{k_2}) + \cdots + i_{k_{2h+1}}(x_{k_{2h+1}} - x_{k_{2h}}) \leqslant (a-b)h;$$

如 $k_{2h+1} > n$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} i_k(x_k - x_{k-1}) &= i_{k_3}(x_{k_3} - x_{k_2}) + \cdots + i_{k_{2h-1}}(x_{k_{2h-1}} - x_{k_{2h-2}}) + i_n(x_n - x_{k_{2h}}) \\ &\leqslant (a-b)h + (x_n - a);\end{aligned}$$

其次设 $h=0$, 这时左方和为 0 而第一个不等式显然是对的. 因此不论在哪一种情况，总有

$$\sum_{k=2}^{n} i_k(x_k - x_{k-1}) \leqslant (a-b)h + (x_n - a)^+. \tag{15}$$

现在考虑 n 个随机变量 $x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega)$. 当 ω 固定时，它们是 n 个通常的数，故可如上得到变数 $K_i(\omega)$ $(=k_i(\omega))$, $H_n(\omega)$ $(=h_n(\omega))$, $I_k(\omega)$ $(=i_k(\omega))$. 然后令 ω 变动，便得随机变量 $K_i(\omega), H_n(\omega), I_k(\omega)$ $(k>1)$. $I_k(\omega)$ 决定于 $x_1(\omega),\cdots,x_{k-1}(\omega)$, 即 $I_k(\omega)$ 为 $\mathcal{F}\{x_1,\cdots,x_{k-1}\}$ 可测 [1].

引理 3 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是半鞅，则

$$(b-a)EH_n \leqslant \sup_{k\leqslant n} E(x_k-a)^+ = E(x_n-a)^+. \tag{16}$$

证 以此半鞅代入 (15), 取数学期望，得

$$\sum_{k=2}^{n}\int_{I_k=1}(x_k-x_{k-1})P(d\omega) \leqslant (a-b)EH_n + E(x_n-a)^+.$$

由半鞅性知左方每项非负，因而

$$(b-a)EH_n \leqslant E(x_n-a)^+.$$

既然 $x_1-a,\cdots,x_n-a$ 也是半鞅，由例 5 知 $(x_1-a)^+,\cdots,(x_n-a)^+$ 也如此，于是 $E(x_i-a)^+$ 对 i 不减. 故

$$(b-a)EH_n \leqslant E(x_n-a)^+ = \sup_{k\leqslant n} E(x_k-a)^+. \ \square$$

以下定理解决几乎处处收敛与 r 次方收敛问题.

定理 1 设 $\{x_n, n>0\}$ 是半鞅.

(i) 如 $\sup E|x_n|<\infty$, 则 $x_n\to x$ 有穷 (a.s.), 而且 $Ex\leqslant \sup Ex_n^+$, $E|x|\leqslant \sup E|x_n|$.

(ii) 当且仅当 $|x_n|^r$ 均匀可积时，$x_n \xrightarrow{r} x$, $r\geqslant 1$, 此时 $x_n\to x$ (a.s.).

证 (i) 以 A 表 $(\omega: x_n$ 不收敛$)$, 并令

$$A_{a,b} = (\omega: \varliminf_{n\to\infty} x_n < a < b < \varlimsup_{n\to\infty} x_n),$$

则 $A=\bigcup\limits_{a,b} A_{a,b}$, 这里 a,b 表有理数. 由此可见，当且仅当每一 $A_{a,b}$ 为零测集时，A 是零测集.

考虑引理 3 中的 H_n, 当 $n\to\infty$ 时，$H_n\uparrow H$. 显然，如 $\omega\in A_{a,b}$, 则必 $H=\infty$. 因此，如能证 $P(H=\infty)=0$, 就有 $P(A_{a,b})=0$. 由引理 3

$$EH = \sup EH_n \leqslant \sup E(x_n-a)^+/(b-a). \tag{17}$$

由假设 $E(x_n-a)^+\leqslant E|x_n-a|\leqslant \sup E|x_n|+|a|<\infty$, 因之 $\sup E(x_n-a)^+<\infty$, 故 (17) 的右方也有穷，从而 $P(H=\infty)=0$. 这样便证明了 $x_n\to x$ (a.s.), x 是有穷或无穷的，由 Fatou 引理得 $E|x|\leqslant \sup E|x_n|<\infty$, 从而知 x 有穷 (a.s.). 按 $x^+=\frac{1}{2}(x+|x|)$ 及 $x_n\to x$ (a.s.), 得 $x_n^+\to x^+$ (a.s.). 再用一次 Fatou 引理，便得

$$Ex\leqslant Ex^+\leqslant \sup Ex_n^+.$$

[1] 实际上，$(I_k(\omega)=1)=\bigcup\limits_{1\leqslant l\leqslant a}\{K_{2l}(\omega)<k\leqslant K_{2l+1}(\omega)\}\in\mathcal{F}\{x_1,\cdots,x_{k-1}\}$, a 为不大于 $\frac{k-1}{2}$ 的最大正整数.

(ii) 如 $x_n \xrightarrow{r} x\ (r \geqslant 1)$, 由附篇 (三) 段知 $|x_n|^r$ 均匀可积. 反之，设 $|x_n|^r$ 对某 $r \geqslant 1$ 均匀可积，则 $E|x_n|^r$, 从而 $E|x_n| \leqslant E^{1/r}|x_n|^r$, 都均匀有界. 故由 (i) 得 $x_n \to x$ (a.s.). 再由附篇 (三) 段即知 $x_n \xrightarrow{r} x$. □

注 2 对半鞅，$\sup\limits_n E|x_n| < \infty$ 等价于 $\sup\limits_n Ex_n^+ < \infty$. 实际上，显然，由前者得后者. 由半鞅性，$Ex_n \geqslant Ex_m (n \geqslant m)$. 因而

$$2Ex_n^+ = Ex_n + E|x_n| \geqslant Ex_1 + E|x_n|\ (n \geqslant 1).$$

既然 Ex_1 有穷，故由 $\sup\limits_n Ex_n^+ < \infty$ 得 $\sup\limits_m E|x_m| < \infty$.

设鞅列 $x_n \to x$ (a.s.), 容易想到下列问题：$\{x_1, x_2, \cdots, x\}$ 是否也成鞅？从注 1 中的解释看，这问题是有意义的，因为它关系到稳定的年产价值是否仍无盈亏. 问题的答案一般是否定的. 为了进一步研究，需要引进下面的概念.

说鞅 (或半鞅)$\{x_t, t \in T\}$**右闭于**y, 如果 $\{x_t, t \in T, y\}$ 是鞅 (或半鞅); 换句话说，如 $E|y| < \infty$, 并且对每 $t \in T$ 有

$$x_t = E(y|x_s, s \leqslant t)\ (\text{或} x_t \leqslant E(y|x_s, s \leqslant t))(\text{a.s.}); \tag{18}$$

此时称 y 为 **右闭元**. (18) 可改写为：对任意 $A \in \mathcal{F}\{x_s, s \leqslant t\}$,

$$\int_A x_t P(d\omega) = \int_A y P(d\omega)\ \ \text{或} \int_A x_t P(d\omega) \leqslant \int_A y P(d\omega). \tag{19}$$

如果鞅 (或半鞅)$\{x_t, t \in T\}$ 既右闭于 y, 又右闭于 z, 但 $\{x_t, t \in T, y, z\}$ 成鞅 (或半鞅), 就说 y**近于**z; 如果 y 近于任一其它右闭元，便说 y 是 **最近的**.

为了研究闭性，需要下面一个有关不等式：

引理 4 设 $\{x_1, x_2, \cdots, y\}$ 是半鞅，则对每 $c > 0$, 有

$$cp(\sup x_n \geqslant c) \leqslant \int_{(\sup x_n \geqslant c)} y P(d\omega); \tag{20}$$

又如此半鞅之元非负 (a.s.)(或此半鞅成鞅), 而且 $E|x_n|^r < \infty$, $E|y|^r < \infty$, $r \geqslant 1$, 则

$$c^r p(\sup |x_n| \geqslant c) \leqslant \int_{(\sup x_n \geqslant c)} |y|^r P(d\omega). \tag{21}$$

证 分解

$$B = (\sup x_n > c') = \bigcup_j A_j,$$

其中 $A_j = (x_k \leqslant c', \text{一切}\ k < j; x_j > c')$, $A_j A_k = \phi\ (j \neq k)$. 于是由条件期望的定义及半鞅性

$$\begin{aligned}\int_B y P(d\omega) &= \sum_n \int_{A_n} y P(d\omega) = \sum_n \int_{A_n} E(y|x_k, k \leqslant n) P(d\omega) \\ &\geqslant \sum_n \int_{A_n} x_n P(d\omega) \geqslant \sum_n c' P(A_n) = c' P(B),\end{aligned}$$

令 $c' \uparrow c$, 即得 (20). 由例 5 及 (20) 得 (21). □

引理 5 [1] 设 $\{x_1, x_2, \cdots, y\}$ 为非负半鞅, $E|x_n|^r < \infty$, $E|y|^r < \infty$, 则

$$E\{\sup_n x_n^r\} \leqslant \left(\frac{r}{r-1}\right)^r E\{y^r\}, \quad r > 1.$$

证 由引理 4, 只要证明下列一般命题: 设 x, z 是二非负随机变量, $Ex^r < \infty$, $Ez^r < \infty$, 又对一切 $\lambda > 0$, 有

$$P\{z(\omega) \geqslant \lambda\} \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_{(z(\omega) \geqslant \lambda)} xP(d\omega),$$

则

$$E\{z^r\} \leqslant \left(\frac{r}{r-1}\right)^r E\{x^r\}, \quad r > 1.$$

为证此命题, 任取 λ 的不减函数 $\psi(\lambda)$, $\lambda > 0$, 使满足 $\psi(0) = 0$, $E|\psi(z)| < \infty$, 则

$$\begin{aligned} E\{\psi(z)\} &= -\int_0^\infty \psi(\lambda) dP(z(\omega) \geqslant \lambda) \leqslant \int_0^\infty P(z(\omega) \geqslant \lambda) d\psi(\lambda) \\ &\leqslant \int_0^\infty \frac{d\psi(\lambda)}{\lambda} \int_{(z(\omega) \geqslant \lambda)} xP(d\omega) = \int_\Omega xP(d\omega) \int_0^{z(\omega)} \frac{d\psi(\lambda)}{\lambda}. \end{aligned}$$

特别, 取 $\psi(\lambda) = \lambda^r$, 由上式得

$$E\{z^r\} \leqslant \frac{r}{r-1} E\{xz^{r-1}\} \leqslant \frac{r}{r-1} \{Ex^r\}^{1/r} \{Ez^r\}^{1-1/r},$$

两边取 r 次方, 得

$$[E\{z^r\}]^r \leqslant \left(\frac{r}{r-1}\right)^r \{Ex^r\} \{Ez^r\}^{r-1},$$

如 $Ez^r > 0$, 由此式即得命题结论; 如 $Ez^r = 0$, 则命题显然正确. □

定理 2 (i) 设 $\{x_n, n > 0, y\}$ 构成鞅或非负半鞅, 而且 $E|x_n|^r < \infty$, $E|y|^r < \infty$, $r \geqslant 1$, 则 $x_n \xrightarrow{r} x$, 又 $x_n \to x$ (a.s.).

(ii) 设 $\{x_n, n > 0\}$ 成半鞅, 如对某 $r \geqslant 1$, $x_n \xrightarrow{r} x$, 则 $x_n \to x$ (a.s.), 并且右闭于 x, 还可取 x 为最近的 [2].

证 (i) 令 $B_n = (|x_n| \geqslant c)$, $B = (\sup |x_n| \geqslant c)$, 则 $B \supset \bigcup_n B_n$. 由引理 4

$$c^r P(B) \leqslant \int_B |y|^r P(d\omega) \leqslant E|y|^r < \infty.$$

于是当 $c \to \infty$ 时, $P(B) \to 0$, 从而 $\int_B |y|^r P(d\omega) \to 0$. 利用例 5, 对任意 $\varepsilon > 0$, 当 c 充分大时, 有

$$\int_{B_n} |x_n|^r P(d\omega) \leqslant \int_{B_n} |y|^r P(d\omega) \leqslant \int_B |y|^r P(d\omega) < \varepsilon,$$

这说明 $|x_n|^r$ 均匀可积. 由定理 1 即得证 (i).

---

[1] 此引理在第十章中有用, 与本节中以下内容无关.

[2] 注意 x 只是概率 1 地被决定.

(ii) 由 $x_n \xrightarrow{r} x$ 得 $x_n \xrightarrow{1} x$, 根据定理 1 还有 $x_n \to x$ (a.s.). 因为

$$\left|\int x_n P(d\omega) - \int x P(d\omega)\right| \leqslant \int |x_n - x| P(d\omega) \to 0,$$

故可在积分号下取极限. 由半鞅性得

$$\int_{B_n} x_n P(d\omega) \leqslant \int_{B_n} x_{n+m} P(d\omega), \tag{22}$$

其中 $B_n \in \mathcal{F}\{x_1, \cdots, x_n\}$, 令 $m \to \infty$, 得

$$\int_{B_n} x_n P(d\omega) \leqslant \int_{B_n} x P(d\omega),$$

这就是 (19); 既然 $E|x| < \infty$, 故得证 $\{x_n, n > 0\}$ 右闭于 x.

设它又右闭于 y, 则对 $B_n \in \mathcal{F}\{x_1, \cdots, x_n\}$, 有

$$\int_{B_n} x_{n+m} P(d\omega) \leqslant \int_{B_n} y P(d\omega).$$

令 $m \to \infty$ 得

$$\int_{B_n} x P(d\omega) \leqslant \int_{B_n} y P(d\omega). \tag{23}$$

考虑代数 $\bigcup_n \mathcal{F}\{x_1, \cdots, x_n\}$ 上的有穷测度 $\int_A (y - x) P(d\omega)$, (注意 $y - x$ 可积), 由测度扩张定理及 (23), 它可唯一地扩展成为 $\mathcal{F}\left\{\bigcup_n \mathcal{F}\{x_1, \cdots, x_n\}\right\} = \mathcal{F}\{x_1, x_2, \cdots\}$ 上的有穷测度, 而且

$$\int_A x P(d\omega) \leqslant \int_A y P(d\omega) \tag{24}$$

对任意 $A \in \mathcal{F}\{x_1, x_2, \cdots\}$ 成立. 既然 x 以概率 1 等于一个 $\mathcal{F}\{x_1, x_n, \cdots\}$ 可测函数, 故在一测度为 0 的集上改变 x 的值后, 可设 x 关于 $\mathcal{F}\{x_1, x_n, \cdots\}$ 可测, 从而上式也对任意的

$$A \in \mathcal{F}\{x_1, x_2, \cdots\} = \mathcal{F}\{x_1, x_2, \cdots, x\}$$

成立, 这便证明了所取的 x 的最近性. □

应用上述定理于例 4, 便得

定理 3 设 $\{x_n, n > 0\}$ 是例 4 中的鞅, 则

$$E(x|\mathcal{F}_n) \to E(x|\mathcal{F}_\infty) \quad \text{(a.s.)}, \tag{25}$$

其中 $\mathcal{F}_\infty$ 是含一切 $\mathcal{F}_n (n > 0)$ 的最小 σ 代数; 如果 $E|x|^r < \infty$, $r \geqslant 1$, 则 (25) 中极限还可以是 r 次方收敛意义下的.

证 先证 $\{x_n, n > 0\}$ 闭于 x. 回忆 $E|x| < \infty$. 显然由 (13) 得 $\mathcal{F}\{x_1, \cdots, x_n\} \subset \mathcal{F}_n$, 故由 §1.3H,G 有

$$\begin{aligned} E(x|x_1, \cdots, x_n) &= E(E[x|\mathcal{F}_n]|x_1, \cdots, x_n) \\ &= E(x_n|x_1, \cdots, x_n) = x_n \quad \text{(a.s.)}, \end{aligned} \tag{26}$$

故 x 是右闭元. 由定理 2(i) 知存在

$$\lim_{n\to\infty} x_n = y \ \ (\text{a.s. 及 1 方收敛下}). \tag{27}$$

其次证 $y = E(x|\mathcal{F}_\infty)$ (a.s.). 为此只要证 y 具备决定 $E(x|\mathcal{F}_\infty)$ 的两个性质 (即 §1.3 中的性质 1.1 及 1.2). 首先，因 x_n 为 $\mathcal{F}_\infty$ 可测，故由 (27) 可取 y 也为 $\mathcal{F}_\infty$ 可测；其次，对任意固定的 $A \in \mathcal{F}_n$, 由 (13)

$$\int_A xP(d\omega) = \int_A x_n P(d\omega) \to \int_A yP(d\omega),$$

这里可在积分号下取极限是由于 (27) 在 1 方收敛下也成立 (参看定理 2(ii) 的证明). 故

$$\int_A xP(d\omega) = \int_A yP(d\omega) \tag{28}$$

对 $A \in \bigcup\limits_n \mathcal{F}_n$ 成立. 全体使 (28) 成立的可测集 A 构成一 λ- 系 Λ, 既然 $\Lambda \supset \bigcup\limits_n \mathcal{F}_n$, 故由预篇引理 3 可知 $\Lambda \supset \mathcal{F}_\infty$, 亦即 (28) 对 $\mathcal{F}_\infty$ 中一切集成立. 这便完成了定理中第一结论的证明.

如果 $E|x|^r < \infty$, $r \geqslant 1$, 则第二结论由定理 2(i), 引理 2 及刚才已证明的 $y = E(x|\mathcal{F}_\infty)$ (a.s.) 推出. □

系 1 设 x, y_n $(n > 1)$ 为随机变量, $E|x|^r < \infty$, $r \geqslant 1$, 则以概率 1, 同时也在 r 方收敛意义下有

$$E(x|y_1, \cdots, y_n) \to E(x|y_1, y_2, \cdots). \tag{29}$$

证 在定理 3 中取 $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$, 则 $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}\{y_1, y_2, \cdots,\}$. □

系 2 设 x 为 $\mathcal{F}\{y_1, y_2, \cdots\}$ 可测, $E|x|^r < \infty$ $(r \geqslant 1)$. 则

$$E(x|y_1, \cdots, y_n) \xrightarrow{r} x \ \ (\text{a.s.}); \tag{30}$$

特别如 $A \in \mathcal{F}\{y_1, y_2, \cdots\}$, 则

$$P(A|y_1, \cdots, y_n) \xrightarrow{r} \chi_A \ \ (\text{a.s.}); \tag{31}$$

如再设 $P(A|y_1, \cdots, y_n) = P(A)$, 则 $P(A) = \chi_A$ (a.s.), 由于 $P(A)$ 是与 ω 无关的常数，故必有 $P(A) = 0$ 或 1.

关于具连续参数 t 的半鞅的样本函数性质，我们留待 §3.4 研究.

§1.5 补充与习题

1. 设已给一列一维分布函数 $\{F_n(\lambda), n \geqslant 1\}$, 试造一概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 及定义于其上的独立随机变量列 $\{x_n(\omega), n \geqslant 1\}$, 使 $x_n(\omega)$ 的分布函数为 $F_n(\lambda)$.

提示：定义 m 维分布函数

$$F_{1,\cdots,m}(\lambda_1, \cdots, \lambda_,) = \prod_{i=1}^m F_i(\lambda_i),$$

并利用 §1.1 定理 1.

2. 设 $X=(x_1,\cdots,x_n)$ 为 n 维随机向量，使 $Ex_i=0, Ex_ix_j=\lambda_{ij}$ 有穷. 设矩阵 $\Lambda=(\lambda_{ij})$ 的秩为 $m(\leqslant n)$, 试证存在 m 维随机向量 $Y=(y_1,\cdots,y_m)$, $Ey_i=0$, $Ey_iy_j=\delta_{ij}$ ($=0$ 如 $i\neq j$;$=1$ 如 $i=j$) 使每个 x 是 $y_1,\cdots,y_m$ 的线性组合.

提示：参看 [15] §22.6.

3. 设 $X=(x_1,\cdots,x_n)$ 满足上题条件，并有 n 维正态分布. 试证每 x_i 可表为 m 个独立的正态分布的随机变量的线性组合.

提示：利用上题及正态系的性质. 详见 [15] §24.3.

4. 设 $E|x|<\infty$, 如 x 与任意 $\chi_{_A}(\omega)$, $A\in\mathcal{B}$ 都相互独立，则 $E(x|\mathcal{B})=Ex$ (a.s.); 特别，如 $x=\chi_{_B}$, 得 $P(B|\mathcal{B})=P(B)$ (a.s.).

提示： $Ex\chi_{_A}=Ex\cdot E\chi_{_A}$.

5. 试证如可测集列 $A_n(n>1)$ 互不相交，则

$$P\Big(\bigcup_n A_n|\mathcal{B}\Big)=\sum_n P(A_n|\mathcal{B})\quad\text{(a.s.)}.$$

6. 设 $E|x|<\infty$, $\delta>0$, 则级数

$$x(\delta,\omega)=\sum_{-\infty}^{\infty}(j+1)\delta P(j\delta<x(\omega)\leqslant(j+1)\delta|\mathcal{B})$$

以概率 1 绝对收敛，而且

$$\lim_{n\to\infty}x\Big(\frac{1}{n},\omega\Big)=E(x|\mathcal{B})\quad\text{(a.s.)}.$$

提示：将 $x(\omega)$ 离散化而造

$$z(\delta,\omega)=j\delta,\ \text{如} j\delta<x(\omega)\leqslant(j+1)\delta,\ j=0,\pm1,\cdots,$$

$$z_n(\delta,\omega)=\begin{cases}z(\delta,\omega), & \text{如}-n\delta<x(\omega)\leqslant(n+1)\delta,\\ 0, & \text{反之}.\end{cases}$$

然后用 §1.3 E 两次.

7. 设 $(x_1(\omega),x_2(\omega))$ 有二维正态分布， $Ex_1=Ex_2=0$, $Dx_1=Dx_2=1$, $Ex_1x_2=R$; 试证 $E\max(x_1,x_2)=\sqrt{\frac{1-R}{\pi}}$;

并求 $E\min(x_1,x_2)$.

8. (i) 设 $E|x(\omega)|<\infty$ 而且存在常数 c_1,c_2, 使 $c_1\leqslant x(\omega)\leqslant c_2$ (a.s.), 则 $c_1\leqslant E(x|\mathcal{B})\leqslant c_2$ (a.s.) 对任意 σ 代数 $\mathcal{B}\subset\mathcal{F}$ 成立. 特别， $0\leqslant P(A|\mathcal{B})\leqslant 1$ (a.s.).

(ii) 设 Π 为 π- 系， $\Omega\in\Pi\in\mathcal{F}$, 又 $\mathcal{B}$ 为含 Π 的最小 σ 代数，则 §1.3 定义 1 中条件 1.2 等价于： $E(y|\mathcal{B})$ 可积，而且对任意 $A\in\Pi$ 有

$$\int_A E(y|\mathcal{B})P(d\omega)=\int_A yP(d\omega).$$

(iii) 设 $\mathcal{B}$ 为含可列多个可测集 $\{B_n\}$ 的最小 σ 代数. 其中 $B_iB_j=\phi$, $i\neq j$; $\bigcup\limits_n B_n=\Omega$; 又 $P(B_n)>0$ 对一切 n. 则对任意 $A\in\mathcal{F}$ 有

$$P(A|\mathcal{B})=P(A|B_n),\quad \text{如}\,\omega\in B_n.$$

提示：(i) $c = E(c|\mathcal{B})$ (a.s.), c 为常数. (ii) 用 λ- 系方法. (iii) 参考 §1.3 例 2.

9. 设随机变量列 $\{x_n(\omega)\}$ 均匀有界，即存在常数 c 使 $|x_n(\omega)| < c$ 对一切 n, ω 成立，则此时依概率收敛等价于 $r(>0)$ 方收敛.

提示：参看 79 页的脚注.

下面一系列的习题，表明如何应用半鞅的一般理论以推出独立随机变量的许多著名的性质.

10. 零一律：设 $\{y_n, n>0\}$ 为独立随机变量序列，如 x 关于 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}\{y_m, m\geqslant n\}$ 可测，则称为 **尾随机变量**, 而 σ 代数 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}\{y_m, m\geqslant n\}$ 中的集 A 称为 **尾事件**. 试证 $P(A)=0$ 或 $1, x = Ex$ (a.s.).

提示：$A\in\mathcal{F}\{y_m, m>n\}$, 由 $\{y_k, k>0\}$ 的独立性知 $P(A|y_1,\cdots,y_n) = P(A)$, 这从 $P(AB) = P(A)P(B)$ $(B\in\mathcal{F}\{y_1,\cdots,y_n\})$ 立刻推知. 再利用 §1.4 系 2 即得. 故系 2 是一般化的零一律.

11. 设 $\{B_n, n>1\}$ 为一列相互独立事件，令 $B = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=m}^{\infty}B_j$, 试证 $P(B)=0$ 或 1. 如无独立性假定，则结论不正确. 试举例说明.

提示：令 $y_n = \chi_{B_n}$ (B_n 之示性函数), 利用上题. 注意 $B = \bigcap\limits_{m=n}^{\infty}\bigcup\limits_{j=m}^{\infty}B_j\in\mathcal{F}\{y_n, y_{n+1},\cdots\}$. 所需例：取 $B_j = A$, 而 $P(A)=\frac{1}{2}$.

12. Borel-Cantelli 引理：设 $B_j (j>0)$ 为任一列可测集，$B = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=m}^{\infty}B_j$. 如 $\sum\limits_j P(B_j) < \infty$, 则 $P(B)=0$. 如 $\sum\limits_j P(B_j)=\infty$ 而且 $B_j (j>0)$ 相互独立，则 $P(B)=1$.

提示：利用 $P(B)\leqslant P\left(\bigcup\limits_{j=n}^{\infty}B_j\right)\leqslant\sum\limits_{j=n}^{\infty}P(B_j)$ 立得第一结论. 记 $\overline{B}_j = \Omega - B_j$, 由独立性得

$$1 - P(B) = \lim_{n\to\infty}P\left(\bigcap_{j=n}^{\infty}\overline{B}_j\right) = \lim_{n\to\infty}\prod_{j=n}^{\infty}(1-P(B_j)).$$

如 $\sum\limits_j P(B_j)=\infty$, 则 $\prod_j(1-P(B_j))=0$.

13. 设 $\{y_n, n>1\}$ 为独立随机变量序列. 令

$$A = \left(\omega : \sum_{n=1}^{\infty}y_n(\omega)\ \text{收敛于有穷极限}\right),$$

试证 $P(A)=0$ 或 1.

提示：$A = \left(\omega : \sum\limits_{n=m}^{\infty}y_n(\omega)\ \text{收敛于有穷极限}\right)$, 利用零一律.

14. 设 $\{y_n, n>1\}$ 为独立随机变量序列，$Ey_n = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}Ey_n^2<\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 以概率 1 收敛，也在均方意义下收敛.

提示：令 $x_m = \sum\limits_{n=1}^{m}y_n$, $\sigma_n^2 = Ey_n^2$, 则 $E(x_n - x_m)^2 = \sum\limits_{i=m+1}^{n}\sigma_j^2\to 0, m\to\infty, n\to\infty$. 此得证 x_n 均方收敛于某 x. $\{x_n, n>1\}$ 成鞅. 由 §1.4 定理 2 得 $x_n\to x$ (a.s.).

15. 试证：如 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 成鞅， $E|x_k|^r<\infty,(r\geqslant 1)$, 则

$$P(\sup_{k\leqslant n}|x_k|\geqslant c)\leqslant E|x_n|^r/c^r.$$

提示：利用 §1.4 引理 4, 并注意注 1 与前一段话.

16. 设 $\{y_k,k\geqslant 1\}$ 为独立随机变量序列， $Ey_k=0,\sigma_k^2=Ey_k^2<\infty$. 令 $x_k=\sum\limits_{i=1}^{k}y_i$, 试证

$$P(\sup_{k\leqslant n}|x_k|\geqslant c)\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\right)\Big/c^2.$$

提示：利用上题. 注意上式为 Колмогоров 不等式，故上题中不等式可看成此不等式之推广.

17. 设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}y_k$ 是独立随机变量 $y_k(k>1)$ 的部分和， $Ey_k=0$. 则 $x_n\to x$ (a.s.), $E|x|^r<\infty$ $(r\geqslant 1)$ 的必要与充分条件是 $x_n\xrightarrow{r}x$.

提示：充分性由 §1.4 定理 2 推出. 反之，设 $x_n\to x, E|x|^r<\infty(r\geqslant 1)$. 易见 $x_{n+p}-x_n$ 因之 $x-x_n$ 与 $x_1,\cdots,x_n$ 独立，故如令 $\mathcal{F}_n=\mathcal{F}\{x_1,\cdots,x_n\}$, 则

$$\begin{aligned}E(x|\mathcal{F}_n)&=E(x-x_n|\mathcal{F}_n)+E(x_n|\mathcal{F}_n)\\&=E(x-x_n)+x_n=Ex+x_n \text{ (a.s.)}.\end{aligned}$$

由 §1.4 系 2 及 $x_n\to x$ 即得 $Ex=0$. 故 $\{x_n,n>1\}$ 右闭于 x, 然后用 §1.4 定理 2.

18. 试举一列随机变量 $x_n(\omega)(n>0)$ 及 $x(\omega)$, 使 $\{x_n\}$ 依分布收敛于 x 但不依概率收敛于 x.

提示：令 x 的分布为 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$, 即 $P(x=1)=\frac{1}{2}$, $P(x=0)=\frac{1}{2}$, 造 $x_n(n>0)$ 及 x, 使它们相互独立而且有相同分布.

附记. 正态过程在实际中有重要应用，正如正态分布在实际中大量出现一样. 关于它的应用见本章参考文献 2,3. 正态过程理论的进一步叙述要等到一般的过程知识相当具备以后，例如，参看 §9.3.

条件概率的概念最初为 A. H. Колмогоров 引进. 理论上重要的还有所谓条件分布. 但我们以后并不需要 (只在 §1.4 引理 2 的证明中稍稍涉及), 故略而不叙. 关于条件分布见本书末所列参考书 [16] 或 [21]. 半鞅理论的详细而又深入的叙述也见 [16].

参考文献

[1] 杨宗磐，并于条件期望的一点注意 (I),(II), 数学进展， **3**: 4(1957), 658–661; 数学学报， **9**: 3(1959), 330–332.

[2] Davenport, W. B., Root, W. L., An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise, 1958.

[3] Laning, J. H., Battin, R. H., Random Processes in Automatic Control, 1956.

第二章　可列马尔科夫链

§2.1　基本性质

马尔科夫链 (简称马氏链) 是一种特殊的随机过程，最初由 A. A. Марков 所研究. 它的直观背景如下:

设想有一随机运动的体系 $\boldsymbol{\Sigma}$(例如运动着的质点等), 它可能处的状态 (或位置) 记为 $E_0, E_1, \cdots, E_n, \cdots$, 总数共有可列多个或有穷个. 这体系只可能在时刻 $t = 1, 2, \cdots, n, \cdots$ 上改变它的状态. 随着 Σ 的运动进程，定义一列随机变量 x_n, $n = 0, 1, 2, \cdots$, 其中

$$x_n = k, \text{ 如在} t = n \text{ 时}, \boldsymbol{\Sigma} \text{ 位于 } E_k.$$

一般地， $\{x_n\}$ 未必是相互独立的.

实际中常常碰到具有下列性质的运动体系 $\boldsymbol{\Sigma}$. 如果已知它在 $t = n$ 时的状态，则关于它在 n 时以前所处的状态的补充知识，对预言 Σ 在 n 时以后所处的状态，不起任何作用. 或者说，在已知 "现在" 的条件下， "将来" 与 "过去" 是独立的. 这种性质，就是直观意义上的 "马尔科夫性" (简称 "马氏性"), 或称 "无后效性".

例 1 **(具吸引壁的随机徘徊)** 考虑整数点 $0, 1, 2, \cdots, 2a$ (a 为正整数) 的集合 E, 这里 i 表状态 E_i. 设有质点 Q 自某状态出发，令 ${}_{m_1\cdots m_k m}p^{(1)}_{i_1\cdots i_k ij}$ 为已知，它于 $t = m_l$ 时 (过去) 位于 $i_l (l = 1, \cdots, k)$, 于 m 时 (现在) 位于 i 的条件下，下一时刻 (将来), 即 $m + 1$ 时位于 j 的条件概率 ($m_1 < m_2 < \cdots < m_k < m$, $i_l \in E$, $i, j \in E$). 如果假定

$${}_{m_1\cdots m_k m}p^{(1)}_{i_1\cdots i_k ij} = {}_m p^{(1)}_{ij},$$

也就是说，上述概率只依赖于现在所在的位置 i, 那么此运动具有直观上的马氏性. 现在进一步假定

$$\begin{aligned} {}_m p^{(1)}_{ij} &= p^{(m)}_i (\geqslant 0), \text{ 如} j = i + 1 \\ &= q^{(m)}_i (\geqslant 0), \text{ 如} j = i - 1 \\ &= 0, \qquad\quad \text{如} |i - j| > 1, \end{aligned}$$

其中 $0 < i < 2a$, $p^{(m)}_i + q^{(m)}_i = 1$; 在这假定下， Q 自 i 出发，下一步以概率 1 只能转移到邻近二状态 $i + 1$ 及 $i - 1$.

今以 x_n 表 Q 在 $t = n$ 时所处的状态，则 $\{x_n\} (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 记录 Q 的运动过程. 现在补设当 Q 到达 0(或 $2a$) 后，就永远停留于 0(或 $2a$), 或者等价地设下一步以概率 1 仍处于 0(或 $2a$) 即

$${}_m p^{(1)}_{00} = 1, \quad {}_m p^{(1)}_{2a2a} = 1,$$

此时称状态 0 及 $2a$ 为 **吸引壁**, 而称此运动为 **具吸引壁 0 与 $2a$ 的随机徘徊**. 显然，支配这个运动的概率法则由下列两个因素决定:

1. Q 在开始时即 $t=0$ 时处于状态 i 的概率 $q_i = P(x_0 = i)$, $i = 0,1,2,\cdots,2a$; $\sum\limits_{i=0}^{2a} q_i = 1$.

2. 矩阵列 ${}_mP$ $(m = 0,1,2,\cdots)$:

$$
{}_mP = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
q_1^{(m)} & 0 & p_1^{(m)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & q_2^{(m)} & 0 & p_2^{(m)} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{2a-1}^{(m)} & 0 & p_{2a-1}^{(m)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}. \tag{1}
$$

${}_mP$ 给出在已知 $t=m$ 时 Q 的位置的条件下，下一步转移的条件概率.

特别重要的是 ${}_mP$ 不依赖于 m 的情况，此时 ${}_mP = {}_nP$, 故运动只受 $\{q_i\}$ 及一个矩阵 ${}_mP = P$ 的支配，我们说，这运动关于时间是 **齐次** 的.

一种更特殊的情况是 (1) 中的 $q_i^{(m)} = q$, $p_i^{(m)} = p$,

$$
P = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}. \tag{1'}
$$

这时不仅对时间是齐次的，而且条件概率 p_i, q_i 与 i 无关.

现在可以对马氏链下正式的定义.

定义 1 定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的取非负整数值的随机变量列 $x_n(x_n = x_n(\omega), \omega \in \Omega)$, $n = 0,1,2,\cdots$ 称为 **马氏链**, 如果等式

$$
\begin{aligned}
&P(x_{m+k} = i_{m+k} | x_m = i_m, x_{j_l} = i_{j_l}, \cdots, x_{j_2} = i_{j_2}, x_{j_1} = i_{j_1}) \\
&\quad = P(x_{m+k} = i_{m+k} | x_m = i_m)
\end{aligned} \tag{2}
$$

对任意正整数 l, m, k, 及任意非负整数 $j_l > \cdots > j_2 > j_1 (m > j_l)$, $i_{m+k}, i_m, i_{j_l}, \cdots, i_{j_2}, i_{j_1}$ 成立，只要 (2) 中左方构成条件的事件的概率大于 0.

在本章中，(2) 就是 **马氏性** 的正式定义，它是上述直观意义上的马氏性的数学抽象.

为了保持直观的意义，事件 $(x_m = i)$ 有时也说成 “于第 m 步时体系位于状态 E_i” 或更简短些，“于 m 步时位于 i”.

下面总设构成条件的事件有正概率，以避免条件概率的不确定性，以后不再一一声明.

在 “于 m 步时位于 i” 的条件下，经 k 步后转移到 j(即 E_j) 的 (条件) 概率 $P(x_{m+k} = j | x_m = i)$ 简记为 ${}_mp_{ij}^{(k)}$, 并记矩阵

$$
{}_mP^{(k)} = ({}_mp_{ij}^{(k)}) \quad (i,j = 0,1,2,\cdots).
$$

称元为非负数的矩阵为 **随机矩阵**, 如果它的每一横行上的元的和为 1, 由 ${}_mp_{ij}^{(k)}$ 的定义，显然

$$
{}_mp_{ij}^{(k)} \geqslant 0, \quad \sum_j {}_mp_{ij}^{(k)} = 1. \tag{3}
$$

这里及今后 $\sum\limits_j$ 表 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}$. 故对任一自然数 k, ${}_mp^{(k)}$ 为随机矩阵.

引理 1 对任意正整数 k 及 l, 有

$$
{}_mp_{ij}^{(k+l)} = \sum_r {}_mp_{ir}^{(k)} \cdot {}_{m+k}p_{rj}^{(l)}, \tag{4}
$$

或者采用矩阵记号

$$
{}_mp^{(k+l)} = {}_mp^{(k)} \cdot {}_{m+k}p^{(l)}. \tag{5}
$$

证[1]

$$
\begin{aligned}
{}_mp_{ij}^{(k+l)} &= P(x_{m+l+k} = j | x_m = i) = \frac{P(x_m = i, x_{m+l+k} = j)}{P(x_m = i)} \\
&= \sum_r \frac{P(x_{m+k+l} = j, x_m = i, x_{m+k} = r)}{P(x_m = i, x_{m+k} = r)} \cdot \frac{P(x_m = i, x_{m+k} = r)}{P(x_m = i)} \\
&= \sum_r P(x_{m+k+l} = j | x_m = i, x_{m+k} = r) \cdot P(x_{m+k} = r | x_m = i),
\end{aligned}
$$

由马氏性 (2) 得

$$
\begin{aligned}
{}_mp_{ij}^{(k+l)} &= \sum_r P(x_{m+k+l} = j | x_{m+k} = r) \cdot P(x_{m+k} = r | x_m = i) \\
&= \sum_r {}_mp_{ir}^{(k)} \cdot {}_{m+k}p_{rj}^{(l)}. \ \square
\end{aligned}
$$

等式 (4) 或 (5) 称为 **Колмогоров–Chapman方程**. 初学者易误以为这方程对任意随机序列 $\{x_n\}$ 都成立，因为由它的概率意义似乎无需证明而是显然成立的. 其实上述的证明中本质地用到了马氏性.

简记 ${}_mp_{ij}^{(1)}$ 为 ${}_mp_{ij}$. 由 (4) 及归纳法立得

$$
{}_mp_{ij}^{(k+1)} = \sum_{j_1,\cdots,j_k} {}_mp_{ij_1} \cdot {}_{m+1}p_{j_1j_2} \cdots {}_{m+k}p_{j_kj}, \tag{6}
$$

$$
{}_mp_{ij}^{(k+1)} = \sum_r {}_mp_{ir} \cdot {}_{m+1}p_{rj}^{(k)} = \sum_r {}_mp_{ir}^{(k)} \cdot {}_{m+k}p_{rj}. \tag{7}
$$

设 $q_j = P(x_0 = j)$, 显然 $q_j \geqslant 0$, $\sum\limits_j q_j = 1$. 分布 $\{q_j\}$ 称为马氏链 $\{x_n\}$ 的 **开始分布**.

一般，对每一非负整数 n, 称概率

$$
q_j^{(n)} = P(x_n = j), \quad j = 0, 1, 2, \cdots
$$

为 **绝对概率**, $\sum\limits_j q_j^{(n)} = 1$. $\{q_j^{(n)}\}$ 通过下式为开始分布及转移概率所决定:

$$
\left.
\begin{aligned}
q_j^{(0)} &= q_j, \\
q_j^{(n+1)} &= \sum_i q_i^{(0)} \cdot {}_0p_{ij}^{(n+1)} = \sum_i q_i^{(n)} \cdot {}_np_{ij}.
\end{aligned}
\right\} \tag{8}
$$

[1]这里求和号 $\sum\limits_r$ 表对一切使 $P(x_m = i, x_{m+k} = r) > 0$ 的 r 求和.

更一般地，下列引理给出 $\{x_n\}$ 的全体有穷维联合分布.

引理 2 对任意非负整数 $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$, 有

$$P(x_{j_1} = i_{j_1},\ x_{j_2} = i_{j_2}, \cdots,\ x_{j_k} = i_{j_k}) = q_{i_{j_1}}^{(j_1)} \cdot {}_{j_1}p_{i_{j_1}i_{j_2}}^{(j_2-j_1)} \cdots {}_{j_{k-1}}p_{i_{j_{k-1}}i_{j_k}}^{(j_k-j_{k-1})}. \tag{9}$$

证 左方值等于

$$\begin{aligned}&P(x_{j_1} = i_{j_1})P(x_{j_2} = i_{j_2}|x_{j_1} = i_{j_1})P(x_{j_3} = i_{j_3}|x_{j_1} = i_{j_1}, x_{j_2} = i_{j_2})\\ &\cdots P(x_{j_k} = i_{j_k}|x_{j_1} = i_{j_1}, x_{j_2} = i_{j_2}, \cdots, x_{j_{k-1}} = i_{j_{k-1}}),\end{aligned}$$

由马氏性 (2) 知此值为

$$\begin{aligned}&P(x_{j_1} = i_{j_1})P(x_{j_2} = i_{j_2}|x_{j_1} = i_{j_1})P(x_{j_3} = i_{j_3}|x_{j_2} = i_{j_2}) \cdots P(x_{j_k} = i_{j_k}|x_{j_{k-1}} = i_{j_{k-1}})\\ &= q_{i_{j_1}}^{(j_1)} \cdot {}_{j_1}p_{i_{j_1}i_{j_2}}^{(j_2-j_1)} \cdots {}_{j_{k-1}}p_{i_{j_{k-1}}i_{j_k}}^{(j_k-j_{k-1})}. \square\end{aligned}$$

至今证明了：如已给定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的马氏链 $\{x_n\}$, 于是它的开始分布 $\{q_j\}$ 及转移概率矩阵 ${}_mP(= {}_mP^{(1)})$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ 也随之决定，而且后者都是随机矩阵. 反之，有

定理 1(存在定理) 设任意给定分布 $\{q_j\}$ 及随机矩阵列 ${}_mP = ({}_mp_{ij})$, $m = 0, 1, 2, \cdots$, 则存在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 及定义于其上的马氏链 $\{x_n\}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, 使

$$q_j = P(x_0 = j), \tag{10}$$

$${}_mp_{ij} = P(x_{m+1} = j|x_m = i). \tag{11}$$

证 考虑所给的 ${}_mP$ 及由 (6) 定义的随机矩阵 ${}_mP^{(k)} = ({}_mp_{ij}^{(k)})$, $k = 1, 2, \cdots ({}_mP^{(1)} = {}_mP)$; 利用已给的 $\{q_j\}$ 及 (8) 来定义 $\{q_j^{(k)}\}$. 对任意 k 个非负整数，把它们按大小排为 $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$, 造 k 元函数 (参看 (9)).

$$P_{j_1, j_2, \cdots, j_k}(i_{j_1}, i_{j_2}, \cdots, i_{j_k}) = q_{i_{j_1}}^{(j_1)} \cdot {}_{j_1}p_{i_{j_1}i_{j_2}}^{(j_2-j_1)} \cdots {}_{j_{k-1}}p_{i_{j_{k-1}}i_{j_k}}^{(j_k-j_{k-1})}, \tag{12}$$

作为 k 个非负整数 $i_{j_1}, i_{j_2}, \cdots, i_{j_k}$ 的函数，它是一 k 维分布. 由于 ${}_mP^{(k)}$ 是随机矩阵，显而易见，这样造出的有穷维分布族是相容的. 故由 §1.1 定理 1, 存在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 及定义于其上的随机变量列 $\{x_n\}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, 使

$$P(x_{j_1} = i_{j_1}, x_{j_2} = i_{j_2}, \cdots, x_{j_k} = i_{j_k}) = P_{j_1, j_2, \cdots, j_k}(i_{j_1}, i_{j_2}, \cdots, i_{j_k}). \tag{13}$$

由此可得 $P(x_k = j) = q_j^{(k)}$, 特殊情况是 (10). 试证马氏性 (2) 成立： (2) 左方值等于

$$\begin{aligned}&\frac{P_{j_1, j_2, \cdots, j_l, m, m+k}(i_{j_1}, i_{j_2}, \cdots, i_{j_l}, i_m, i_{m+k})}{P_{j_1, j_2, \cdots, j_l, m}(i_{j_1}, i_{j_2}, \cdots, i_{j_l}, i_m)}\\ &= \frac{q_{i_{j_1}}^{(j_1)} \cdot {}_{j_1}p_{i_{j_1}i_{j_2}}^{(j_2-j_1)} \cdots {}_{j_l}p_{i_{j_l}i_m}^{(m-j_l)} \cdot {}_mp_{i_m i_{m+k}}^{(k)}}{q_{i_{j_1}}^{(j_1)} \cdot {}_{j_1}p_{i_{j_1}i_{j_2}}^{(j_2-j_1)} \cdots {}_{j_l}p_{i_{j_l}i_m}^{(m-j_l)}} = {}_mp_{i_m i_{m+k}}^{(k)},\end{aligned}$$

(2) 右方值等于

$$\frac{P_{m, m+k}(i_m, i_{m+k})}{P_m(i_m)} = \frac{q_{i_m}^{(m)}\ {}_mp_{i_m i_{m+k}}^{(k)}}{q_{i_m}^{(m)}} = {}_mp_{i_m i_{m+k}}^{(k)}.$$

比较此二式即得证 (2); 同时还证明了 (11)(只要在上式中令 $i_m=i, i_{m+k}=j, k=1$). □

由引理 2 与存在定理的证明，便得与定义 1 等价的马氏链的另一定义.

定义 2 定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上而取非负整数值的随机变量列 $x_n(=x_n(\omega),\omega\in\Omega)$, $n=0,1,2,\cdots$ 称为马氏链，如果存在分布 $\{q_j\}$ 及满足 (3) 的矩阵列 ${}_mP=({}_mp_{ij})$ $(m=0,1,2,\cdots)$ 使 (13) 成立；(13) 中右方值由 (12) 定义.

这时，$\{x_n\}$ 的开始分布为 $\{q_j\}$, 转移概率矩阵列为 ${}_mP, m=0,1,2,\cdots$.

由此可见，马氏链 $\{x_n\}$ 由其开始分布及转移概率矩阵列 $\{{}_mP\}$ 所决定，此二因素有如微分方程论中开始条件与方程本身. 开始分布描述随机运动的开始状态，而 $\{{}_mP\}$ 则描述运动的过程. 因此，如转移概率固定，则具有不同开始分布的运动只是开始状态的分布不同，运动过程却遵循同样的概率法则. 由定理 1 的证明可见，如先给出 $\{q_i\}$ 及 $\{{}_mP\}$ 要造 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 时，P 决定于 $\{q_j\}$ 及 $\{{}_mP\}$. 故如固定 $\{{}_mP\}$ 而 $\{q_i\}$ 不确定，则 P 只依赖于 $\{q_j\}$. 有时为了强调这种对开始分布的依赖关系，常常记 P 为 P_q. 特别，如 $q_j=\delta_{j_i}$, 即开始分布集中在一点 i 上时，记此 P 为 P_i. 此外，由 §1.1 定理 1 的证明可见，尽管 P_q 可以不同，$\Omega,\mathcal{F}$ 仍可取为相同，即不随开始分布 $\{q_j\}$ 而变.

定义 3 称马氏链 $\{x_n\}$ 为 **齐次的**, 如果它的转移概率矩阵 ${}_mP=P$ 与 m 无关；即对任意非负整数 m, 有

$$P(x_{m+1}=j|x_m=i)=p_{ij}.$$

由 (6) 可见，${}_mp_{ij}^{(k)}$ 也与 m 无关，称为 **k步转移概率**. 以后记 $p_{ij}^{(1)}=p_{ij}$. 在 (3)–(13) 中，把 ${}_mp_{ij}^{(k)}$ 改写为 $p_{ij}^{(k)}$ 后，即得这些公式在齐次情况的表现. 其中，我们只指出特别重要的下列诸式

$$p_{ij}\geqslant 0,\ \sum_j p_{ij}=1, \tag{3'}$$

$$p_{ij}^{(k+l)}=\sum_r p_{ir}^{(k)}p_{rj}^{(l)}, \tag{4'}$$

$$q_j^{(n+1)}=\sum_i q_ip_{ij}^{(n+1)}=\sum_i q_i^{(n)}p_{ij}. \tag{8'}$$

到现在为止，对马氏链的研究，所得的结果虽然丰富，但只是在齐次情况才比较完善. 因此，从下节起，我们主要只研究齐次马氏链.

例 1(续) 上面直观地讨论了具吸引壁的随机徘徊. 现在正式对它下定义. 我们称马氏链 $\{x_n\}$ 为 **具吸引壁 0 与 $2a$ 的随机徘徊**, 如果它的转移矩阵列 $\{{}_mP\}$ 由 (1) 决定；特别，如 ${}_mP=P$ 化为 (1′) 时，它是齐次的. 自然，这里“最后一个状态是偶数 $2a$”的假定是无关紧要的，它可以是任何非负整数.

类似地定义具 **反射壁**0 与 n 的随机徘徊，它是以

$${}_mP=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ q_1^{(m)} & 0 & p_1^{(m)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & q_2^{(m)} & 0 & p_2^{(m)} & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{n-1}^{(m)} & 0 & p_{n-1}^{(m)}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

为转移矩阵的马氏链. 此外, 也可以定义具有一个吸引壁和一个反射壁的随机徘徊. 或者, 只对一个壁加限制 (为反射的或吸引的).

另一种重要的情况是所谓**自由随机徘徊**. 它是一马氏链, 相空间是全体整数, 而转移概率矩阵由下列 (15) 式决定. 注意, 上面的理论虽然只对 $(0,1,2,\cdots)$ 陈述, 其实相空间是任何可列集时, 全部理论保留不变, 只要理解 $\sum\limits_j$ 为对此可列集中一切元求和就行了.

$$
{}_mP = \begin{pmatrix}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & q_{-i}^{(m)} & 0 & p_{-i}^{(m)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & q_{-i+1}^{(m)} & 0 & p_{-i+1}^{(m)} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q_i^{(m)} & 0 & p_i^{(m)} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots &
\end{pmatrix}. \tag{15}
$$

§2.2 闭集与状态的分类

(一) 以后无特别声明时, 所研究的都是齐次马氏链, 同时将"齐次"二字省去. 设 E 为相空间, $E=(0,1,2,\cdots)$. 我们说, **k可自 j 到达**, 并记为 $j\Longrightarrow k$, 如果存在正整数 n, 使 $p_{jk}^{(n)}>0$, 这里 j 可等于 k; 如 $j\Longrightarrow k$, $k\Longrightarrow j$, 就说 **j,k互通**, 并记作 $j\iff k$. 显然 [1] 如 $j\Longrightarrow k$, $k\Longrightarrow l$, 则 $j\Longrightarrow l$.

E 的子集 C 称为 **闭集**, 如果 C 外的任一状态都不能自 C 内任一状态到达. 为方便计, 我们认为 E 是闭集. 如果单点集 $\{k\}$ 成一闭集, 就称 k 为 **吸引状态**; 另一个极端是: 除 E 以外不存在其它闭集, 这时就说此马氏链是 **不可分的**. 更一般地, 称 **闭集 C 为不可分的**, 如它不含任一闭的非空真子集.

设 $D\subset E$. 包含 D 的一切闭集的交仍是包含 D 的闭集, 它是含 D 的最小闭集, 称为 D 的 **闭包**, 并记作 $\overline{D}$.

注意, 以上各概念全由一步转移概率矩阵 $P=(p_{ij})$ 决定, 因为 $P^{(n)}=(p_{ij}^{(n)})$ 由 P 决定.

例 1 设 $\{x_n\}$ 为具吸引壁 0 与 a 的随机徘徊, $E=(0,1,2,\cdots,a)$, $0<p<1$. 首先, 任一 k 可自 $j(j\neq 0, j\neq a)$ 到达, 从而 k,j 互通 $(k\neq 0, k\neq a)$. 实际上, 令 $n=|k-j|$, 则当 $k>j$ 时, $k=j+n$, 故 [2]

$$
p_{jk}^{(n)}\geqslant p_{j\,j+1}\cdot p_{j+1\,j+2}\cdots p_{j+n-1\,k}=p^n>0,
$$

同样, 当 $j>k$ 时, $k=j-n$, 故

$$
p_{jk}^{(n)}\geqslant p_{j\,j-1}\cdot p_{j-1\,j-2}\cdots p_{j-n+1\,k}=q^n>0.
$$

其次, 此链只有四个闭集 $\{0\},\{a\},\{0,a\},E$. 0 及 a 均为吸引状态. $\overline{\{0\}}=\{0\}$ 而非 $\{o,a\}$, 设 $i\neq 0$, $i\neq a$, 则 $\overline{\{i\}}=E$, 又此链是 **可分的**(即不是不可分的).

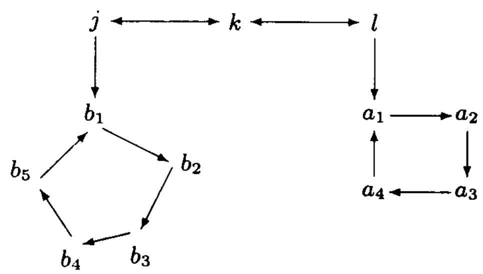
[1] 实际上, 由假设存在正整数 n,m, 使 $p_{jk}^{(n)}>0, p_{kl}^{(m)}>0$, 故 $p_{jl}^{(n+m)}=\sum\limits_r p_{jr}^{(n)}p_{rl}^{(m)}\geqslant p_{jk}^{(n)}p_{kl}^{(m)}$ 故 $j\Rightarrow l$.

[2] 此后所考虑的随机徘徊均设 $q_i=q>0, p_i=p>0$ 与 i 无关.

例 2 设 $\{x_n\}$ 为具反射壁 0 与 a 的随机徘徊， $0 < p < 1$. 此时任一状态 i 都可自 j 到达， i 可等于 j. 此链为不可分的.

例 3 如 $p_{jk} > 0$, 记作 $j \to k$; 如 $p_{jk} > 0, p_{kj} > 0$, 则记作 $j \longleftrightarrow k$. 如存在 $k \in A$, 使 $p_{jk} > 0$, 则记作 $j \to A$. 采用这些记号，可以用图形来表达运动的过程. 例如，图形 $0 \to 1 \to 2 \to \cdots$ 表示马氏链 $\{x_n\}$, 其转移概率 $p_{ij} = 0$, 如 $j \neq i+1$, $p_{i\,i+1} = 1$. 这时任二状态，不管相同与否，都不是互通的；任一形如 $(i, i+1, i+2, \cdots)$ 的集都是闭的.

又如，图形



表示， (a_1, a_2, a_3, a_4) 及 $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ 是二闭集，但 (j, k, l) 不是，等等.

读者可作例 1 及例 2 的图.

注意，如果自一个状态出发的只有一个箭头，这表明自此状态向箭头所指向的状态经一步转移而到达的概率为 1, 向其它状态经一步转移而到达的概率便为 0, 如上图中 $p_{a_2 a_3} = 1$, $p_{b_1 b_2} = 1$ 等等，这时一步转移概率完全确定；但如自一状态出发有一个以上的箭头，则因一步转移概率的数值未精确表出，故未完全确定，例如在上图中的 k 只表示 $p_{kl} > 0, p_{kk} > 0$, $p_{kj} > 0$, $p_{km} = 0$ $(m \overline{\in} (l, k, j))$, 但 p_{kl}, p_{kk}, p_{kj} 到底等于多少则未说明. 虽然如此，这图形仍然令人相当满意地反映了运动的进程.

不难证明以下各结论：

A. 当且只当对一切 $j \in C$, 一切 $k \overline{\in} C$, $p_{jk} = 0$ 时， C 是一闭集.

证 由闭集的定义必要性显然. 试用归纳法证充分性. 只要证明，对任意 $m \geqslant 1$, 一切 $j \in C$ 及 $k \overline{\in} C$, 有 $p_{jk}^{(m)} = 0$.

当 $m = 1$ 时，由假设此结论成立；今设对 m 成立，则

$$p_{jk}^{(m+1)} = \sum_{r \in C} p_{jr}^{(m)} p_{rk} + \sum_{r \overline{\in} C} p_{jr}^{(m)} p_{rk} = \sum_{r \in C} p_{jr}^{(m)} \cdot 0 + \sum_{r \overline{\in} C} 0 \cdot p_{rk} = 0. \square$$

B. 如在矩阵 $P^{(n)} = (p_{jk}^{(n)})$ 中，将某闭集 C 以外的状态所对应的一切行与列全部删去，则剩下来的行列仍构成一随机矩阵.

证 任取 $j \in C$, 显然 $p_{jk}^{(n)} \geqslant 0$. 又

$$1 = \sum_{k} p_{jk}^{(n)} = \sum_{k \in C} p_{jk}^{(n)}. \square$$

由 B 可见，对应于任一闭集 C, 可得原马氏链的子马氏链 (开始分布未定), 后者的转移概率矩阵是前者的转移概率矩阵的子矩阵，此时相空间自 E 缩小为 C.

C. 当且仅当 $p_{kk} = 1$ 时， k 为吸引的.

证 此由 A 及 $\sum_i p_{ki}=1$ 推出. □

D. $\overline{\{j\}}=\{j\}\cup\{k:j\Longrightarrow k\}$.

证 以 F 记右方的集, F 必是闭集. 因为, 否则必存在 $q\overline{\in}F, p\in F, (p\neq j)$, 使 $p\Longrightarrow q$; 但 $j\Longrightarrow p$, 故 $j\Longrightarrow q$ 而与 $q\overline{\in}F$ 矛盾.

今设 G 为含 j 的任一闭集, 则 $G\supset F$. 实际上, 如说存在 k, 使 $k\in F(k\neq j)$, $k\overline{\in}G$, 则由 G 的闭性 $j\not\Longleftrightarrow k$(此记号表 k 不能自 j 到达), 此与 $k\in F$ 矛盾.

E. 当且仅当每一状态可自任一其它状态到达时, 链为不可分的.

证 充分性: 设 C 为任一闭集, $j\in C$. 由 D 及假设, $\overline{\{j\}}=E$, 故 $C\supset E$. 但 $E\supset C$, 故 $C=E$.

必要性: 如说存在 j 及 k, $j\not\Longleftrightarrow k$, 由 D, $k\overline{\in}\overline{\{j\}}$, 于是存在非 E 的闭集 $\overline{\{j\}}$, 此与链的不可分性矛盾, 故 [1] $j\Longrightarrow k$. □

(二) 现在将状态分类. 首先可以假定, 对任一 $i\in E$, 必存在非负整数 m, 使 $P(x_m=i)>0$, 因为, 否则可将此 i 自 E 中删去, 而考虑状态空间 $E-\{i\}$, 它仍然是可列集. 对任一状态 j, 如 $P(x_m=i)>0$, 可考虑条件概率

$$f_{ij}^{(n)}=P(x_{m+k}\neq j,k=1,\cdots,n-1;x_{m+n}=j|x_m=i), \tag{1}$$

由链的齐次性, 利用联合分布可知 $f_{ij}^{(n)}$ 等于

$$\sum_{\left(\substack{s_k\neq j\\1\leqslant k<n}\right)} p_{is_1}\cdot p_{s_1s_2}\cdots p_{s_{n-1}j}. \tag{2}$$

如果 $P(x_0=i)=0$, $P(x_k\neq j,\ k=1,\cdots,n-1,x_n=j|x_0=i)$ 的值应不确定, 但为方便计, 我们也定义它的值为 (2). 这样, $f_{ij}^{(n)}$ 可直观地解释为: 在开始时, 体系位于 i 的条件下, 事件 "第 n 步时初次到达 j" 的条件概率.

由 $f_{ij}^{(n)},p_{ij}^{(n)}$ 的定义与证 §2.1(4) 类似, 可见 [2]

$$p_{ij}^{(n)}=f_{ij}^{(1)}p_{jj}^{(n-1)}+f_{ij}^{(2)}p_{jj}^{(n-2)}+\cdots+f_{ij}^{(n-1)}p_{jj}+f_{ij}^{(n)}, \tag{3}$$

这是今后要用到的重要关系式. 令

$$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}, \tag{4}$$

则 f_{ij} 为 "在开始时, 体系位于 i 的条件下, 经有穷步后终于到达 j" 的条件概率, 或简称 "自 i 出发终于到达 j" 的概率; 令

$$\mu_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ij}^{(n)}, \tag{5}$$

如 $f_{ij}=1$, 则可视 μ_{ij} 为自 i 出发, 初次到达 j 所走步数的数学期望; 特别, μ_{ii} 称为 i 的**平均回转时间**.

---

[1]由对称性, $k\Rightarrow j$; 从而 $j\Rightarrow j$. 故还证明了: 当且仅当 E 中任二状态互通时 (相同或不相同), 链不可分.

[2](3) 表示自 i 经 n 步到达 j 的概率, 等于自 i 经 k 步初次到 j, 然后自 j 经 $n-k$ 步到达 j 的概率 $f_{ij}^{(k)}p_{jj}^{(n-k)}$ 对 $k=1,\cdots,n$ 的和 (令 $p_{jj}^{(0)}=1$). 参看 §2.7 题 4.

令 $f_j^{(n)} = f_{jj}^{(n)}$, $f_j = f_{jj}$, $\mu_j = \mu_{jj}$.

状态分类的定义:

1° 如 $f_j = 1$, 则称 j 为 **常返的**; 如 $f_j < 1$, 则称 j 为 **非常返的**;

2° 如 $f_j = 1$, $\mu_j = \infty$, 称 j 为 **消极常返的**, 或称为 **零状态**;

3° 称 j 有 **周期**t, 如正整数集 [1] $(n : p_{jj}^{(n)} > 0)$ 的最大公约数为 t. 通常, 如 $t > 1$, 称 j 为 **周期的**, 如 $t = 1$, 称 j 为 **非周期的**;

4° 如 j 常返、非零 (即非消极常返) 、非周期, 则说 j 为 **遍历的**.

例如, 例 1 中的 $0, a$ 都是遍历状态, $j(0 < j < a)$ 的周期为 2, 而且以后会看到 [2], 它是非常返的; 但例 2 中任一状态都是常返的.

由周期的定义可见, 如 n 非 t 的倍数时, $p_{jj}^{(n)} = 0$; 然而, 即使 m 是 t 的倍数, 仍可能有 $p_{jj}^{(m)} = 0$. 虽然如此, 却可证明

F. 存在正整数 k_0, 使对一切正整数 $k \geqslant k_0$ 有 $p_{jj}^{(kt)} > 0$, 这里 $t(= t(j))$ 是 j 的周期.

证 记集 $(n : p_{jj}^{(n)} > 0)$ 为 $\{n_i\}$, 设其前 i 个数的最大公约数为 t_i, 则显然

$$t_1 \geqslant t_2 \geqslant \cdots \geqslant t.$$

既然 $t \geqslant 1$, 故存在正整数 l, 使 $t_l = t_{l+1} = \cdots = t$, 因而 t 是 $n_1, \cdots, n_l$ 的最大公约数. 由初等数论知存在正整数 k_0, 使对任一不小于 k_0 的正整数 k 有

$$kt = d_1 n_1 + \cdots + d_l n_l,$$

其中 d_i 为某正整数, $i = 1, \cdots, l$. 于是

$$p_{jj}^{(kt)} \geqslant \prod_{i=1}^{l} p_{jj}^{(d_i n_i)} \geqslant \prod_{i=1}^{l} [p_{jj}^{(n_i)}]^{d_i} > 0. \ \square$$

可以给出周期的一个等价的定义:

G. 设正整数集 $(n : f_j^{(n)} > 0)$ 的最大公约数为 d, 则 $d = t$.

证 由 (3) $p_{jj}^{(n)} \geqslant f_j^{(n)}$, 故 $(n : f_j^{(n)} > 0) \subset (n : p_{jj}^{(n)} > 0)$. 从而 $d \geqslant t$. 如果 $d = 1$, 则结论显然成立. 如果 $d > 1$, 则对每 $r = 1, \cdots, d-1$, 利用 (3), 得

$$p_{jj}^{(r)} = f_j^{(1)} p_{jj}^{(r-1)} + f_j^{(2)} p_{jj}^{(r-2)} + \cdots + f_j^{(r-1)} p_{jj} + f_j^{(r)}.$$

但由 d 的定义, 知 $f_j^{(1)} = f_j^{(2)} = \cdots = f_j^{(r)} = 0$, 故 $p_{jj}^{(r)} = 0$. 其次, 对 $n = d + r$ 用 (3), 同样得 $p_{jj}^{(d+r)} = f_j^{(d)} p_{jj}^{(r)} = 0$. 一般地, 得

$$p_{jj}^{(kd+r)} = f_j^{(d)} p_{jj}^{((k-1)d+r)} + f_j^{(2d)} p_{jj}^{((k-2)d+r)} + \cdots + f_j^{(kd)} p_{jj}^{(r)}.$$

利用归纳法, 可见 $p_{jj}^{(kd+r)} = 0$, 换言之, 如 n 非 d 的整倍数, 则 $p_{jj}^{(n)} = 0$. 从而 $(n : p_{jj}^{(n)} > 0)$ 中的数都可被 d 整除, 故 $t \geqslant d$. 于是 $t = d$. $\square$

(三) 现对各类状态证明两个重要的定理, 它们可用作状态分类的判别法.

---

[1]我们只对使此集非空的 j 定义周期.

[2]例如, 见 §2.7 题 17; 后一结论见 §2.4 系 1, 注意例 2 为不可分链.

先引进一个有力的工具 - 母函数.

设 $\{a_n, n \geqslant 0\}$ 为一列实数，如级数

$$A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \tag{6}$$

在某一区间 $(-s_0, s_0)(s_0 > 0)$ 中收敛，就说 $A(s)$ 是 $\{a_n\}$ 的 **母函数**. 特别，如果 $\{a_n\}$ 是一分布， $A(s)$ 就在 $(-1,1)$ 中收敛.

容易看出，如果 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的母函数分别为 $A(s), B(s)$, 定义实数列 $\{c_n\}$, 其中

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \tag{7}$$

则 $\{c_n\}$ 的母函数为

$$C(s) = A(s)B(s). \tag{8}$$

这只要展开 (8) 的右方比较系数就可证明. 称由 (7) 定义的 $\{c_n\}$ 为 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的 **卷积**.(8) 式表示，可变卷积运算为乘法运算.

定理 1 当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$ 时， j 为非常返的 (因而此时 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$).

证 补定义 $p_{jj}^{(0)} = 1$, $f_j^{(0)} = 0$. 由 (3) 对 $n \geqslant 1$ 有

$$p_{jj}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} p_{jj}^{(k)} f_j^{(n-k)}. \tag{9}$$

令 $\{p_{jj}^{(n)}\}, \{f_j^{(n)}\}$ $(n \geqslant 0$ 变动) 的母函数各为 $P(s)$ 及 $F(s)$, 以 s^n 乘 (9) 的二方，对 $n \geqslant 1$ 求和，并注意 $p_{jj}^{(0)} = 1$ 及 $f_j^{(0)} = 0$, 即得

$$P(s) - 1 = P(s)F(s).$$

当 $0 \leqslant s < 1$ 时， $F(s) \neq 1$, 故

$$P(s) = 1/[1 - F(s)]. \tag{10}$$

其次，由于 $p_{jj}^{(n)} \geqslant 0$, 当 $s \uparrow 1$ 时 $P(s)$ 不减，故对每一 N 有

$$\sum_{n=0}^{N} p_{jj}^{(n)} \leqslant \lim_{s\uparrow 1} P(s) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}. \tag{11}$$

令 $N \to \infty$, 由 (10) 即得

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \lim_{s\uparrow 1} P(s) = \lim_{s\uparrow 1} \frac{1}{1 - F(s)}. \tag{12}$$

既然证明 (11) 的方法同样可用于 $F(s)$, 故

$$\lim_{s\uparrow 1} F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_j^{(n)} = f_j.$$

从而当且仅当 $f_j < 1$ 时，即 j 为非常返时， $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$. □

以后 $\frac{a}{\pm\infty}$ (a 为实数) 均理解为 0.

定理 2 设 j 为常返状态，有周期 t, 则

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(nt)} = t/\mu_j, \tag{13}$$

其中 $\mu_j = \mu_{jj}$ 由 (5) 定义.

证 对 $n \geqslant 0$, 令 $r_n = \sum\limits_{v=n+1}^{\infty} f_v$, 这里 $f_v = f_j^{(v)}$. 于是

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n = \mu_j, \tag{14}$$

$r_0 = 1$. 以 $f_v = r_{v-1} - r_v$ 代入 (3), 并记 $p_{jj}^{(v)}$ 为 p_v, 得

$$p_n = -\sum_{v=1}^{n}(r_v - r_{v-1})p_{n-v}, \text{ 即} \sum_{v=0}^{n} r_v p_{n-v} = \sum_{v=0}^{n-1} r_v p_{n-1-v},$$

此表 $\sum\limits_{v=0}^{n} r_v p_{n-v}$ 之值与 n 无关；既然 $r_0 p_0 = 1$, 得

$$\sum_{v=0}^{n} r_v p_{n-v} = 1 \quad (n \geqslant 0). \tag{15}$$

设 $\lambda = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, p_{nt}$, 因当 k 非 t 的倍数时， $p_k = 0$, 故

$$\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, p_{nt} = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, p_k. \tag{16}$$

必存在子列 $\{n_m\}$, $n_m \to \infty$, 使 $\lambda = \lim\limits_{m\to\infty} p_{n_m t}$. 任意取 s 使 $f_s > 0$; 由 G, t 可整除 s. 利用 (3) 及 $f_j = 1$ 得 [1]

---

[1]用到易证的不等式：

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sum_{\substack{v=1\\ v\neq s}}^{n_m t} f_v p_{n_m t - v} \leqslant \left(\sum_{\substack{v=1\\ v\neq s}} f_v\right).$$

实际上, 对任意 $\varepsilon > 0$,, 存在 M, 使 $m > M$ 时, $p_m < \lambda+\varepsilon$; 也存在 N, 使 $\sum\limits_{v=N}^{\infty} f_v < \varepsilon$. 于是对任意满足 $n_m t - N > M$ 的 m, 有

$$\sum_{\substack{v=1\\ v\neq s}}^{n_m t} f_v p_{n_m t - v} \leqslant \sum_{\substack{v=1\\ v\neq s}}^{N} f_v p_{n_m t - v} + \varepsilon \leqslant \left(\sum_{\substack{v=1\\ v\neq s}}\right)(\lambda+\varepsilon) + \varepsilon,$$

由 ε 的任意小性即得证以上不等式.

$$\begin{aligned}\lambda = \varliminf_{m\to\infty} p_{n_m t} &= \varliminf_{m\to\infty} \left\{ f_s p_{n_m t-s} + \sum_{\substack{v=1\\ v\neq s}}^{n_m t} f_v p_{n_m t-v} \right\} \\ &\leqslant f_s \varliminf_{m\to\infty} p_{n_m t-s} + \left(\sum_{\substack{v=1\\ v\neq s}} f_v \right) \cdot \varlimsup_{m\to\infty} p_m \\ &= f_s \varliminf_{m\to\infty} p_{n_m t-s} + (1-f_s)\lambda, \end{aligned} \tag{16'}$$

于是 $\varliminf_{m\to\infty} p_{n_m t-s} \geqslant \lambda$, 故由 (16), $\lim_{m\to\infty} p_{n_m t-s} = \lambda$. 这对每一个使 $f_s > 0$ 的 s 及每一个使 $\lim_{m\to\infty} p_{n_m t} = \lambda$ 的子列 $\{n_m\}$ 正确, 因此, 由于 s 是 t 的倍数, 得 $\lim_{m\to\infty} p_{n_m t-2s} = \lim_{m\to\infty} p_{(n_m t-s)-s} = \lambda, \cdots$ 将此事实连续用若干次后可见 $\lim_{m\to\infty} p_{n_m t-u} = \lambda$ 对任意形如 $u = \sum_{i=1}^{l} c_i t_i$ 的 u 正确, 这里 c_i 及 t_i 都是正整数, 使 $f_{t_i} > 0, i = 1, \cdots, l$. 既然 t 也是 $(n : f_n > 0)$ 的最大公约数, 象证明 F 一样, 可见必存在满足 $f_{t_i} > 0$ 的 $t_i, i = 1, \cdots, l$, 使 $t_1, \cdots, t_l$ 的最大公约数为 t. 故再用一次证 F 时用过的数论中的事实, 便知当 k 不小于某正整数 k_0 时, 必有正整数 c_i 使

$$kt = \sum_{i=1}^{l} c_i t_i.$$

这样, 便证明了: 对每个 $k \geqslant k_0$, 有

$$\lim_{m\to\infty} p_{(n_m-k)t} = \lambda.$$

今在 (15) 中令 $n = (n_m - k_0)t$, 并注意 v 非 t 之正整数倍时, $p_v = 0$, 就得

$$\sum_{v=0}^{n_m-k_0} r_{vt} p_{(n_m-k_o-v)t} = 1.$$

令 $m \to \infty$, 易见

$$\lambda \sum_{v=0}^{\infty} r_{vt} = 1,$$

只要级数 $\sum_{v=0}^{\infty} r_{vt} < \infty$, 否则 $\lambda = 0$. (实际上, 当 $n_m - k_0 \geqslant N$ 时, 有

$$1 = \sum_{v=0}^{n_m-k_0} r_{vt} p_{(n_m-k_0-v)t} = \sum_{v=0}^{N} + \sum_{v=N+1}^{n_m-k_0}$$

(被加项因与左方的相同而省写), 右方第二项不超过 $\sum_{v=N+1}^{n_m-k_0} r_{vt}$. 如果 $\sum_{v=0}^{\infty} r_{vt} < \infty$, 于上式中先令 $m \to \infty$, 再令 $N \to \infty$, 即得 $1 = \lambda \sum_{v=0}^{\infty} r_{vt}$. 如 $\sum_{v=0}^{\infty} r_{vt} = \infty$, 在 $1 \geqslant \sum_{v=0}^{N} r_{vt} p_{(n_m-k_0-v)t}$ 中,

先令 $m\to\infty$, 次令 $N\to\infty$, 得 $1\geqslant\lambda\sum\limits_{v=0}^{\infty}r_{vt}$, 故 $\lambda=0$.) 在任一情形下都有

$$\lambda=1\Big/\sum_{v=0}^{\infty}r_{vt}.$$

但因当 v 非 t 的正整数倍时， $f_v=0$, 故由 r_n 的定义易见 $r_{vt}=\frac{1}{t}\sum\limits_{j=vt}^{vt+t-1}r_j$. 从而由 (14)

$$\sum_{v=0}^{\infty}r_{vt}=\frac{1}{t}\sum_{v=0}^{\infty}r_v=\frac{\mu_j}{t},$$

于是证明了 $\lambda=\frac{t}{\mu_j}$.

上述计算 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,p_{nt}$ 的方法，经明显的修改后[1]，可用于计算 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,p_{nt}$. 结果仍有 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,p_{nt}=\frac{t}{\mu_j}$. □

系 1 如 j 为遍历的，则 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{jj}^{(n)}=\frac{1}{\mu_j}>0$; 如 j 为常返状态，则它为零状态的充分与必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{jj}^{(n)}=0$.

证 只要注意当 n 非 t 之正整数倍时， $p_{jj}^{(n)}=0$. □

§2.3 相空间的分解

上节中已看到每一闭集对应于一子马氏链，自然希望把这一思想深入地分析一下：是否任一马氏链可分解为若干子马氏链的和？所谓和又是什么意思等等. 既然闭集对应于子马氏链，这个问题用闭集来表达便会更清楚些，因为集的 "和" 等概念是十分明确的. 如果能把相空间的分解研究清楚，它的结构也就了如指掌了.

要研究分解，应先从某些状态的共性着手.

H. 设 j 为常返状态， $j\Longrightarrow k, j\neq k$, 则 $f_{kj}=1$.

证[2] 由于 $j\Longrightarrow k$, 可见自 j 出发，终于要到达 k, 而且中间不经过 j 的概率应大于 0; 因此，必存在 $N(>0)$, 使自 j 出发，于第 N 步时初次到达 k, 而且中间不经过 j 的概率 ${}_jf_{jk}^{(N)}>0$, 如设 $f_{kj}<1$, 则自 j 出发，不回到 j 的概率至少为 ${}_jf_{jk}^{(N)}(1-f_{kj})>0$, 此与 j 为常返的假设矛盾. □

今任取 j,k 为满足 H 中条件的二状态，由 H 知，存在 N,M, 使 $\alpha=p_{jk}^{(N)}>0,\beta=p_{kj}^{(M)}>0$; 对任意正整数 n, 有

$$\left.\begin{aligned}p_{jj}^{(n+N+M)}&\geqslant p_{jk}^{(N)}p_{kk}^{(n)}p_{kj}^{(M)}=\alpha\beta p_{kk}^{(n)},\\p_{kk}^{(n+N+M)}&\geqslant p_{kj}^{(M)}p_{jj}^{(n)}p_{jk}^{(N)}=\alpha\beta p_{jj}^{(n)}.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

由此关系式立得

---

[1]实际上，令 $\widetilde{\lambda}=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,p_{nt}=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,(p_k:p_k>0)$. 对 $\widetilde{\lambda}$ 可得与 (16′) 类似的反向不等式. 只需在 (16′) 中分别以 $\widetilde{\lambda},\overline{\lim},\underline{\lim}$ 代 $\lambda,\underline{\lim},\overline{\lim}$ 即得. 由是有 $\overline{\lim\limits_{m\downarrow\infty}}\,p_{n_mt-s}\leqslant\widetilde{\lambda}$, 由此可推得 $\widetilde{\lambda}=\lim\limits_{m\to\infty}p_{n_mt-s}=\lambda$. 以下推理完全一样.

[2]参看 §2.7 题 4. 注意由 $j\Rightarrow k$ 及上节 (3) 式， $f_{jk}>0$.

1° 因 j 常返，由上节定理 1, $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$. 由 (1) 知 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{kk}^{(n)} = \infty$, 再由该定理知 k 常返.

2° 如 j 为零状态，由上节系 1, $p_{jj}^{(n)} \to 0$, 由 (1)$p_{kk}^{(n)} \to 0$ $(n \to \infty)$, 既然 k 为常返的，再用上节系 1 知 k 为零状态.

3° 设 j 的周期为 t, 由于

$$p_{jj}^{(N+M)} \geqslant p_{jk}^{(N)} p_{kj}^{(M)} = \alpha\beta > 0,$$

故 t 可整除 $N+M$. 取 n 使 $p_{kk}^{(n)} > 0$, 由 (1) 中第一式知 $p_{jj}^{(n+N+M)} > 0$, 故 t 也可整除 $n+N+M$, 从而也可整除 n. 这表示 t 是 $(n : p_{kk}^{(n)} > 0)$ 的公约数，故 t 应不大于其最大公约数，即不大于 k 的周期 t'. 同样可证 $t' \leqslant t$. 于是 j, k 有相同的周期 t.

这三性质均适用于常返状态.

对非常返的 j 及 k 如果它们互通，那么 (1) 式仍然成立，重复 3° 的推理，即知

4° 二互通的非常返状态 j 及 k 有相同的周期 $t(\geqslant 1)$.

由此可证

定理 1(分解定理) 对任一马氏链，相空间 E 可唯一地分解为有穷或可列多个不相交的子集 $D, C_1, C_2, \cdots$ 的和，使

(a) 任一 C_j 是由常返状态构成的不可分闭集，C_i 中的状态不能自 $C_j (i \neq j)$ 中的状态到达；

(b) C_j 中的状态属同类：或者都是零的，或者都是遍历的，或者都是有周期的非零的状态 (在任何一种情况下，C_j 中各状态都有相同的周期), 而且 $f_{ik} = 1$ $(i \in C_j, k \in C_j)$.

(c) D 由一切非常返状态构成 (D 中的状态不可能自 C_j 中的状态到达).

证 在全体常返状态构成的集 F 中，考虑关系 $\Longrightarrow$("到达" 关系), 它是自反的：$j \Longrightarrow j$(因为，否则一切 $p_{jj}^{(n)} = 0$. 由上节 (3), $f_j = 0$, 这与 j 为常返矛盾); 它是对称的：如 $j \Longrightarrow k$, 则 $k \Longrightarrow j$ (由 H); 它是推移的：如 $j \Longrightarrow k$, $k \Longrightarrow l$, 则 $j \Longrightarrow l$, (由 $p_{jl}^{(n+m)} \geqslant p_{jk}^{(n)} p_{kl}^{(m)}$). 故此关系将 F 唯一地分解为有穷或可列多个不相交的集 $C_1, C_2, \cdots$ 的和. 当且仅当 j, k 互通时，此二状态属于同一 C_i. 利用 2°, 3° 及 H 即得证 (a),(b). 令 $D = E \setminus F$. 由 C_i 的闭性即知 D 中的状态不能自 C_i 中状态到达. □

至于集 D, 则它可能是闭集，也可能不是；关于周期性质见 4°. 以后会证明，如 E 只含有穷多个状态，那么 D 一定不是闭的 (见 §2.7 题 17).

系 1 对不可分马氏链，一切状态属同类：或都是非常返的，或都是零的，或都是遍历的，或都是非零，常返而有周期的. 在任一情况下，它们有相同的周期.

证 此时 E 或者重合于某一 C_i, 于是系 1 是分解定理的特殊情形；或者重合于 D, 利用 §2.2 E 后，由 H 仍知它们有相同的周期. □

总结上述，得表如下：

E

<table>
<tr><td rowspan="3">D=(非常返状态), 如 $j \Longleftrightarrow k$,
则 k 有相同的周期</td><td colspan="3">F =(常返状态)</td></tr>
<tr><td>零状态所成闭集
$C_{i_1}, C_{i_2}, \cdots$</td><td>遍历状态所成闭集
$C_{j_1}, C_{j_2}, \cdots$</td><td>非零、有周期状态所成闭集
$C_{k_1}, C_{k_2}, \cdots$</td></tr>
<tr><td colspan="3">每一闭集 C_l 中的状态有相同的周期 $t_l \geqslant 1$, C_l 不可分</td></tr>
</table>

由此表可以清楚地想象到运动的情况：如果体系 Σ 自闭集 C_l(简记为 C) 中某状态出发，那么它只能在 C 内随机运动；如果自 D 中某状态出发，便有两个可能，或者它永远在 D 中随机运动，或者经有穷步后落到某闭集 C 中去，此后就永远在 C 中运动.

然而，它在 D 中是怎样运动的呢？它在 C 中又是怎样运动的呢？

关于前一问题，不久以前 (1955) 才研究得比较清楚 [1]，但这里不深入讨论，只在下面 §2.7 题 15–19 中约略涉及. 现在来考虑后一问题.

每闭集产生一子马氏链 (除了开始分布未定外)，而且不可分闭集产生不可分的子马氏链. 既然每一 C 都是不可分闭集，故只要考虑不可分子马氏链就够了. 后者的相空间为 C.

现在固定一状态 $i\in C$, 并以 t 表 C 中元共同的周期. 先证明命题

I. 对每 $j\in C$, 如果 $p_{ij}^{(n)}>0$, 则 [2]

$$n=kt+t_j\quad(0<t_j\leqslant t),$$

即 $n\equiv t_j(\mathrm{mod}\,t)$; 其次，存在一正整数 $k(j)$, 使对一切 $k\geqslant k(j)$, 有 $p_{ij}^{(kt+t_j)}>0$.

证 因 C 中元互通，故有 m 使 $p_{ji}^{(m)}>0$. 今如 $p_{ij}^{(n)}>0, p_{ij}^{(n')}>0$, 则 $p_{ii}^{(n+m)}\geqslant p_{ij}^{(n)}p_{ji}^{(m)}>0$. 故 $n+m\equiv 0(\mathrm{mod}\,t)$. 同样， $n'+m\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,t)$. 于是 $n-n'\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,t)$, 或 $n\equiv n'\ (\mathrm{mod}\,t)$. 这表示 n 与 n' 各被 t 除后有相同的余数 t_j 而得证第一结论. 由于互通性，至少存在一个 k_0, 使 $p_{ij}^{(k_0t+t_j)}>0$; 根据上节 F, 存在 k_1, 使 $m\geqslant k_1$ 时， $p_{jj}^{(mt)}>0$. 因此，如 $k\geqslant k_0+k_1$, 就有 $k-k_0\geqslant k_1$ 及

$$p_{ij}^{(kt+t_j)}\geqslant p_{ij}^{(k_0t+t_j)}p_{jj}^{(k-k_0)t}>0. \ \square$$

这样，每一 $j\in C$ 对应于一正整数 $t_j(\leqslant t)$. 对应于同一正整数 r 的 j 构成 C 的一子集 G_r, $r=1,\cdots,t$. 而且

$$C=\bigcup_{r=1}^{t}G_r,\quad G_r\cap G_s=\phi\quad(r\neq s).$$

根据命题 1 及 G_r 的定义，可见自 i 出发，在而且仅在 $r,t+r,2t+r,\cdots,kt+r,\cdots$ 等步上， Σ 落于 G_r 中. 实际上，如 $p_{ij}^{(kt+r)}>0$, 则 j 对应于余数 r, 故 $j\in G_r$; 反之，如经 n 步 Σ 到达 G_r, 由于 G_r 是可列集，必有 $j\in G_r$ 使 $p_{ij}^{(n)}>0$, 由命题 I 及 G_r 的定义得 $n=kt+r$.
即 $n\equiv t_j(\mathrm{mod}\,t)$; 其次，存在一正整数 $k(j)$, 使对一切 $k\geqslant k(j)$, 有 $p_{ij}^{(kt+t_j)}>0$.

证 因 C 中元互通，故有 m 使 $p_{ji}^{(m)}>0$. 今如 $p_{ij}^{(n)}>0, p_{ij}^{(n')}>0$, 则 $p_{ii}^{(n+m)}\geqslant p_{ij}^{(n)}p_{ji}^{(m)}>0$. 故 $n+m\equiv 0(\mathrm{mod}\,t)$. 同样， $n'+m\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,t)$. 于是 $n-n'\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,t)$, 或 $n\equiv n'\ (\mathrm{mod}\,t)$. 这表示 n 与 n' 各被 t 除后有相同的余数 t_j 而得证第一结论. 由于互通性，至少存在一个 k_0, 使 $p_{ij}^{(k_0t+t_j)}>0$; 根据上节 F, 存在 k_1, 使 $m\geqslant k_1$ 时， $p_{jj}^{(mt)}>0$. 因此，如 $k\geqslant k_0+k_1$, 就有 $k-k_0\geqslant k_1$ 及

$$p_{ij}^{(kt+t_j)}\geqslant p_{ij}^{(k_0t+t_j)}p_{jj}^{(k-k_0)t}>0. \ \square$$

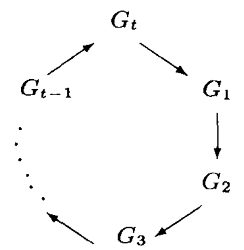
[1] 见 [14]§I,17 及其后所引文献.

[2] 着重点是：余数 t_j 不随满足 $p_{ij}^{(n)}>0$ 的 n 而变.

这样，每一 $j \in C$ 对应于一正整数 $t_j(\leqslant t)$. 对应于同一正整数 r 的 j 构成 C 的一子集 $G_r, r=1,\cdots,t$. 而且

$$C=\bigcup_{r=1}^{t} G_r,\quad G_r \cap G_s=\phi \quad (r \neq s).$$

根据命题 1 及 G_r 的定义，可见自 i 出发，在而且仅在 $r, t+r, 2t+r, \cdots, kt+r, \cdots$ 等步上，Σ 落于 G_r 中. 实际上，如 $p_{ij}^{(kt+r)}>0$, 则 j 对应于余数 r, 故 $j \in G_r$; 反之，如经 n 步 Σ 到达 G_r, 由于 G_r 是可列集，必有 $j \in G_r$ 使 $p_{ij}^{(n)}>0$, 由命题 I 及 G_r 的定义得 $n=kt+r$. 最好用图形来表达这一事实. 把 t 个集 $G_1, G_2, \cdots, G_t$ 顺序排列圆形，使 G_t 与 G_1 相邻 $(i \in G_t)$. 于是经一步转移后，自 G_r 中的状态必落于 G_{r+1} 中某一状态上 ($t+1$ 看成 1), 这种圆圈形运动是决定性的，然而到底落在 G_{r+1} 中哪一状态则是随机的，而且命题 I 还指出：对任一 $j \in G_r$, 除可能对有穷个 k 以外，总有 $p_{ij}^{(kt+r)}>0$.



这种半决定性半随机性的运动使我们想到，从 G_r 中任一状态出发，经 t 步后必回到 G_r 中某一状态. 因此，如果考虑以随机矩阵 P^t 为转移概率矩阵的新马氏链，那么对此新马氏链，每一 G_r 形成一个闭集，由命题 I 第二结论，它还是不可分的.

以上讨论中还有一个漏洞：我们先固定了一个 $i \in C$, 然后相对于此 i 而将 C 分成不相交的 $G_1, G_2, \cdots, G_t$. 试问这种分类是否依赖于 i 呢？为证与 i 无关，应证如相对于 i, j 与 k 属于同一子集 G 时，那么相对于任一 i', 它们仍属于同一子集. 实际上，相对于 i 及 i' 而分得的子集分别记为 $G_1^{(i)}, \cdots, G_t^{(i)}$ 及 $G_1^{(i')}, \cdots, G_t^{(i')}$. 设 j, k 均属于 $G_r^{(i)}$, $i' \in G_s^{(i)}$, 则当 $r \geqslant s$ 时，自 i' 出发，只可能在 $r-s, t+(r-s), 2t+(r-s), \cdots$ 等步上到达 j, k, 故 j, k 属于 $G_{r-s}^{(i')}$; 类似地，如 $s>r$, 则 j, k 属于 $G_{r-s+t}^{(i')}$.

总结上述，便得

定理 2 设不可分马氏链的转移概率矩阵为 $P=(p_{ij})$, 有周期 t 及相空间 C. 于是可唯一地表 C 为

$$C=\bigcup_{r=1}^{t} G_r,\quad G_r \cap G_s=\phi \quad (r \neq s),$$

使经一步的转移后，自 G_r 中任一状态必落于 $G_{r+1}(G_{t+1}=G_1)$ 中某一状态上；如只在时刻 $0, t, 2t, 3t, \cdots$ 上考虑此链，则得一转移概率矩阵为 P^t 的新马氏链. 在此新链中，每一 G_r 形成一不可分闭集，而且 G_r 中任一状态 k 都是周期为 1 的状态；如果原来的链常返，那么新链也常返.

实际上，只要补证最后一句话. 由命题 I 知自某一项以后，一切 $p_{kk}^{(nt)}>0$, 可见在新链中，k 的周期为 1. 常返性则是由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_k^{(nt)}=\sum_{n=1}^{\infty} f_k^{(n)}=1. \ \square$$

§2.4　遍历定理

考虑 n 步转移概率 $p_{jk}^{(n)}$. 在实际中常常碰到这种情形：当 n 甚大时，$p_{jk}^{(n)}$ 与一常数 a_k 甚接近而且此常数与 j 无关. 这反映下列事实：经 n 步转移后，当 n 甚大时，Σ 位于 k 的概率，几乎不依赖于它开始时所处的位置.

数学上的精确提法是：

1° 试问 $\lim p_{jk}^{(n)}$ 是否存在？

2° 如存在，此极限是否与 j 无关？

结果发现答案未必常常是肯定的，而与 j,k 所处的类有关.

在马氏链理论中，有关这一类问题的定理统称 **遍历定理**.

设相空间 E 已按分解定理分解为 $D,C_1,C_2,\cdots$. 需要分别考虑各种情况.

(一) $k\in D$ 或 k 为零状态时.

定理 1　如 $k\in D$ 或 k 为零状态，则对任意 j 有 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)}=0$.

证　回忆 §2.2(3), 取 N 使 $1\leqslant N\leqslant n$, 有

$$p_{jk}^{(n)}=f_{jk}^{(n)}+f_{jk}^{(n-1)}p_{kk}^{(1)}+\cdots+f_{jk}^{(N)}p_{kk}^{(n-N)}+\cdots+f_{jk}^{(1)}p_{kk}^{(n-1)}, \tag{1}$$

$$p_{jk}^{(n)}\leqslant\sum_{m=N+1}^{n}f_{jk}^{(m)}+\sum_{m=1}^{N}f_{jk}^{(m)}p_{kk}^{(n-m)}.$$

先令 $n\to\infty$, 由 §2.2 定理 1, 2, 右方第二项趋于 0; 再令 $N\to\infty$, 因 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}f_{jk}^{(m)}\leqslant 1$, 右方趋于 0. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{jk}^{(n)}=0$. □

系 1　有穷链 (即只有有穷个状态的马氏链) 既不可能只有非常返状态，也不可能有零状态.

证　设 $E=D$. 由定理 1 $p_{jk}^{(n)}\to 0$, $j\in E$, $k\in E$. 令 $E=(0,1,\cdots,a)$ $(a<\infty)$, 则 $1=\sum\limits_{k=0}^{a}p_{jk}^{(n)}$. 令 $n\to\infty$ 即得 $1=0$ 矛盾. 此得证第一结论.

将 E 分解为 $D,C_1,\cdots,C_k$. 设有一零状态 i, i 属于某 C. C 是不可分的有穷闭集，故有 $1=\sum\limits_{k\in C}p_{ik}^{(n)}$. 既然 C 中状态都是零的，而 C 又为有穷集，令 $n\to\infty$, 由定理 1 仍得 $1=0$, 矛盾. 此得证第二结论.　□

系 2　如果存在一个零状态，则存在无穷多个零状态.

证　与系 1 第二部分证明相仿.　□

由系 1 及系 2 可见，对具反射壁的随机徘徊，全体状态都是周期为 2 的非零的常返状态.

(二) k 为非零的常返状态时.

设 k 的周期为 $t(\geqslant 1)$, 引进数值

$$f_{jk}(r)=\sum_{m=0}^{\infty}f_{jk}^{(mt+r)}\quad (r=1,2,\cdots,t;\ j\in E),$$

因此，$f_{jk}(r)$ 为自 j 出发，在某 n 步 $(n\equiv r(\bmod t))$ 上初次到达 k 的概率；故 $\sum\limits_{r=1}^{r} f_{jk}(r)=f_{jk}$.

注意，如 j 常返，但与 k 不属于同一闭集，则显然 $p_{jk}^{(n)}=0$, 一切 n, 故 $p_{jk}^{(n)}\to 0$. 至于其它的 j, 这极限可不存在，但有下列一般性的定理 2:

定理 2 如 k 为非零的常返状态，周期为 t, 则对任意 j, 有

$$\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{(nt+r)}=f_{jk}(r)\cdot\frac{t}{\mu_k}\quad (1\leqslant r\leqslant t).$$

证 由 (1), 并注意 $p_{kk}^{(l)}=0,\ l\not\equiv 0(\bmod t)$, 对 $N\leqslant n$, 有

$$\sum_{m=0}^{N} f_{jk}^{(mt+r)}p_{kk}^{(n-m)t}\leqslant p_{jk}^{(nt+r)}\leqslant \sum_{m=N+1}^{\infty} f_{jk}^{(mt+r)}+\sum_{m=0}^{N} f_{jk}^{(mt+r)}p_{kk}^{(n-m)t},$$

于此式中令 $n\to\infty$, 并利用 §2.2 定理 2; 再令 $N\to\infty$, 并回忆 $f_{jk}(r)$ 的定义，即得所欲证. □

试较深入地研究 $f_{jk}(r)$. 以 C 泛指分解定理中任一 C_i, 其中元是周期为 t 的常返状态. 对任意 $j\in E$, 如 $P(x_0(\omega)=j)>0$, 引进条件概率

$$f(j,r,G_v)=P(\text{对某}n\equiv r(\bmod t), x_n(\omega)\in G_v|x_0(\omega)=j),$$
$$f(j,C)=P(\text{对某}n, x_n(\omega)\in C|x_0(\omega)=j),$$

这里 G_v 由 §2.3 定理 2 来定义. 容易看出

$$f(j,C)=\sum_{v=1}^{t} f(j,r,G_v). \tag{2}$$

实际上，只要证明

$$P(\text{对某}n, x_n\in C|x_0=j)=P(\text{对某}n\equiv r(\bmod t), x_n\in C|x_0=j).$$

左方值显然不小于右方值. 反之，如 $x_n\in C$, 由 C 的闭性，只要任取 $m\geqslant n, m\equiv r(\bmod t)$, 就有 $x_m\in C$. 故右方值也不小于左方值.

由定义看出，$f(j,C)$ 是自 j 出发，终于要落于 C 中的概率，故

$$\sum_{C} f(j,C)\leqslant 1,$$

这里求和号对一切不可分闭集 $C_1, C_2,\cdots$ 进行，而 $1-\sum\limits_{C} f(j,C)$ 为自 j 出发，永远留在 D 中的概率.

引理 1 如 $k\in G_v$, 则对任意 $r=1,2,\cdots,t$, 有

$$f(j,r,G_v)=f_{jk}(r); \tag{3}$$

对任意 $k\in C$, 有

$$f(j,C)=f_{jk}. \tag{4}$$

证 显然 $f_{jk}(r) \leqslant f(j,r,G_v)$. 反之，有

$$f_{jk}(r) \geqslant \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i\in G_v} P(x_{nt+r}=i,\ x_{st+r}\overline{\in} G_v,\ 0\leqslant s<n|x_0=j)\cdot f_{ik}(t)$$

但当 i,k 属于同一 G_v 时，由于周期为 t 及 §2.3H,

$$f_{ik}(t)=f_{ik}=1,$$

故 $f_{jk}(r)\geqslant f(j,r,G_v)$, 此得证前一结论. 后一结论的证明类似. □

利用此引理便可改写定理 2 为

定理 2′ 如 k 为非零的常返状态，$k\in G_v$, 则

$$\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{(nt+r)} = f(j,r,G_v)\frac{t}{\mu_k}\ (j\in E). \tag{5}$$

定理 2′ 比定理 2 更深刻，因 (5) 中右方 $\frac{t}{\mu_k}$ 的系数 $f(j,r,G_v)$ 只依赖于 k 所在的子类 G_v, 而不依赖于 k 本身.

至此，$p_{jk}^{(n)}$ 当 $n\to\infty$ 时的性质已研究清楚：

α, 当 $k\in D$, 或 k 为零状态，或链为不可分而且周期 $t=1$ 时，问题 1° 2° 有肯定答案.

β. $\lim\limits_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)}$ 未必存在；但如 k 有周期为 t, 则对任意 $1\leqslant r\leqslant t$, 子列 $\{p_{jk}^{(nt+r)}\}$ 总有极限；如果理解 $\frac{t}{\infty}=0$, $\mu_k=\infty(k\in D)$, 则 (5) 对任一对 $j,k\in E$ 都成立. 由此即可推出

γ. 存在平均极限：此可叙述为

定理 3 对任意 $j\in E, k\in E$, 存在 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{v=1}^{n}p_{jk}^{(v)}$, 而且

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n}p_{jk}^{(v)} &= 0,\ \text{如}k\in D\text{或}k\text{为零状态};\\ &= f(j,C)\cdot\frac{1}{\mu_k},\ \text{如}k\in C.\end{aligned}$$

证 如 $k\in D$ 或为零状态时，结论由定理 1 推出. 今设 $k\in C$ 而且有周期 t.

注意数学分析中的下列事实 [1]

设有 t 个序列 $\{a_{nt+s}\}, n=0,1,2,\cdots\ (s=1,2,\cdots,t)$, 使对每一序列，均存在 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{nt+s}=b_s$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n}a_v=\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}b_s.$$

---

[1]其证明甚易：因为，如 $c_n\to c$, 则 $\frac{1}{n}\sum\limits_{v=1}^{n}c_v\to c$, 由此即易推得，对任 $\epsilon>0$, 必存在 N, 使 $n\geqslant N$ 时

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n}a_i-\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}b_s\right|<\epsilon.$$

利用此事实及定理 2, 并注意 $f(j,C)=f_{jk}=\sum_{r=1}^{t}f_{jk}(r)$ 即得所欲证. □

§2.5 平稳马尔科夫链

马氏链 $\{x_n\}$ 称为 **平稳的**, 如对任意 n,i, 有

$$P(x_n=i)=P(x_0=i)=p_i,$$

具有此性质的开始分布 $\{p_i\}$ 称为 **平稳分布**. 由

$$p_i=P(x_n=i)=\sum_j p_j p_{ji}^{(n)}\quad(i=0,1,2,\cdots)\tag{1}$$

可见, 平稳分布 $(p_0,p_1,\cdots)$ 在变换 $(p_0,p_1,\cdots)\cdot(p_{ij}^{(n)})$ 下是不变的, 这里 $n=1,2,\cdots$.

平稳分布在实际中有重要的意义, 因为这时运动具有统计的平稳性: Σ 在 $t=n$ 时位于 i 的概率, 不随 n 而异.

问题在于: 如 (p_{jk}) 已给定, 平稳分布是否存在? 如何求出?

先证明

引理 1 设 C 为分解定理中任一不可分闭集, 由非零的常返状态构成, 则 $\sum_{k\in C}\frac{1}{\mu_k}=1$.

证 暂设 C 中状态的周期为 1. 对 $k\in C, j\in C$

$$\lim_{n\to\infty}p_{jk}^{(n)}=\frac{1}{\mu_k}>0.$$

令 $r_k=\frac{1}{\mu_k}$. 由 C 的闭性, 有 $\sum_{k\in C}p_{jk}^{(n)}=1$ 及

$$p_{jk}^{(n+m)}=\sum_{h\in C}p_{jh}^{(n)}p_{hk}^{(m)}.$$

先取 C 中任一有穷子集, 令 $n\to\infty$, 可见

$$\sum_{k\in C}r_k\leqslant 1,\quad r_k\geqslant\sum_{h\in C}r_h p_{hk}^{(m)}.$$

今设第二不等式中, 对某 k_0, 等号不成立, 则将第二不等式对一切 $k\in C$ 求和并利用第一式, 得

$$1\geqslant\sum_{k\in C}r_k>\sum_{h\in C}r_h.$$

此不可能, 故对一切 $k\in C$, 都有 $r_k=\sum_{h\in C}r_h p_{hk}^{(m)}$. 既然级数 $\sum_{h\in C}r_h p_{hk}^{(m)}$ 为收敛级数 $\sum_{h\in C}r_h(\leqslant 1)$ 所控制, 故可在 $\sum_{h\in C}$ 号下取极限, 令 $m\to\infty$ 得

$$r_k=\Big(\sum_{h\in C}r_h\Big)r_k,$$

于是

$$\sum_{k\in C} r_k = \sum_{k\in C} \frac{1}{\mu_k} = 1.$$

今一般地设 C 中状态有周期为 $t(\geqslant 1)$. C 分解为 $G_1,\cdots,G_t$ 后，对 P^t 每 G_β 都是周期为 1 的不可分闭集. 既然 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{jk}^{(nt)} = \frac{t}{\mu_k}$ $(j\in G_\beta,\ k\in G_\beta)$, 利用上段结果得

$$\sum_{k\in G_\beta} \frac{t}{\mu_k} = 1 \quad (\beta = 1, 2, \cdots, t),$$

故

$$\sum_{k\in C} \frac{1}{\mu_k} = \frac{1}{t}\sum_{\beta=1}^{t}\sum_{k\in G_\beta} \frac{t}{\mu_k} = 1. \ \square$$

以下定理解决平稳分布的存在性及其结构的问题.

定理 1 设马氏链有开始分布为 $\{p_i\}$. 以 C_α 表分解定理中任一由非零的常返状态构成的不可分闭集，令 $H = \sum_\alpha C_\alpha$. 于是 $\{p_i\}$ 为平稳分布的充分与必要条件是：存在非负数列 $\{\lambda_\alpha\}$, $\sum\limits_\alpha \lambda_\alpha = 1$, 使

$$\left.\begin{aligned} p_i &= 0, && \text{如} i \overline{\in} H, \\ p_i &= \frac{\lambda_\alpha}{\mu_i} = \lambda_\alpha \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} p_{ii}^{(v)}, && \text{如} i \in C_\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

证 必要性. 设 $\{p_i\}$ 平稳. 由 $i\overline{\in} H$ 及上节定理 1, $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ji}^{(n)} = 0$. 注意 (1) 中右方级数为收敛级数 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j = 1$ 所控制，故于 (1) 中令 $n\to\infty$ 即得

$$p_i = 0, \quad i\overline{\in} H. \tag{3}$$

次设 $i\in C_\alpha$. 利用 (3) 及 C_α 的闭性，由 (1) 得

$$p_i = \sum_{j\in C_\alpha} p_j p_{ji}^{(v)} \quad (v = 1, 2, \cdots),$$

因而

$$p_i = \sum_{j\in C_\alpha} p_j \left\{\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} p_{ji}^{(v)}\right\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in C_\alpha} p_j \left\{\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} p_{ji}^{(v)}\right\}.$$

与上同理可在此式中 $\sum\limits_{j\in C_\alpha}$ 号下取极限. 既然 j, i 属于同一 C_α, 由上节定理 3, 令 $n\to\infty$ 得

$$p_i = \left(\sum_{j\in C_\alpha} p_j\right)\frac{1}{\mu_i}.$$

取 $\lambda_\alpha = \sum\limits_{j\in C_\alpha} p_j$, 则 $\sum\limits_\alpha \lambda_\alpha = \sum\limits_{j\in H} p_j = \sum\limits_j p_j = 1$.

充分性：用 (2) 以定义 $\{p_i\}$. 由引理 1 及 $\sum\limits_{\alpha}\lambda_\alpha = 1$ 可见它是一分布. 要证如取 $\{p_i\}$ 为开始分布，则

$$p_i = P(x_m = i)$$

对一切 $m = 0, 1, 2, \cdots$ 成立.

如 $i \overline{\in} H$, 由 (2) 中第一式及 H 的闭性得

$$P(x_m = i) = \sum_{j \overline{\in} H} p_j p_{ji}^{(m)} + \sum_{j \in H} p_j p_{ji}^{(m)} = \sum_{j \overline{\in} H} 0 \cdot p_{ji}^{(m)} + \sum_{j \in H} p_j \cdot 0 = 0. \tag{4}$$

如 $i \in C_\alpha$, 任取 $j_0 \in C_\alpha$, 由 (2) 及

$$p_{ji}^{(m)} = 0, \quad j \in H - C_\alpha$$

得

$$P(x_m = i) = \sum_{j \in C_\alpha} p_j p_{ji}^{(m)} = \lambda_\alpha \sum_{j \in C_\alpha} \left\{ \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n} p_{j_0 j}^{(v)} \right\} p_{ji}^{(m)}.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 由引理 1, 存在只含有穷多个状态的集 $C'_\alpha \subset C_\alpha$, 使 $\sum\limits_{j \in C_\alpha - C'_\alpha} p_j < \varepsilon$, 于是

$$\begin{aligned}
P(x_m = i) &\leqslant \lambda_\alpha \sum_{j \in C'_\alpha} \left\{ \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n} p_{j_0 j}^{(v)} \right\} p_{ji}^{(m)} + \varepsilon \\
&\leqslant \lambda_\alpha \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n} \sum_{j \in C_\alpha} p_{j_0 j}^{(v)} p_{ji}^{(m)} + \varepsilon \\
&= \lambda_\alpha \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n} p_{j_0 i}^{(v+m)} + \varepsilon = \frac{\lambda_\alpha}{\mu_i} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

由 ε 的任意性得

$$P(x_m = i) \leqslant \frac{\lambda_\alpha}{\mu_i} = p_i. \tag{5}$$

再由引理 1 及 $\sum\limits_{\alpha}\lambda_\alpha = 1$ 得

$$\sum_{\alpha} \sum_{i \in C_\alpha} P(x_m = i) \leqslant \sum_{\alpha} \lambda_\alpha \sum_{i \in C_\alpha} \frac{1}{\mu_i} = \sum_{\alpha} \lambda_\alpha = 1.$$

另方面，由 (4) 得

$$\sum_{\alpha} \sum_{i \in C_\alpha} P(x_m = i) = \sum_{i=0}^{\infty} P(x_m = i) = 1,$$

故 (5) 中必须取等号. □

由定理直接推出

系 1 (i) 当且仅当 $H = \phi$, 平稳分布不存在；(ii) 当且仅当只有一个 C_α 时，平稳分布唯一地存在，此时 $\lambda_\alpha = 1$; (iii) 如至少有二个 C_α 时，存在无穷多个平稳分布.

系 2　对有穷马氏链，平稳分布恒存在.

证　由上节系 1, 此时 $H \neq \phi$. □

定理 2 为使开始分布 $\{p_i\}$ 平稳的充分与必要条件是：$\{p_j\}$ 是方程组

$$\left.\begin{aligned} v_i &= \sum_{j=0}^{\infty} v_j p_{ji}, \\ v_i \geqslant 0, & \sum_{i=0}^{\infty} v_i = 1 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

的解.

证　必要性：由 $P(x_1 = i) = p_i$ 即得

$$p_i = \sum_{j=0}^{\infty} p_j p_{ji},\ p_i \geqslant 0,\ \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1.$$

充分性：由 (6) 第一式得

$$P(x_1 = i) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j p_{ji} = p_i,$$

设 $P(x_m = i) = p_i$ 成立，则

$$P(x_{m+1} = i) = \sum_{i=0}^{\infty} P(x_m = j) p_{ji} = \sum_{j=0}^{\infty} p_j p_{ji}. \ \square$$

虽然定理 2 是一简单的结果，但它与定理 1 综合后，却说明了定理 1 在解无穷线性方程组中的作用. 我们把它写成

系 3　方程组 (6) 的全部解与全体 (2) 形的序列 $\{p_j\}$ 的集重合.

§2.6　多重马尔科夫链

马氏链 (未必齐次) 是多重马氏链的特殊情形. 定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的、取值于 $E = (0, 1, 2, \cdots)$ 中的随机变量列 $x_n(\omega)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 称为 v (**正整数**) **重马氏链**, 如果等式

$$\begin{aligned} & P(x_{m+1} = i_{m+1} | x_j = i_j,\ j = m, m-1, \cdots, 1, 0) \\ & \quad = P(x_{m+1} = i_{m+1} | x_j = i_j,\ j = m, m-1, \cdots, m-v+1), \end{aligned} \tag{1}$$

对任意正整数 $m \geqslant v$ 及任意 $i_j \in E$ 成立，只要左方构成条件的事件有正概率.

注意马氏链的定义 (见 §2.1) 等价于 [1]

$$P(x_{m+1} = i_{m+1} | x_j = i_j,\ j = m, m-1, \cdots, 1, 0) = P(x_{m+1} = i_{m+1} | x_m = i_m). \tag{2}$$

---

[1] 参见 §2.7 题 3.

故马氏链是 1 重马氏链.

下面证明，在扩大相空间的维数后，可化 v 重马氏链为马氏链.

考虑空间 $E^{(v)}=(e)$, 这里 e 表 v 维空间中坐标为非负整数的点. 于是 v 维随机矢量

$$z_n(\omega)=(x_n(\omega),x_{n+1}(\omega),\cdots,x_{n+v-1}(\omega))\ \ (n=0,1,2,\cdots) \tag{3}$$

的相空间为 $E^{(v)}$. 我们有

定理 1 如 $\{x_n(\omega)\}$ 是 v 重马氏链，则 $\{z_n(\omega)\}$ 是马氏链.

证 由 (2) 只要证

$$P(z_{m+1}=e_{m+1}|z_m=e_m,\cdots,z_0=e_0)=P(z_{m+1}=e_{m+1}|z_m=e_m). \tag{4}$$

令 $e_k=(i_1^{(k)},\cdots,i_v^{(k)})$. 为了使 (4) 中左方有意义，必须使 e_{k+1} 中前 $v-1$ 个坐标，分别按序等于 e_k 中后 $v-1$ 个坐标，即

$$i_j^{(k+1)}=i_{j+1}^{(k)}\ \ (j=1,\cdots,v-1;\ k=0,\cdots,m), \tag{5}$$

否则 (4) 中左方无意义，故应设 (5) 满足. 从而 $e_0,e_1,\cdots,e_{m+1}$ 中，看来共有 $(m+2)v$ 个坐标，其实只有 $v+m+1$ 个是自由的，取此 $v+m+1$ 个自由坐标为 $i_1^{(0)},i_1^{(1)},\cdots,i_1^{(m)}$; $i_1^{(m+1)},i_2^{(m+1)},\cdots,i_v^{(m+1)}$. 于是其余坐标都被此 $v+m+1$ 个决定. 由此及 (3), 可改写 (4) 为

$$\begin{aligned}&P(x_{m+v}=i_v^{(m+1)},x_{m+v-1}=i_{v-1}^{(m+1)},\cdots,x_{m+1}=i_1^{(m+1)}|\\&\quad|x_{m+v-1}=i_{v-1}^{(m+1)},\cdots,x_{m+1}=i_1^{(m+1)},x_m=i_1^{(m)};z_{m-1}=e_{m-1},\cdots,z_0=e_0)\\&=P(x_{m+v}=i_v^{(m+1)},x_{m+v-1}=i_{v-1}^{(m+1)},\cdots,x_{m+1}=i_1^{(m+1)}|\\&\quad|x_{m+v-1}=i_{v-1}^{(m+1)},\cdots,x_{m+1}=i_1^{(m+1)},x_m=i_1^{(m)}),\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}&P(x_{m+v}=i_v^{(m+1)}|x_{m+v-1}=i_{v-1}^{(m+1)},\cdots,x_{m+1}=i_1^{(m+1)},\\&\quad x_m=i_1^{(m)};z_{m-1}=e_{m-1},\cdots,z_0=e_0)\\&=P(x_{m+v}=i_v^{(m+1)}|x_{m+v-1}=i_{v-1}^{(m+1)},\cdots,x_{m+1}=i_1^{(m+1)},x_m=i_1^{(m)}).\end{aligned} \tag{6}$$

然而事件 $(z_{m-1}=e_{m-1},\cdots,z_0=e_0)=(x_{m+v-2}=i_{v-2}^{(m+1)},\cdots,x_{m-1}=i_1^{(m-1)},x_{m-2}=i_1^{(m-2)},\cdots,x_0=i_1^{(0)})$. 以之代入 (6) 式左方，由 (1), 可见 (6) 式的确成立，故得证 (4). □

今试求 $\{z_n(\omega)\}$ 的转移函数. 设 $e_0=(i_1,\cdots,i_v)$, $e_1=(j_1,\cdots,j_v)$, 并且如 $P(z_m=e_0)>0$, 记

$$P(z_{m+1}=e_1|z_m=e_0)={}_mp^{(1)}_{i_1,\cdots,i_v;j_1,\cdots,j_v}; \tag{7}$$

如上所述，如有某 $j_l\neq i_{l+1}$ $(l=1,\cdots,v-1)$, 则 (7) 中值无意义，补定义其值为 0; 在相反情况，则有

$${}_mp^{(1)}_{i_1,\cdots,i_v;j_1,\cdots,j_v}=P(x_{m+v}=j_v|x_{m+v-1}=j_{v-1},\cdots,x_{m+1}=j_1,x_m=i_1). \tag{8}$$

称 v 重马氏链 $\{x_n\}$ 为 **齐次的**, 如 (8) 中右方值不依赖于 m. 此时由 (8) 可见马氏链 $\{z_n\}$ 必是齐次的. 于是可利用本章以上诸节的理论来研究 v 重齐次马氏链. 然而，这并不等于说

后者无单独研究之必要. 因为自 $\{x_n\}$ 过渡到 $\{z_n\}$ 时, 要扩大相空间的维数而直观意义模糊; 同时转移概率矩阵中出现许多 0 也不方便.

§2.7 补充与习题

1. 本章多次在求和号下取极限, 根据是:

设对非负项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(m)$, 存在一非负项收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n < \infty$, 使 $f_n(m) \leqslant g_n$. 如 $\lim\limits_{m\to\infty} f_n(m) = f_n$, 则

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(m) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \ (< \infty).$$

证明甚易, 由下列估计式立即推出:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(m)\right| \leqslant \sum_{n\leqslant N} |f_n - f_n(m)| + \sum_{n>N} f_n + \sum_{n>N} f_n(m).$$

2. 试证马氏性与下条件等价: 对任意非负整数 m, i 及 $A \in \mathcal{F}(x_j, j < m)$, $B \in \mathcal{F}(x_j, j > m)$, 有

$$P(B|A, x_m = i) = P(B|x_m = i). \tag{1}$$

提示: 利用联合分布. 即 §2.1(9) 式, 先证对柱集 A, B 等式 $P(A, x_m = i, B) = P(A, x_m = i)P(B|x_m = i)$ 成立; 其次对固定柱集 B, 利用 λ 系方法 [1], 知此式对一般的 A 也成立; 再固定一般的 A, 又一次应用上述方法, 即知此式对一般的 B 也成立.

3. 试证马氏性与下条件等价:

$$P(x_{m+1} = j|x_m = i, x_{m-1} = i_{m-1}, \cdots, x_0 = i_0) = P(x_{m+1} = j|x_m = i). \tag{2}$$

提示: 计算此随机变量列的有穷维联合分布, 利用 §2.1 定义 2. 因而, 表面上看, 马氏性的定义似乎介于 (1),(2) 之间, 其实三者等价.

4. 在本章正文中, §2.2(3) 式及命题 H(§2.3) 的证明是直观的, 需要进一步严格化. 我们在那里宁肯采用直观方法, 不仅是为了节省时间, 而是便于对马氏性有本质的了解, 以免一开头就被严格的形式掩盖了思想的本质. 现在给这二处补上严格的证明, 理论根据是 (1) 式, 但思想仍是原来的, 这里只是把它精确化而已.

(A) 试证 §2.2(3). 利用 (1) 及齐次性, 有

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= P(x_n = j|x_0 = i) \\
&= \sum_{m=1}^{n} P(x_m = j, x_l \neq j, 0 < l < m|x_0 = i) \\
&\quad \times P(x_n = j|x_0 = i, x_l \neq j, 0 < l < m, x_m = j) \\
&= \sum_{m=1}^{n} f_{ij}^{(m)} p(x_n = j|x_m = j) = \sum_{m=1}^{n} f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)}
\end{aligned}$$

[1] 见附篇引理 3.

$(p_{jj}^{(0)}=1)$, 此即 §2.2(3). □

(B) 试证命题 H: 如 $f_j=1, j\Longrightarrow k,\ j\neq k$, 则 $f_{kj}=1$.

令集

$$
\begin{aligned}
&A=(x_0=j,\ \text{存在 } N>0,\ \text{使 } x_N=k),\\
&B=(x_0=j,\ \text{存在 } N>0,\ \text{使 } x_l\neq k,\neq j, 0<l<N, x_N=k),\\
&C=(x_0=j,\ \text{存在 } M>0, N>0,\ \text{使 } x_l\neq k, 0<l<M,\\
&\qquad x_M=j, x_{M+r}\neq j,\neq k, 0<r<N, x_{M+N}=k).
\end{aligned}
$$

于是 A 表事件 "自 j 出发，终于要到达 k", B 表事件 "自 j 出发，终于要到达 k, 并且中间不经过 j",C 表事件 "自 j 出发，终于要到达 k, 中间经过 j", 因此

$$B\cap C=\phi,\quad A=B\cup C.$$

利用 (1) 与齐次性，得

$$
\begin{aligned}
0<f_{jk}=&P(A|x_0=j)=P(B|x_0=j)+P(C|x_0=j)\\
=&\sum_{N=1}^{\infty}P(x_l\neq k,\neq j,0<l<N,x_N=k|x_0=j)\\
&+\sum_{M,N=1}^{\infty}P(x_l\neq k,0<l<M,x_M=j|x_0=j)\\
&\times P(x_r\neq k,\neq j,0<r<N,x_N=k|x_0=j),
\end{aligned}
$$

因此，至少有一个 N, 使

$${}_jf_{jk}^{(N)}\equiv P(x_l\neq k,\neq j,0<l<N,x_N=k|x_0=j)>0.$$

考虑概率

$$1-f_j=P(x_n\neq j,\ \text{一切 } n>0|x_0=j),$$

由 (1) 及齐次性得

$$
\begin{aligned}
1-f_j\geqslant&P(x_l\neq k,\neq j,0<l<N,x_N=k|x_0=j)\\
&\times P(x_{N+n}\neq j,\ \text{一切} n>0|x_0=j,x_l\neq k,\neq j,0<l<N,x_N=k)\\
=&{}_jf_{jk}^{(N)}(1-f_{kj}).
\end{aligned}
$$

如果 $f_{kj}<1$, 则 $1-f_j>0$, 或 $1>f_j$, 这与 j 的常返性矛盾，故 $f_{kj}=1$. □

5. 设齐次马氏链的转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1/2&1/3&1/6\\1/3&1/3&1/3\\1/3&1/2&1/6\end{pmatrix}.$$

试问此链共有几个状态？求二步转移概率. 分析状态的类别. $\lim\limits_{n\to\infty}p_{jk}^{(n)}$ 是否存在？试求之？平稳分布是否存在？试求之.

6. 设存在 $s>0$ 使 $P^s=(p_{jk}^{(s)})$ 中的元全大于 0, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)}=r_k$ 存在，与 j 无关. 又如补设此链有穷，则 $r_k>0, \sum\limits_k r_k=1$.

提示：此链不可分，周期 $t=1$.

7. 设链不可分，状态为遍历的，令 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)}=r_k$, 则 $\{r_k\}$ 是方程组

$$r_k=\sum_j r_j p_{jk} \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

的解；$\{r_k\}$ 是唯一的平稳分布.

提示：由 $\sum\limits_k r_k\leqslant 1$, $r_k\geqslant \sum\limits_j r_j p_{jk}$, 将后式对一切 k 求和即得. 后式来自 $p_{ik}^{(n+1)}=\sum\limits_j p_{ij}^{(n)} p_{jk}$.

8. 设齐次马氏链以

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0\\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

为转移概率矩阵. 试分解此链并研究 $p_{jk}^{(n)}$ 的极限性质 ($n\to\infty$ 时). 求平稳分布.

提示：$(1,3),(4,5)$ 各成一不可分遍历闭集，2 为非常返状态，$p_{21}^{(n)}\to\frac{1}{2}, p_{23}^{(n)}\to\frac{1}{2}$.

9. 设 $p_{jj+1}=1-a_j, p_{j0}=a_j, 0<a_j<1, (j=0,1,2,\cdots)$. 试证一切状态为非常返的或常返的，视级数 $\sum\limits_j a_j$ 收敛或发散而定.

提示：$1-f_0=\prod\limits_{j=0}^{\infty}(1-a_j)$.

10. 接连独立地从 1,2,3,4,5,6 六个数中取出一数，每次每个数被取出的概率为 $\frac{1}{6}$, 取后还原. 定义 $x_n=j$, 如在前 n 次中所取得的最大点数为 j. 试求转移概率矩阵 P.

答：$p_{jk}=\frac{1}{6}, k>j$; $p_{jj}=\frac{j}{6}, p_{jk}=0, k<j, j,k=1,2,\cdots,6$.

11. 设 $\{x_i\}$ 为独立随机变量列，取非负整数值. x_i 的分布为 $(q_0^{(i)},q_1^{(i)},\cdots,q_n^{(i)},\cdots)$. 试证 $\{x_i\}$ 为马氏链. 并求其开始分布及转移概率矩阵 ${}_mP$, 何时此链是齐次的.

提示：当 $\{q_j^{(i)}\}$ 不依赖于 $i>0$ 时.

12. 同上题设，试证 $\{y_n\}$ 为马氏链. 这里 $y_n=\sum\limits_{i=0}^{n} x_i$. 并对 $\{y_n\}$ 解答上题中提出的问题.

13. 试证当且仅当 $f_{ij}>0, f_{ji}>0$ 时，$i\iff j$.

提示：利用 $\sup\limits_{1\leqslant n<\infty} p_{ij}^{(n)}\leqslant f_{ij}\leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$.

14. 引进概率

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= P(x_k=j\text{对无穷多个 } k \text{ 成立}|x_0=i)\\ &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}(x_k=j)|x_0=i\right), \end{aligned}$$

则 1) $Q_{ii}=0$ 或 1, 视 $f_i<1$ 或 $f_i=1$ 而定 (这是常返状态命名的根据); 2) $Q_{ij}=f_{ij}Q_{jj}$, $Q_{ij}\leqslant Q_{jj}$.

提示：引入 $T_n=P(x_k=i$至少对 n 个 k 成立$|x_0=i)$, 则 $T_1=f_i$, $T_n=f_iT_{n-1}$.

15. 以 D 表齐次马氏链全体非常返状态的集. 试求"自 $j(\in D)$ 出发, Σ 永远停留在 D 中的" 概率 [1] y_j. 证明 $\{y_j\}, j\in D$, 满足方程组

$$y_j=\sum_{v\in D}p_{jv}y_v. \tag{3}$$

当且仅当方程组

$$z_j=\sum_{v\in D}p_{jv}z_v \quad (|z_v|\leqslant 1) \tag{4}$$

无非零的有界解时, $y_j=0$ (一切 j).

解，以 $y_j^{(n)}$ 表自 j 出发，于 $t=n$ 时，Σ 仍位在 D 中的概率. 于是

$$\left.\begin{aligned} y_j^{(1)}&=\sum_{v\in D}p_{jv},\\ y_j^{(n+1)}&=\sum_{v\in D}p_{jv}y_v^{(n)},\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

从而 $y_j^{(1)}\leqslant 1$, $y_j^{(n+1)}\leqslant y_j^{(n)}$, $y_j^{(n)}\downarrow y_j\ (n\to\infty)$, 而且 (3) 成立. 设 (4) 有一有界解为 $\{z_j\}$. 比较 (4),(5) 得 $|z_j|\leqslant y_j^{(1)}$, 由归纳法 $|z_j|\leqslant y_j^{(n)}$. 由此即可证明最后一结论. □

16. 以 C 表分解定理中任一不可分闭集. 试求"自 $j\in D$ 出发, Σ 终于要落于 C 中" 的概率 [2] x_j; 求 x_j 所应满足的方程并讨论此方程的解的唯一性.

解 以 $x_j^{(n)}$ 表自 j 出发，于 $t=n$ 时第一次落于 C 的概率，则 $x_j=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_j^{(n)}$, 其中

$$x_j^{(1)}=\sum_{k\in C}p_{jk},\quad x_j^{(n+1)}=\sum_{v\in D}p_{jv}x_v^{(n)}. \tag{6}$$

在此式中令 $n=1,2,\cdots$, 相加，得

$$x_j-\sum_{v\in D}p_{jv}x_v=x_j^{(1)}. \tag{7}$$

此方程组如有二不同的有界解，则其差必为 (3) 的有界解. 因此，由上题即知：x_j 为 (7) 的唯一有界解，除非存在 $j\in D$, 使自 j 出发，Σ 永远停留于 D 中的概率 $y_j>0$. □

17. 试证对有穷齐次马氏链，$y_j=0$(对一切 j); 而且 $x_j(j\in D)$ 是 (7) 的唯一解.

证 只要证第一结论. 如说不然，设 $\{y_j\}$ 的最大值为 $M>0$. 不失一般性，可将状态如下排列，以使 y_j 不增，即使 $y_0=y_1=\cdots=y_a=M>y_{a+1}\geqslant y_{a+2}\geqslant\cdots$. 由 (3), 对 $i\leqslant a$, $i\in D$, 有

$$M=\sum_{v\in D}p_{iv}y_v=\sum_{v=0}^{a}p_{iv}M+\sum_{v>a}p_{iv}y_v.$$

---

[1] 即 $y_j=P\left(\bigcap\limits_{m=0}^{\infty}(x_m\in D)\Big|_{x_0=j}\right)$, 亦即 §2.4 中的 $1-\sum\limits_{c}f(j,C)$.

[2] 即 $x_j=P\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}(x_m\in C)\Big|_{x_0=j}\right)$, 亦即 §2.4 中的 $f(j,C)$.

然而，如果有一个 $v > a$ 使 $p_{iv} > 0$, 上等式不可能成立. 因此 $p_{iv} = 0, v > a$. 这表示 $(0,1,\cdots,a)$ 成一闭集. 于是这闭集产生一不含常返状态的有穷子链. 与 §2.4 系 1 矛盾. □

18. 考虑具吸引壁为 0, a 的齐次随机徘徊. 自 j 出发，终于被 0 吸引的概率记为 x_j. 试求 $x_j =$?

答： $x_j = \frac{(q/p)^a-(q/p)^j}{(q/p)^a-1}$, $(p \neq q)$; $x_j = \frac{a-j}{a}$, $(p = q)$.

19. 设不可分链的状态为 $0,1,2,\cdots$. 为使这些状态为非常返的，充分与必要条件是方程组

$$y_j = \sum_{v\in D} p_{jv}y_v \tag{8}$$

(其中 $D = (1,2,\cdots)$) 有非 0 的有界解.

提示：只要研究 0 何时非常返. 与 15 题一样，当且仅当 (8) 有非 0 的有界解时，存在 $j \in D$, 使自 j 出发，永远停留在 D 中的概率大于 0, 故终于要到达 0 的概率小于 1, 即 $f_{j0} < 1$. 故 0 非常返.

20. 设 $p_{00} = \frac{1}{3}, p_{01} = \frac{2}{3}, p_{i\,i-1} = \frac{1}{3}, p_{i\,i+1} = \frac{2}{3}$ $(i \geqslant 1)$. 试求 $f_0^{(3)}$ 及 $p_{00}^{(3)}$. 证明 0 是非常返的.

提示：利用题 19.

21. 称 j 为 **本质状态**, 如对任一 k, 当 $j \Longrightarrow k$ 时，就有 $k \Longrightarrow j$. 常返状态必是本质的. 反之不真. 例如见题 9. 然而，当链为有穷时，本质状态也是常返的.

提示：对有穷链，如 j 是非常返的，则自 j 出发，终于要落于某闭集 C 的概率为 1, 而 C 由常返状态构成. 故存在 $k \in C$, 使 $j \Longrightarrow k$, 但 j 不能自 k 到达，于是 j 不是本质的.

22. 举例说明由马氏性不能推出

$$P(x_m = j|x_{m-2} = i, x_{m-1} \in A) = P(x_m = j|x_{m-1} \in A),$$

其中 $P(x_{m-2} = i, x_{m-1} \in A) > 0$, A 至少含二状态.

附记. 马氏链最初由 A. A. Марков (1856–1922) 引进. 初期研究的对象主要是有穷链，至今关于有穷链已有几本专著如下面文献 1 等. 对有穷链可用矩阵方法，但此法对可列马氏链难以适用. 本章中的结果主要由 A. H. Колмогоров 得到. 进一步的结果见本书末参考书 [14]. 那里对禁止概率，极限定理及关于非常返状态的研究有系统的叙述. 在下面文献 2 中，引进了更一般的马氏链的定义. 这里的叙述方式属于 W. Feller, 好处在于突出了思想的实质 (运动的直观形象清楚), 而且避免了测度论. 运动的直观形象在马尔科夫过程的学习中是十分重要的. 我们在 W. Feller 的基础上作了系统化与严格化的整理工作.

参考文献

[1] Романовский В. И., Дискретные цепи Маркова, 1949 (有中译本).

[2] Hunt G. A., *Markoff chains and Martin boundaries*, Illinois Journal of Math., **4** (1960), 313–340 (俄文见 Математика, **5**:5 (1961)).

[3] 书末参考书目 [14] 中列举的文献甚多，均可参考.

[4] Wang Tzu-Kwen(王梓坤), *The Martin boundary and limit theorems for excessive functions*, Scientia Sinica (中国科学) XIV, **8** (1965), 1118–1129.

[5] 戴永隆：关于马尔可夫链的若干概率性质与遍历定理，中山大学学报 (自然科学), **2** (1964), 153-166.

第三章 随机过程的一般理论

§3.1 随机过程的可分性

(一) 设 $\{x_t(\omega), t\in T\}$ 及 $\{y_t(\omega), t\in T\}$ 为定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机过程，以后我们允许随机变量取 ∞ 及 $-\infty$ 为值，这时随机变量的定义仍和以前一样，不需任何改变 [1]，但总假定它取无穷值的概率为 0. 故对固定的 t

$$P(x_t(\omega)=\pm\infty)=0,\quad P(y_t(\omega)=\pm\infty)=0. \tag{1}$$

称二过程为 **随机等价的**(或简称 **等价的**), 如对任意固定 $t\in T$, 有

$$P(x_t(\omega)=y_t(\omega))=1; \tag{2}$$

由此可见，对任意固定的 $t_i\in T$, $i=1,2,\cdots$(有穷或可列多个), 有

$$P(x_{t_i}(\omega)=y_{t_i}(\omega),\quad i=1,2,\cdots)=1;$$

因而此二过程有相同的有穷维分布族. 或者从另方面看，一族相容的有穷维分布决定某概率空间上的一类等价的随机过程.

对已给的过程 $\{x_t(\omega), t\in T\}$, 容易造出与它等价的过程. 实际上，对每个 $t\in T$, 任取一 ω 集 $N_t\in\mathcal{F}$, 使 $P(N_t)=0$, 记

$$\overline{R}_1=[-\infty,\infty],$$

定义

$$y_t(\omega)=\begin{cases}x_t(\omega), & \text{如}\omega\overline{\in}N_t,\\ \overline{R}_1\text{ 中任意值}, & \text{如}\omega\in N_t,\end{cases} \tag{3}$$

显然 $\{y_t(\omega), t\in T\}$ 与 $\{x_t(\omega), t\in T\}$ 随机等价；而且任何与 $\{x_t(\omega), t\in T\}$ 随机等价的过程都可用这种方法得到 (回忆 P 为完全概率测度的假定). 因此，对任意固定的 $t\in T$, 可以在任一 0 测集上，自由改变 $x_t(\omega)$ 的值，而不影响过程的有穷维分布，即不跑出原过程所属的等价类. 这种自由性可以使我们从一类随机等价的过程中，挑选出某些“好”的过程来.

然而所谓“好”是什么意思呢？这是指具有某种较好的性质，例如可分性，连续性，可测性等等. 下面便来逐一定义并讨论这些性质.

---

[1] 即仍称 $x(\omega)$ 为随机变量，如对任何实数 λ, $(x(\omega)\leqslant\lambda)\in\mathcal{F}$. 由此知

$$(x(\omega)=-\infty)=\bigcap_n(x(\omega)\leqslant -n)\in\mathcal{F};$$

$$(x(\omega)=\infty)=\bigcap_n(x(\omega)>n)\in\mathcal{F}.$$

(二) 可分性观念的产生是由于下类问题的需要. 在理论上或实际中常常要考虑一些重要的 ω 集如

$$W = (\omega : x_t(\omega) \in A \text{ 对一切 } t \in T \text{ 成立}) \tag{4}$$

其中 $A \subset R_1$ 是任一有界闭集. 如果 T 是可列集 [1], 则作为可列多个可测集的交, $W \in \mathcal{F}$, 故 W 有概率可言; 但如 T 不是可列集, 则因 $\mathcal{F}$ 只对可列或有穷交运算封闭, 故无从保证 $W \in \mathcal{F}$, 更谈不上 W 的概率.

摆脱这种困难的一种方法是改变 σ 代数的定义, 使它对任意交运算也封闭, 然而这样将从根本上修改概率论的公理结构. 故只好采取另一方法, 即假定过程的样本函数具有某种较好的内在规律性, 例如假定一切样本函数都是连续函数, 这时, 如 T 是一区间, 则 (4) 中集

$$W = \{\omega : x_r(\omega) \in A \text{对一切有理点 } r \in T \text{ 成立}\},$$

于是不管 T 是否可列, 总有 $W \in \mathcal{F}$. 然而, 连续性的假定太强. 自然希望尽量减弱条件而又能解除上述困难. 结果发现, 合理而又经济的假定是过程的可分性.

为了叙述时记号简单, 设 T 为 R_1 中任一区间.

设 $x(t)$ $(t \in T)$ 为任一普通函数, 可取 $\pm\infty$ 为值, 平面点集 $\{(t, x(t)), t \in T\}$ 记为 X_T(它的图形是一平面曲线). 又设 R 为 T 中任一可列子集, 在 T 中稠密. 记 $X_R = \{(r, x(r)), r \in R\}$, 它也是一平面点集. 显然, $X_R \subset X_T$. X_R 在通常距离 [2] 下的闭包记为 $\overline{X}_R$, 因而 $\overline{X}_R$ 由 X_R 及 X_R 的极限点构成.

定义 1 说函数 $x(t)(t \in T)$**关于 R 是可分的**, 如果 $X_T \subset \overline{X}_R$. 也就是说, 对任一 $t \in T$, 可找到点列 $\{r_i\} \subset R$ (r_i 可等于 r_j), 使同时有

$$r_i \to t; \quad x(r_i) \to x(t).$$

此 R 称为函数的 **可分集**.

定义 2 说随机过程 $\{x_t(\omega), t \in T\}$**关于 R 是可分的**, 如存在一 0 测集 N, 使对任一 $\omega \overline{\in} N$, 样本函数 $x_t(\omega)(t \in T)$ 关于 R 是可分的, 此时称 R 为过程的 **可分集**;N 称为 **例外集**. 说随机过程为 **可分的**, 如存在于 T 中到处稠密的可列子集 R, 使它关于 R 是可分的; 说随机过程为 **完全可分的**, 如果它关于任一如上的 R 是可分的.

例 1 连续函数关于 T 中有理点集 R 是可分的, 实际上, 它关于 T 中任一可列稠集都是可分的.

例 2 设 $s \in T$, s 为任一无理点. 于是函数 $x(t) = 0, t \in T - \{s\}, x(s) = 1$, 关于 T 中有理点集 R 是不可分的; 但关于 $R \cup \{s\}$ 却是可分的.

作为可分性的应用, 试证

引理 1 如 $\{x_t(\omega), t \in T\}$ 是可分过程, 则 (4) 中集 W 是可测的.

证 设 R 为可分集, N 为例外集, 令

$$W_R = \{\omega : x_r(\omega) \in A \text{ 对一切 } r \in R \text{ 成立}\}.$$

---

[1] 重说一次, 为了方便, 我们把有穷集也当成可列集.

[2] 即二点 $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ 间的距离为

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

显然 $W_R \supset W$, $W_R = \bigcap_{r \in R} \{\omega : x_r(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$. 任取 $\omega \in W_R, \omega \overline{\in} N$. 对任意 $t \in T$, 由可分性知存在 $\{r_i\} \subset R$, 使 $r_i \to t$, $x_{r_i}(\omega) \to x_t(\omega)$. 但对一切 r_i 有 $x_{r_i}(\omega) \in A$, 而且 A 是有界闭集，故 $x_i(\omega) \in A$. 由 t 的任意性得 $\omega \in W$. 于是得证

$$W_R \supset W \supset W_R \cap \overline{N}.$$

既然 $P(W_R) = P(W_R \cap \overline{N})$, 而且 P 是完全的，故

$$W \in \mathcal{F},\ P(W) = P(W_R). \square$$

这引理说明了应用可分性的典型方法：先证明某一性质在 R 上正确，然后利用可分性以证明它在全 T 上也正确.

由此可见，可分性具有重要的理论意义.

然而，是否任一随机过程都是可分的呢？如果不然，可分性条件严格到什么程度呢？

定理 1 对任一定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机过程 $\{\xi_t(\omega), t \in T\}$, 必存在可分的随机等价的过程 $\{x_t(\omega), t \in T\}$.

这定理说明，虽然一给定的过程 $\{\xi_t(\omega), t \in T\}$ 未必是可分的，但在一类随机等价的过程中，必至少存在一个可分的代表. 因此，对已给的一族相容的有穷维分布，由 §1.1 存在定理及这里的定理 1, 必存在一可分的过程，它的有穷维分布族与已给的相重合. 换言之，只要所研究的问题只涉及有穷维分布族时，可以假定所考虑的过程是可分的.

先证

引理 2 对任意二区间 J 及 G, $J \subset T$, 存在数列 $\{s_n\} \subset J$, 使对任一固定的 $t \in J$, 有

$$P(\xi_t \in G,\ \xi_{s_n} \overline{\in} G,\ n = 1, 2, \cdots) = 0. \tag{5}$$

证 用归纳法选 $\{s_n\}$. 任取 $s_1 \in J$. 如在 J 中已选出 $s_1, \cdots, s_n$, 令

$$P_n = \sup_{t \in J} P(\xi_t \in G, \xi_{s_1} \overline{\in} G, \cdots, \xi_{s_n} \overline{\in} G). \tag{6}$$

于是必存在 $s_{n+1} \in J$, 使

$$P(\xi_{s_{n+1}} \in G, \xi_{s_1} \overline{\in} G, \cdots, \xi_{s_n} \overline{\in} G) \geqslant P_n\left(1 - \frac{1}{n}\right), \tag{7}$$

但诸事件

$$G_n = (\xi_{s_{n+1}} \in G, \xi_{s_1} \overline{\in} G, \cdots, \xi_{s_n} \overline{\in} G)\ (n = 1, 2, \cdots)$$

互不相交，故 $\sum_{n=1}^{\infty} P(G_n) \leqslant 1$, 从而 (7) 式右方值 $P_n(1 - \frac{1}{n}) \to 0$, 此表示

$$\lim_{n \to \infty} P_n = 0. \tag{8}$$

其次，既然对任一固定的 t 有

$$\begin{aligned}&(\xi_t \in G, \xi_{s_i} \overline{\in} G, i = 1, \cdots, n) \supset \\ &\supset (\xi_t \in G, \xi_{s_i} \overline{\in} G, i = 1, \cdots, n + 1) \supset \cdots,\end{aligned}$$

这些事件的交就是 (5) 中的事件，故由 (6),(8) 即得证 (5). □

定理 1 之证 令 $B_t=(\omega:\xi_t(\omega)=\pm\infty)$, 由本节开始时的假定， $P(B_t)=0$. 定义 $\widetilde{\xi}_t(\omega)=\xi_t(\omega)$, 如 $\omega\overline{\in}B_t$; $\widetilde{\xi}_t(\omega)=0$, 如 $\omega\in B_t$. 于是 $\{\xi_t(\omega),t\in T\}$ 是与 $\{\xi_t(\omega),t\in T\}$ 随机等价的过程而且只取实数值. 故不妨设 $\{\widetilde{\xi}_t(\omega),t\in T\}$ 只取实数值.

称任二以有理点为端点的区间 J 及 $G(J\subset T)$ 为一"对偶". 全体对偶成一可列集. 对每一对偶 (J,G), 可得一具有引理 2 中性质的数列 $\{s_n\}$. 把全体这种数列与 T 中全体有理数合并，得一在 T 中稠密的可列子集 R. 如果在 $\{s_n\}$ 中增加新点， (5) 中的事件不能加大. 因此， R 具有性质:

对任一固定的 $t\in T$ 及任一固定的对偶 (J,G), 使 $t\in J$, 有

$$P(\xi_t\in G,\xi_s\overline{\in}G \text{ 对一切 } s\in JR \text{ 成立})=0. \tag{9}$$

现在固定 t 而以 A_t 表事件"至少存在一对偶 (J,G), $t\in J$, 使 $\xi_t\in G,\xi_s\overline{\in}G$ 对一切 $s\in JR$ 成立", 则由 (9)

$$P(A_t)\leqslant\sum_{J,G}P(\xi_t\in G,\xi_s\overline{\in}G \text{ 对一切 } s\in JR \text{ 成立})=0.$$

故 $P(\overline{A}_t)=1$. 以下任意固定 $\omega\in\overline{A}_t$. 任取 G 使 $\xi_t(\omega)\in G$. 由 $\overline{A}_t$ 的定义，对任意含 t 的 J, 必存在 $s\in JR$, 使 $\xi_s(\omega)\in G$, 否则此 $\omega\in A_t$. 由于 J 的任意性，当 J 缩小时，可找到 $\{u_j\}\subset R$, 使 $u_j\to t$, 而且每 $\xi_{u_j}(\omega)\in G$.

今取 $G_n\supset G_{n+1}$, 使 $\xi_t(\omega)\in G_n$, 又使 G_n 之长趋于 0. 如上所述，对每一 G_n, 可找到 $\{u_j^{(n)}\}\subset R$, 使

$$u_j^{(n)}\to t\ (j\to\infty),\ \xi_{u_j^{(n)}}\in G_n.$$

造点列 $\{v_j\}\subset R$ 如下：令 $v_1=u_1^{(1)}$, v_n 为任一满足 $|u_k^{(n)}-t|<\frac{1}{n}$ 的 $u_k^{(n)}$. 显然 $v_n\to t$, $\xi_{v_n}(\omega)\to\xi_t(\omega)\ (n\to\infty)$. 这表示二维点

$$(t,\xi_t(\omega))\in\overline{\Xi_R(\omega)}=\overline{((r,\xi_r(\omega)),r\in R)}.$$

由于 $\omega\in\overline{A}_t$ 任意，故证明了：对任意固定的 $t\in T$, 有

$$P((t,\xi_t(\omega))\in\overline{\Xi_R(\omega)})\geqslant P(\overline{A}_t)=1. \tag{10}$$

造一新过程 $\{x_t(\omega),t\in T\}$: 对任一 $\omega\in\Omega$

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } t\in R \text{ 时，令} x_t(\omega)=\xi_t(\omega);\\ \text{当 } t\overline{\in}R \text{ 时，令}\\ \quad x_t(\omega)=\xi_t(\omega),\quad \text{如}(t,\xi_t(\omega))\in\overline{\Xi_R(\omega)},\\ \quad\quad\quad\ =\delta_t(\omega),\quad \text{如}(t,\xi_t(\omega))\overline{\in}\overline{\Xi_R(\omega)}.\end{array}\right\} \tag{11}$$

这里 $\delta_t(\omega)$ 应选择得使 $(t,\delta_t(\omega))\in\overline{\Xi_R(\omega)}$. 这样的 $\delta_t(\omega)$ 总可用下法找到：任取一列 $\{s_i\}\subset R$, $s_i\to t$. 在集合 $\{\xi_{s_i}(\omega)\}$ 中，任意选一收敛 (但极限可为 ∞ 或 $-\infty$) 的子列 $\{\xi_{r_i}(\omega)\}\subset\{\xi_{s_i}(\omega)\}$, 于是令

$$\delta_t(\omega)=\lim_{i\to\infty}\xi_{r_i}(\omega)$$

即可.

剩下要证 $\{x_t(\omega), t\in T\}$ 是与 $\{\xi_t(\omega), t\in T\}$ 随机等价的可分过程.

由 (10) 及 (11) 可见，对任一固定的 t, 我们至多只在一 0 测集上修改了 $\xi_t(\omega)$ 的值以得 $x_t(\omega)$, 故

$$P(x_t(\omega)=\xi_t(\omega))=1 \quad (t\in T).$$

其次，由 (11) 中第一式，知对每 $\omega\in\Omega, \overline{X_R(\omega)}=\overline{\Xi_R(\omega)}$, 再由 (11) 中某余二式，知

$$X_T\subset\overline{X_R(\omega)}. \ \square$$

注 1 通常称定理 1 中的 $\{x_t(\omega), t\in T\}$ 为 $\{\xi_t(\omega), t\in T\}$ 的 **可分修正**. (11) 中的 $\delta_t(\omega)$, 必须允许它可能为 ∞ 或 $-\infty$ 时才能保证存在. $\delta_t(\omega)$ 的选择可能不唯一，但这并不影响结果，因为由 (10), 有 $P(x_t(\omega)=\delta_t(\omega))=0$.

在实际中运用可分性时，困难之一是：如何找 R? 如果对过程稍加条件，问题极易解决.

称随机过程 $\{x_t(\omega), t\in T\}$ 为 **随机连续** 的，如对任一 $t_0\in T$, 有

$$P\lim_{t\to t_0}x_t(\omega)=x_{t_0}(\omega) \quad (t\in T). \tag{12}$$

换言之，如当 $t\to t_0$ 时， $x_t(\omega)$ 在依概率意义下收敛于 $x_{t_0}(\omega)$. 如 (12) 中 "$t\to t_0$" 换为 $t\uparrow t_0$(或 $t\downarrow t_0$), 则称过程为 **左 (或右) 随机连续的**.

定理 2 如可分过程 $\{x_t(\omega), t\in T\}$ 随机连续，则此过程是完全可分的.

证 由假定，对任一列 $\{t_i\}\subset T$, $t_i\to t_0$, 有

$$P\lim_{i\to\infty}x_{t_i}=x_{t_0},$$

故存在子列 $\{t_i'\}\subset\{t_i\}$, 使

$$P(\lim_{i\to\infty}x'_{t_i}=x_{t_0})=1. \tag{13}$$

由过程是可分的假定，存在可分集 V, 使

$$P(X_T\subset\overline{X}_V)=1.$$

今设 R 为任一稠于 T 的可列集，任取 $t_0\in V$, 及 $\{t_i\}\subset R$, $t_i\to t_0$. 由 (13),$P((t_0,x_{t_0})\in\overline{X}_R)=1$. 由 V 的可列性得

$$P(X_V\subset\overline{X}_R)=1, \quad P(\overline{X}_V\subset\overline{X}_R)=1.$$

既然 $P(X_T\subset\overline{X}_V)=1$, 即得

$$P(X_T\subset\overline{X}_R)=1. \ \square$$

注意，如 $T=[0,\infty)$, 则对可分、右随机连续过程，定理 2 的结论仍正确；这由上述证明立即看出.

下定理给出可分性的充要条件，它可用作可分性的等价定义.

称随机过程 $\{x_t(\omega), t\in T\}$ 具有性质 (D): 如存在 T 的可列稠密子集 R 及测度为 0 的 ω 集 N, 使对任一闭集[1] A 及任一开区间 I, 有

$$\{\omega : x_r(\omega)\in A, r\in IR\}\setminus\{\omega : x_t(\omega)\in A, t\in IT\}\subset N. \tag{14}$$

定理 3 为使 $\{x_t(\omega), t\in T\}$ 可分，充分与必要条件是它具有性质 (D).

证 必要性：设 $\{x_t(\omega), t\in T\}$ 为可分过程，可分集与例外集分别为 R 及 N, $P(N)=0$. 任取 $\omega\in\overline{N}\cap\{x_r(\omega)\in A, r\in IR\}$. 对任意 $t\in IT$, 由于 R 是可分集，必存在 R 的子列 $\{s_j\}$, 使 $\{s_j\}\subset IR$, $s_j\to t$, $x_{s_j}(\omega)\to x_t(\omega)$. 既然对一切 s_j 有 $x_{s_j}(\omega)\in A$, 而且 A 为闭集，故 $x_t(\omega)\in A$. 此得证 (14).

充分性：设性质 (D) 成立. 下证此过程可分，而且可分集及例外集可取为 (14) 中的 R 与 N. 为此，只要证如 $\omega\overline{\in}N$, 则对一切 $t\in T$, 有

$$(t, x_t(\omega))\in\overline{X_R(\omega)}. \tag{15}$$

如 $t\in R$,(15) 显然成立. 如 $t\in T\setminus R$, 令 A_n 为集 $\{x_r(\omega) : |r-t|<\frac{1}{n}, r\in R\}$ 的闭包. 由于对一切满足 $|r-t|<\frac{1}{n}$ 的 $r\in R$, 有 $x_r(\omega)\in A_n$, 故在 (14) 中取 $I=(t-\frac{1}{n}, t+\frac{1}{n})$, 即得 $x_t(\omega)\in A_n$. 由 A_n 的定义，可见存在 $r_n\in R$, $|r_n-t|<\frac{1}{n}$, 使当 $x_t(\omega)\neq\pm\infty$ 时， $|x_{r_n}(\omega)-x_t(\omega)|<\frac{1}{n}$; 当 $x_t(\omega)=\infty$ 时， $x_{r_n}(\omega)>n$; 当 $x_t(\omega)=-\infty$ 时， $x_{r_n}(\omega)<-n$. 这对一切正整数 n 都成立，故得 $r_n\to t$, $x_{r_n}(\omega)\to x_t(\omega)$, 此得证 (15). □

注 2 可分性涉及闭包，即涉及极限点，因此，涉及相空间 E 中的拓扑. 在 E 中取不同的拓扑， $\delta_t(\omega)$ 的选择也随之而异.

注 3 修改记号后，本节结果对任意 $T(\subset R_1)$ 正确.

§3.2 样本函数的性质

(一) 设已给可分的随机过程 $\{x_t(\omega), t\in T\}$, $T=[a,b]$, 我们的目的是：研究在什么条件下，它的样本函数以概率 1 是阶梯函数？是连续函数？换言之，什么时候存在 ω- 集 A, $P(A)=1$, 使对每 $\omega\in A, x_t(\omega)$ 是 t 的阶梯函数？是 t 的连续函数？

设 $x(t)(t\in T)$ 是一普通的 (非随机的) 实值函数，称它为 **阶梯的**, 如存在 T 的有穷分割 D:

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b,$$

使在每 (t_i, t_{i+1}) 中， $x(t)$ 等于常数 c_i, 在 t_i 有不相等的有穷极限 $x(t_i-0), x(t_i+0)$, 但 $x(t_i)$ 等于 $x(t_i-0)$ 或 $x(t_i+0)$(对 $t_0(t_n)$ 自然只有左 (右) 极限). 称 $t_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 为 **跳跃点**.

称 $x(t)(t\in[a,\infty))$ 为 **阶梯的**, 如果存在一列 $b_n\uparrow\infty$, 使它在每个有穷 $[a,b_n](b_n>a)$ 中为阶梯的. 因此，它在每个 $[a,b_n]$ 中只有有穷多个跳跃点.

称 $x(t), t\in[a,b]$, 为 **几乎阶梯的**, 如除在有穷多个点上外，它与某阶梯函数重合. 称 $x(t), t\in[a,\infty)$ 为几乎阶梯的，如它在每个 $[a,b]$ 上是几乎阶梯的， $b>a$.

以下用 $U=(u_0,\cdots,u_n)$ 表 $[a,b]$ 中任一有穷点列， $u_o<u_1<\cdots<u_n$. 以 $S(U)$ 表 $[a,b]$ 中如下的 i 的个数：

$$0\leqslant i\leqslant n-1,\quad x(u_i)\neq x(u_{i+1}).$$

[1] 指 $[-\infty,\infty]$ 中的闭集.

引理 1 如果

$$S = \sup_{U} S(U) < \infty, \tag{1}$$

则 $x(t), t \in [a,b]$ 是几乎阶梯的. 这里上确界对一切可能的 $U \subset [a,b]$ 而取.

证 由 (1) 立知 $x(t)(t \in [a,b])$ 只可能取有穷多个不同的值. 其次, 对任一 $t \in (a,b]$, 存在 $\varepsilon_1 > 0$, 使在 $(t-\varepsilon_1, t)$ 中, $x(t)$ 为常数; 因为, 否则必存在一列 $t_0 < t_1 < \cdots$, $t_i \uparrow t$, 使 $x(t_i) \neq x(t_{i+1})$, 故 $S(t_0, \cdots, t_n) = n$ 而 $S = \infty$, 这与 (1) 矛盾. 同样, 对任一 $t \in [a,b)$, 存在 $\varepsilon_2 > 0$, 使在 $(t, t+\varepsilon_2)$ 中, $x(t)$ 为常数. 故对每一点 $t \in [a,b]$, 存在 $\varepsilon_t > 0$, 使在 $(t-\varepsilon_t, t)$ 及 $(t, t+\varepsilon_t)$ 中[1] $x(t)$ 分别为常数. 根据有穷遮盖定理, 存在有穷多个 $(t_i - \varepsilon_{t_i}, t_i + \varepsilon_{t_i})$, 其和包含 $[a,b]$. 注意 $x(t)$ 的断点都是第一类断点, 而且只可能是 t_i. 因此, 有必要时, 可在有穷多个 t_i 上改变 $x(t_i)$ 的值, 使它等于左或右极限. 由是即得一阶梯函数

引理 2 如函数 $x(t)$ $(t \in [a,b])$ 关于可列稠集 R 可分, 则

$$S = \sup_{r_i \in R} S\{(r_0, \cdots, r_n)\}, \tag{2}$$

其中上确界对一切可能的 $U = (r_0, \cdots, r_n), r_0 < r_1 < \cdots < r_n$, $r_i \in R$, 而取.

证 显然有 $S \geqslant \sup\limits_{r_i \in R} S\{(r_0, \cdots, r_n)\}$. 反之, 对任一组 $U = (u_0, \cdots, u_n) \subset [a,b]$, $u_0 < \cdots < u_n$, 令

$$\delta = \min_{i}(u_{i+1} - u_i),$$

$$\varepsilon = \min_{i}(|x(u_i) - x(u_{i+1})| : |x(u_i) - x(u_{i+1})| > 0).$$

由于 R 为可分集, 存在 $r_i \in R$, 使

$$|u_i - r_i| < \frac{\delta}{2}, \quad |x(u_i) - x(r_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是 $r_0 < r_1 < \cdots < r_n$, 而且如 $x(u_i) \neq x(u_{i+1})$, 则 $x(r_i) \neq x(r_{i+1})$. 故 $S(U) \leqslant S\{(r_0, \cdots, r_n)\}$, 从而

$$S \leqslant \sup_{r_i \in R} S\{(r_0, \cdots, r_n)\}. \ \square$$

定理 1 设 $\{x_t(\omega), t \in [a,b]\}$ 为可分过程. 如果存在常数 $K(< \infty)$, 使对 $[a,b]$ 中任意有限点列 $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, 都有

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_{t_{i-1}} \neq x_{t_i}) \leqslant K, \tag{3}$$

则此过程的样本函数以概率 1 是几乎阶梯函数. 进一步如加设过程是完全可分的, 则样本函数以概率 1 是阶梯函数.

证 对每一固定的样本函数 $x_t(\omega), t \in [a,b]$, 利用 (1) 可得一值 $S(\omega)$. 试证 $S(\omega)$ 是随机变量而且 $P(S(\omega) < \infty) = 1$.

---

[1] 如 $t = a$ 或 $t = b$, 自然只有一个这样的区间. 不妨把下面用到的 $[a, a+\varepsilon_a)$ 及 $(b-\varepsilon_b, b]$ 分别扩大为 $(a-\varepsilon_a, a+\varepsilon_a)$ 及 $(b-\varepsilon_b, b+\varepsilon_b)$.

实际上，对 $a \leqslant r_0 < r_1 < \cdots < r_n \leqslant b$, 定义随机变量

$$\xi_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{如} x_{r_i}(\omega) \neq x_{r_{i+1}}(\omega), \\ = 0, & \text{如} x_{r_i}(\omega) = x_{r_{i+1}}(\omega). \end{cases} \tag{4}$$

由 (3) 得

$$E\{S(r_0, \cdots, r_n)\} = E\left(\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} P(x_{r_i}(\omega) \neq x_{r_{i+1}}(\omega)) \leqslant K. \tag{5}$$

显然，如增加分点， $S(r_0, \cdots, r_n)$ 不下降．今将可分集 R 中的点按某序排为 $\tilde{r}_0, \tilde{r}_1, \cdots$, 取其前 $n+1$ 个按大小排成 $R_n = (r_0, r_1, \cdots, r_n)$. 于是当 ω 不属于例外集 N 时，由引理 2

$$S = \lim_{n \to \infty} S(R_n),$$

从而 $S(= S(\omega))$ 是随机变量．因 $S(R_n)$ 不下降，由 (5) 得

$$ES = \lim_{n \to \infty} ES(R_n) \leqslant K,$$

故 $P(S(\omega) < \infty) = 1$. 按引理 1, 可见 $x_t(\omega)$ $(t \in T)$ 以概率 1 是几乎阶梯函数．

设样本函数 $x_t(\omega) = x(t)$ $(t \in [a, b])$ 是几乎阶梯的，而且关于 R 可分．如点 $t_0 \overline{\in} R$, 则必存在 $t_i \in R$, $t_i \to t_0$, $t_i \neq t_0$, 使 $x(t_i) \to x(t_0)$, 于是 $x(t_0) = x(t_0 - 0)$ 或 $x(t_0 + 0)$. 因此， $x(t)$ 与某阶梯函数不重合的点必在 R 中．这样便证明了：样本函数与阶梯函数不重合的点，以概率 1 属于 R.

今设过程完全可分，在 $[a, b]$ 中任取二不相交的可列稠集 R_1 与 R_2, 它们都可取作可分集．如上所证，上述不重合的点以概率 1 既应属于 R_1, 又应属于 R_2, 但 $R_1 \cap R_2 = \phi$, 故这种点实际上以概率 1 不存在．因而 $x_t(\omega)$ $(t \in T)$ 以概率 1 是阶梯函数． □

系 1 为使可分过程 $\{x_t(\omega), t \in [a, b]\}$ 的样本函数以概率 1 为阶梯的，只要存在常数 $c(< \infty)$, 使对一切 $t \in [a, b]$, $t + \delta \in [a, b]$, 有

$$P(x_{t+\delta} \neq x_t) \leqslant c|\delta|. \tag{6}$$

证 由 (6) 立得过程的随机连续性，实际上，对任意 $\varepsilon > 0$

$$P(|x_t - x_{t+\delta}| > \varepsilon) \leqslant P(x_t \neq x_{t+\delta}) \to 0, \quad \delta \to 0.$$

因而由 §3.1 定理 2, 过程完全可分．其次有

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_{t_{i-1}} \neq x_{t_i}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1}) = c(b - a) < \infty.$$

故由定理 1 即得所欲证． □

（二） 下面研究样本函数的连续性问题．注意在闭集 $[a, b]$ 上，连续函数是均匀连续的；为使函数在 $[a, \infty)$ 上连续，只要它在每一 $[a, a+n]$ $(n > 0)$ 上连续就够了．因此，下面只考虑有穷的 $T = [a, b]$.

称函数 $x(t)$ **均匀连续于** R, 如对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使当 $r_1\in R, r_2\in R, |r_1-r_2|<\delta$ 时，有

$$|x(r_1)-x(r_2)|<\varepsilon. \tag{7}$$

显然，如样本函数 $x(t)$ $(t\in[a,b])$ 关于 R 可分，而且在 R 上均匀连续，则 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上也是均匀连续的. 事实上，任取 $t_1\in[a,b], t_2\in[a,b], |t_1-t_2|<\delta$. 由于 R 为可分集，必存在 $r_1\in R, r_2\in R$, 使

$$|r_1-r_2|<\delta,\quad |x(t_i)-x(r_i)|<\frac{\varepsilon}{2}\ (i=1,2).$$

由 (7) 立得 $|x(t_1)-x(t_2)|<2\varepsilon$.

定理 2 设 $\{x_t(\omega), t\in[a,b]\}$ 为满足下列条件的可分过程：存在三个数 $\alpha>0$, $\varepsilon>0$, $c\geqslant 0$, 使对任意的 $t\in[a,b]$, $t+\Delta\in[a,b]$, 有

$$E\{|x_t(\omega)-x_{t+\Delta}(\omega)|^\alpha\}\leqslant c|\Delta|^{1+\varepsilon}, \tag{8}$$

则 $x_t(\omega)$ 在 $[a,b]$ 上均匀连续的概率为 1.

证 对任意 $d>0$ 及 $t\in[a,b]$, 由 Чебышев 不等式及 (8)

$$P(|x_t-x_{t+\Delta}|>d)\leqslant\frac{E|x_t-x_{t+\Delta}|^\alpha}{d^\alpha}\leqslant\frac{c}{d^\alpha}|\Delta|^{1+\varepsilon}\to 0\ \ (|\Delta|\to 0).$$

由上节定理 2, $\{x_t(\omega), t\in[a,b]\}$ 对 $[a,b]$ 中子集 $R=\left(\frac{k}{2^n}\right)$ 可分，这里 k,n 为任意整数使 $\frac{k}{2^n}\in[a,b]$. 故依照定理前所指出的事实，只要证明样本函数 $x_t(\omega)$ 以概率 1 在 R 上均匀连续.

对 $\frac{k}{2^n}\in[a,b]$, $\frac{k+1}{2^n}\in[a,b]$, 有

$$P\Big(\left|x_{k/2^n}-x_{(k+1)/2^n}\right|>\frac{1}{n^2}\Big)\leqslant n^{2\alpha}E\Big\{\left|x_{k/2^n}-x_{(k+1)/2^n}\right|^\alpha\Big\}\leqslant\frac{cn^{2\alpha}}{2^{n(1+\varepsilon)}}, \tag{9}$$

因此

$$P\Big(\bigcup_k\Big\{\left|x_{k/2^n}-x_{(k+1)/2^n}\right|>\frac{1}{n^2}\Big\}\Big)\leqslant\frac{c|T|n^{2\alpha}}{2^{n\varepsilon}}. \tag{10}$$

这里求和是对一切使 $\frac{k}{2^n}$ 及 $\frac{k+1}{2^n}$ 皆属于 $[a,b]$ 的 k 进行，而 $|T|$ 表 $T=[a,b]$ 的长，即 $b-a$. 由于级数 $\sum\limits_n\frac{n^{2\alpha}}{2^{n\varepsilon}}<\infty$, 由 Borel-Cantelli 引理，(10) 中左方括号中的事件以概率 1 只出现有穷多个，即对几乎一切 ω, 存在正整数 $N=N(\omega)$, 使 $n\geqslant N$ 时，对一切使 $\frac{k}{2^n}$ 及 $\frac{k+1}{2^n}$ 都属于 $[a,b]$ 的 k, 诸不等式

$$\left|x_{k/2^n}(\omega)-x_{(k+1)/2^n}(\omega)\right|\leqslant\frac{1}{n^2} \tag{11}$$

同时成立. 任意固定这样的一个 ω, 以下证此 ω 所对应的样本函数 $x_t(\omega)$ 在 R 上均匀连续.

设已给 $\varepsilon_1>0$, 可求出正整数 $N_1(=N_1(\omega))$, 使 $N_1>N$, 并使

$$\sum_{n\geqslant N_1}\frac{1}{n^2}<\frac{\varepsilon_1}{2}. \tag{12}$$

取 $\delta=\frac{1}{2^{N_1}}$, 试证对此 δ,(7) 成立. 注意任一形如 $\left[\frac{k_1}{2^{l_1}},\frac{k_2}{2^{l_2}}\right]$ 的闭区间可表为若干个互邻的形如 $\left[\frac{\tau}{2^m},\frac{\tau+1}{2^m}\right]$ 的闭区间的和 [1] 其中 τ 及 M 均为整数，且具有固定的 m 的闭区间在此和中出现的次数不多于 2. 如果 $\frac{k_2}{2^{l_2}}-\frac{k_1}{2^{l_1}}\leqslant\delta=\frac{1}{2^{N_1}}$, 则将此 $\left[\frac{k_1}{2^{l_1}},\frac{k_2}{2^{l_2}}\right]$ 表为上述形状的闭区间的和后，如 $\left[\frac{k}{2^m},\frac{k+1}{2^m}\right]$ 属于此和中，则必 $m\geqslant N_1>N$.(否则，如说 $m<N_1$, 那么仅此一闭区间的长 $\frac{1}{2^m}$ 就已超过 $\frac{1}{2^{N_1}}$.) 故对这些闭区间，由 (11) 得

$$\left|x_{k/2^m}(\omega)-x_{(k+1)/2^m}(\omega)\right|\leqslant\frac{1}{m^2}.$$

对上述和中可能出现的一切 m 求和，由 (12) 及其下指出的注意事项立得

$$\left|x_{k_1/2^{l_1}}(\omega)-x_{k_2/2^{l_2}}(\omega)\right|\leqslant 2\sum_{m\geqslant N_1}\frac{1}{m^2}<\varepsilon_1.\ \square$$

定理 2 可以粗略地理解为：只要可分过程的振幅 $|x_t(\omega)-x_{t+\Delta}(\omega)|$ 平均地均匀的小，就可保证样本函数概率 1 的连续性. 这里条件是加在 **平均** 振幅上. 当然也可以考虑其它条件，使振幅在某种意义下充分地小，以便连续性成立 (参看第五章，定理 1).

系 2 设可分过程 $\{x_t(\omega),t\in[a,b]\}$ 的增量

$$\Delta x_t(\omega)=x_{t+\Delta}(\omega)-x_t(\omega)$$

有正态分布， $E\{\Delta x_t(\omega)\}=0$, 而且存在 $\varepsilon>0$ 使 $\Delta x_t(\omega)$ 的方差

$$D\{\Delta x_t(\omega)\}\leqslant c|\Delta|^{\varepsilon}\ (c\geqslant 0,t\in[a,b]), \tag{13}$$

则此过程的样本函数以概率 1 连续.

证 只要验证 (8) 式正确. 注意如随机变量 $y(\omega)$ 的分布为 $N(0,\sigma)$ 时，有

$$E|y|^{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{\alpha}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx=\frac{\sigma^{\alpha}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|z|^{\alpha}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz=\sigma^{\alpha}k,$$

其中 $x=\sigma z$, $k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|z|^{\alpha}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$. 由上式及 (13) 得

$$E\{|\Delta x_t(\omega)|\}^{\alpha}=[D\{\Delta x_t(\omega)\}]^{\frac{\alpha}{2}}\cdot k\leqslant c^{\frac{\alpha}{2}}|\Delta|^{\frac{\alpha\varepsilon}{2}}k$$

选 α 使 $\frac{\alpha\varepsilon}{2}>1$, 即得 (8). □

现在来考虑实正态过程. 它的有穷维联合分布为函数 $m(t)$ 及 $\lambda(s,t)$ (见 §1.2, (11),(12)) 所决定.

系 3 设 $\{x_t(\omega),t\in[a,b]\}$ 为可分实正态过程，其 $m(t)$ 连续而 $\lambda(s,t)$ 满足条件

$$|\lambda(s,t)-\lambda(s,s)|\leqslant c|t-s|^{\varepsilon}, \tag{14}$$

其中 $c\geqslant 0,\varepsilon>0$, 则样本函数以概率 1 连续.

[1] 例如： $\left[\frac{1}{8},\frac{3}{4}\right]=\left[\frac{1}{8},\frac{2}{8}\right]+\left[\frac{1}{4},\frac{2}{4}\right]+\left[\frac{2}{4},\frac{3}{4}\right]$; $\left[\frac{1}{16},\frac{13}{16}\right]=\left[\frac{1}{16},\frac{2}{16}\right]+\left[\frac{1}{8},\frac{2}{8}\right]+\left[\frac{1}{4},\frac{2}{4}\right]+\left[\frac{2}{4},\frac{3}{4}\right]+\left[\frac{12}{16},\frac{13}{16}\right]$. 我们这里只需要考虑长度不超过 $\frac{1}{2}$ 的区间 (详见 §3.5,10).

证 令 $y_t(\omega)=x_t(\omega)-m(t)$. 由 $m(t)$ 的连续性知 $\{y_t(\omega),t\in[a,b]\}$ 也是可分实正态过程. 由 (14)

$$D\{x_s(\omega)-x_t(\omega)\}=E\{y_s(\omega)-y_t(\omega)\}^2=|\lambda(s,s)-\lambda(s,t)+\lambda(t,t)-\lambda(t,s)|$$
$$\leqslant|\lambda(s,s)-\lambda(s,t)|+|\lambda(t,t)-\lambda(t,s)|\leqslant 2c|t-s|^{\varepsilon}.$$

由系 2 即得所欲证. □

§3.3 随机过程的可测性

(一) 考虑 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机过程 $\{x_t(\omega),t\in T\}$. 为叙述简单计，设 T 为 R_1 中任一区间 (有穷或无穷，开或闭均可). 由过程的定义，对固定的 $t\in T, x_t(\omega)$ 是 ω 的 $\mathcal{F}$ 可测函数；然而，对固定的 ω, 样本函数 $x_t(\omega)$, 作为 $t\in T$ 的函数，我们却未假定它的任何性质，甚至连对 T 上某 σ 代数的可测性也不具备，当然谈不上对 t 的积分等等问题了. 为了充分运用测度论这一工具，有必要引入过程的可测性的概念.

取可测空间 $(T,\mathcal{B}_1)$, 这里 $\mathcal{B}_1$ 表 T 中全体 Borel 子集所成的 σ 代数. 以

$\mathcal{B}_1\times\mathcal{F}$ 表 $\mathcal{B}_1$ 与 $\mathcal{F}$ 的乘积 σ 代数；

$\mu=L\times P$ 表 $\mathcal{B}_1$ 上勒具格测度 L 与 $\mathcal{F}$ 上概率测度 P 的独立乘积测度；

$\overline{\mathcal{B}_1\times\mathcal{F}}$ 表关于 μ 完全化的 σ 代数；

这里所以特别取 $\mathcal{B}_1$ 是由于通常的关于 t 的积分都是在 Borel 集或勒贝格集上对勒贝格测度而取的；其实下面的计论经明显的修改后可用于 T 上其它 σ 代数及其上的其它测度.

定义 1 称过程 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 为 **可测的**, 如对任一实数 c, (t,ω)- 集

$$((t,\omega):x_t(\omega)\leqslant c)\in\overline{\mathcal{B}_1\times\mathcal{F}},\tag{1}$$

称它为 Borel**可测的**, 如

$$((t,\omega):x_t(\omega)\leqslant c)\in\mathcal{B}_1\times\mathcal{F},\tag{2}$$

显然， Borel 可测过程是可测的. 至于什么时候需要什么样的可测性，则视问题而异. 例如，若要研究 $x_\tau(\omega)$, 其中 $\tau=\tau(\omega)$ 是一随机变量，为使 $x_\tau(\omega)$ 也是随机变量，即 $\mathcal{F}$ 可测，则一般地过程的可测性不够用，而要假定过程的 Borel 可测性.

定理 1 设 $\{\xi_t(\omega),t\in T\}$ 是随机连续的过程. 于是必存在与它等价的、完全可分、可测的过程 $\{x_t(\omega),t\in T\}$.

证 1° 不失一般性，象 §3.1 定理一样，可设 $\xi_t(\omega)$ 取实数值. 还可假定存在常数 $c<\infty$, 使

$$|\xi(t,\omega)|<c.\tag{3}$$

否则，令

$$\widetilde{\xi}(t,\omega)=\tan^{-1}\xi(t,\omega).\tag{4}$$

显然 $\{\widetilde{\xi}(t,\omega),t\in T\}$ 是有界及随机连续的. 如对它存在等价的完全可分可测过程 $\{\widetilde{x}(t,\omega),t\in T\}$, 则过程

$$x(t,\omega)=\tan\,\widetilde{x}(t,\omega)\tag{5}$$

为所求的过程.

实际上，由 $P(\widetilde{\xi}(t)=\widetilde{x}(t))=1$, 即得

$$P(\xi(t)=x(t))=1.$$

其次，对任意 $c\in R_1$

$$\begin{aligned}((t,\omega):x(t,\omega)\leqslant c)&=((t,\omega):\tan[\widetilde{x}(t,\omega)]\leqslant c)\\&=((t,\omega):\widetilde{x}(t,\omega)\in B),\end{aligned}\tag{6}$$

其中 $B=(y:\tan y\leqslant c)$ 是一维 Borel 集. 由过程 $\{\widetilde{x}(t,\omega),t\in T\}$ 的可测性即知 (6) 中的 (t,ω)-集属于 $\overline{\mathcal{B}_1\times\mathcal{F}}$. 最后，设 R 为 T 的任一可列稠子集，由于 $\{\widetilde{x}(t,\omega),t\in T\}$ 的完全可分性，存在 $N\in\mathcal{F},P(N)=0$, 如 $\omega\overline{\in}N$, 则对任意 $t\in T$, 必存在 $\{r_n\}\subset R$, $r_n\to t$, $\widetilde{x}(r_n,\omega)\to\widetilde{x}(t,\omega)$, 从而

$$x(r_n,\omega)=\tan\widetilde{x}(r_n,\omega)\to\tan\widetilde{x}(t,\omega)=x(t,\omega).$$

此表示 $\{x(t,\omega),t\in T\}$ 是完全可分的.

2° 今设 T 为有穷区间 (开或闭，半开半闭均可), 我们来证明本定理.

不妨设 (3) 成立. 由假定及 §3.1 定理 1,2, 还可以设此过程关于 T 中任一可列稠子集 R 可分. 固定 R, 将 R 中前 n 个元排为

$$s_1^{(n)}<s_2^{(n)}<\cdots<s_n^{(n)}.$$

设 $T=[a,b]$ 而令 $a=s_0^{(n)}$, $b=s_{n+1}^{(n)}$, 造

$$x_n(t,\omega)=\xi(s_{j-1}^{(n)},\omega),\ \text{如}s_{j-1}^{(n)}\leqslant t<s_j^{(n)},\ j=1,2,\cdots,n.$$

易见过程 $x_n(t,\omega)$ $(t\in[a,b])$ 是 Borel 可测的，因为

$$\begin{aligned}((t,\omega):x_n(t,\omega)\leqslant c)&=\bigcup_{j=1}^{n}[s_{j-1}^{(n)},s_j^{(n)})\times(\xi(s_{j-1}^{(n)},\omega)\leqslant c)\\&\cup[s_n^{(n)},s_{n+1}^{(n)}]\times(\xi(s_n^{(n)},\omega)\leqslant c)\in\mathcal{B}_1\times\mathcal{F}.\end{aligned}\tag{6'}$$

对任意固定的 $t_0\in T$, 由随机连续性假定，有

$$P\lim_{n\to\infty}x_n(t_0,\omega)=\xi(t_0,\omega).\tag{7}$$

但对均匀有界随机变量列，依概率收敛等价于平均收敛 [1]，故

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}E|x_n(t_0,\omega)-\xi(t_0,\omega)|=0,\\&\lim_{n,m\to\infty}E|x_n(t_0,\omega)-x_m(t_0,\omega)|=0.\end{aligned}\tag{8}$$

[1]这由下式看出：若 $|x_n|<c$, $|\xi|<c$(a.s.), 则对任意 $\varepsilon>0$, 有 $\varepsilon P(|x_n-\xi|>\varepsilon)\leqslant E|x_n-\xi|=\int_{|x_n-\xi|>\varepsilon}|x_n-\xi|P(d\omega)+\int_{|x_n-\xi|\leqslant\varepsilon}|x_n-\xi|P(d\omega)\leqslant 2cP(|x_n-\xi|>\varepsilon)+\varepsilon$.

由 $x_n(t,\omega)$ 的有界性、T 的有界性及 Fubini 定理

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_{T\times\Omega}|x_n(t,\omega)-x_m(t,\omega)|\mu(dt,d\omega)$$
$$=\lim_{n,m\to\infty}\int_T E|x_n(t,\omega)-x_m(t,\omega)|\,L(dt)=0,$$

由此可见 $\{x_n(t,\omega)\}$ 关于 μ 平均收敛，故更依测度 μ 收敛，从而存在一子列 $\{x_{n_j}(t,\omega)\}$ 及 $y(t,\omega)$, 使关于 μ 几乎处处地有

$$\lim_{j\to\infty}x_{n_j}(t,\omega)=y(t,\omega), \tag{9}$$

而且可取 $\{y(t,\omega),t\in T\}$ 为 Borel 可测过程. 以 M 表 (9) 式不成立的 (t,ω)- 集，则 $\mu(M)=0$. 由 Fubini 定理，存在 t- 集 $T_0\subset T$, $L(T_0)=0$, 使如固定 $t\in T-T_0$, 则以概率 1 有

$$y(t,\omega)=\lim_{j\to\infty}x_{n_j}(t,\omega). \tag{10}$$

由 (7) 知如 $t\in T-T_0$, 有

$$P(y(t,\omega)=\xi(t,\omega))=1. \tag{11}$$

今定义 $\{x(t,\omega),t\in T\}$ 使 [1]

$$x(t,\omega)=\begin{cases}y(t,\omega), & \text{如 } t\in T-(T_0\cup R),\text{ 而且在此 } (t,\omega) \text{ 上，(9) 式成立;}\\ \xi(t,\omega), & \text{反之.}\end{cases} \tag{12}$$

由于 (9) 式关于 μ 几乎处处成立，而且 $\mu((T_0\cup R)\times\Omega)=0$, 故 $x(t,\omega)$ 与 $y(t,\omega)$ 不重合的点必构成某 μ 零测集的子集. 既然 $y(t,\omega)$ 为 $\mathcal{B}_1\times\mathcal{F}$ 可测，故 $\{x(t,\omega),t\in T\}$ 是可测过程.

由 (11),(12) 知 $\{\xi(t,\omega),t\in T\}$ 与 $\{x(t,\omega),t\in T\}$ 随机等价.

试证 $\{x(t,\omega),t\in T\}$ 完全可分. 由 (12), $X_R(\omega)=\Xi_R(\omega)[=((r,\xi_r(\omega)),r\in R)]$, 故 $\overline{X_R(\omega)}=\overline{\Xi_R(\omega)}$(一切 $\omega\in\Omega$). 任取一点 [2] $(t,x(t,\omega))$, $\omega\in\overline{N}$. 那么，它或者重合于 $(t,\xi(t,\omega))$, 此时由于 $\xi(t,\omega)$ 关于 R 的可分性，有

$$(t,x(t,\omega))=(t,\xi(t,\omega))\in\overline{\Xi_R(\omega)}=\overline{X_R(\omega)};$$

或者它重合于 $(t,y(t,\omega))$, 由 (9) 及 $x_{n_j}(t,\omega)$ 的定义仍知

$$(t,x(t,\omega))=(t,y(t,\omega))\in\overline{\Xi_R(\omega)}=\overline{X_R(\omega)}.$$

于是得证 $\{x(t,\omega),t\in T\}$ 关于 R 可分，由 §3.1 定理 2, 即知它完全可分.

3° 如 T 为无穷区间，则可表 $T=\bigcup_m T_m$, 这里 T_m 为有穷区间，$T_n\cap T_m=\phi(n\neq m)$. 对每一 $\{\xi_t(\omega),t\in T_m\}$, 由 2° 得其等价的完全可分、可测修正 $\{x_t^{(m)}(\omega),t\in T_m\}$. 于是 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 即所求，其中

$$x_t(\omega)=x_t^{(m)}(\omega),\quad \text{如} t\in T_m. \ \square$$

---

[1] 即如 $(t,\omega)\in\{(T-(T_0\cup R))\times\Omega\}\cap\overline{M}$.

[2] N 表原可分过程 $\xi_t(\omega)$ $(t\in T)$ 的例外集.

注 1 稍为修改记号，定理 1 对任意 Borel 集 $T \subset R_1$ 成立.

(二) 在某些过程 (例如马氏过程) 的研究中，有时还需要一种更强的可测性.

设 $\{x_t(\omega), t \in T\}$ 为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的过程，其相空间为可测空间 $(E, \mathcal{B})$. 为确定计，设 T 为 R_1 中某区间. 对 $[u,v] \subset T$, 以 $\mathcal{B}_v^u$ 表 $[u,v]$ 中全体 Borel 子集所成 σ 代数，以 $\mathcal{N}_v^u$ 表 Ω 中 σ 代数

$$\mathcal{N}_v^u = \mathcal{F}\{x_t(\omega),\ u \leqslant t \leqslant v\}, \tag{13}$$

即它是含诸集 $(x_t(\omega) \in B)$ $(t \in [u,v], B \in \mathcal{B})$ 的最小 σ 代数. 显然，$\mathcal{N}_v^u \subset \mathcal{F}$.

直觉上，$\mathcal{N}_v^u$ 可理解为在时间 $[u,v]$ 内，过程运动中所发生的事件所成的 σ 代数. 需强调指出，这些事件发生在时间 $[u,v]$ 中.

定义 2 称过程 $\{x_t(\omega), t \in T\}$ 为**强可测的**, 如对任意 $B \in \mathcal{B}$, 任意 $[u,v] \subset T$, 有

$$((t,\omega) : u \leqslant t \leqslant v,\ x_t(\omega) \in B) \in \mathcal{B}_v^u \times \mathcal{N}_v^u. \tag{14}$$

显然，当 $(E,\mathcal{B}) = (R_1, \mathcal{B}_1)$ 时，强可测过程是 Borel 可测的.

今设 $(E, \mathfrak{C}, \mathcal{B})$ 为拓扑可测空间，这里 $\mathfrak{C}$ 为全体开集所成的集系，$\mathcal{B}$ 为含全体开集的最小 σ 代数. 说**过程为右连续的** (或**连续的**), 如果它的一切样本函数都是 $t(\in T)$ 的右连续 (或连续) 函数.

引理 1 取值于距离可测空间的右连续过程是强可测的.

证 考虑任意 $[u,v] \subset T$, 对每正整数 n 及 $t \in [u,v]$, 定义

$$x_n(t,\omega) = \begin{cases} x\left(\dfrac{k+1}{2^n}, \omega\right), & \text{如 } \dfrac{k}{2^n} \leqslant t < \frac{k+1}{2^n}, \text{ 且 } \dfrac{k+1}{2^n} \in [u,v]; \\ x(v,\omega), & \text{如 } \dfrac{k}{2^n} \leqslant t < \frac{k+1}{2^n}, \text{ 且 } \dfrac{k}{2^n} \in [u,v], \dfrac{k+1}{2^n} \overline{\in} [u,v]. \end{cases}$$

如同 (6') 一样，可见对 $x_n(t,\omega), t \in [u,v]$, (14) 式成立. 但由右连续性，对一切 ω

$$x_n(t,\omega) \to x(t,\omega) \quad (n \to \infty).$$

故由附篇引理 12, 知 (14) 对 $\{x_t(\omega), t \in T\}$ 成立. □

定理 2 设 $\{\xi_t(\omega), t \in T\}$ 为实值可分过程，而且对每固定的 $t \in T$, 有

$$P\left(\varliminf_{s \downarrow t} \xi(s,\omega) = \xi(t,\omega)\right) = 1 \tag{15}$$

则必存在等价的可分、Borel 可测过程 $\{x_t(\omega), t \in T\}$, 它的几乎一切样本函数是右下半连续的.

证 设 $\{\xi_t(\omega), t \in T\}$ 的可分集为 R, 对每固定 t, 令 $\zeta_t(\omega) = \varliminf_{s \downarrow t} \xi_s(\omega)$. 由可分性及 (15), 存在 Ω_0, $P(\Omega_0) = 1$, 使对任意 $\omega \in \Omega_0$, 有

(a) 样本函数 $\xi(\cdot,\omega)$ 关于 R 可分；

(b) $\xi(r,\omega) = \zeta(r,\omega)$, $r \in R$.

任取一实数 c 而定义

$$x(t,\omega) \equiv \zeta(t,\omega), \text{ 如}\omega \in \Omega_0;\ \equiv c, \text{ 如}\omega \in \overline{\Omega}_0 \tag{16}$$

则 $\{x(t,\omega),t\in T\}$ 即所求的过程. 实际上, 由 (15) 、 (16) 知 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 与 $\{\xi_t(\omega),t\in T\}$ 等价. 其次, 以 r 表 R 中的元, 如 $\omega\in\Omega_0$, 则

$$\zeta(t,\omega)=\varliminf_{r\downarrow t}\xi(r,\omega)=\varliminf_{r\downarrow t}\zeta(r,\omega)=\varliminf_{s\downarrow t}\zeta(s,\omega)$$

其中第一等号由于 (a), 第二等号由于 (b), 第一, 三项相等说明 $\zeta(\cdot,\omega)$ 关于 R 可分, 由此可分性得第三等号, 从而 $\zeta(\cdot,\omega)$ 右下半连续. 因之由 (16) 知对一切 ω, $x(\cdot,\omega)$ 也关于 R 可分而且也右下半连续. 最后, 对任实数 λ,

$$\Big((t,\omega):\varliminf_{t<r<t+\frac{1}{n}}\xi(r,\omega)<\lambda\Big)=\bigcup_{r\in R}\Big(t:\ t<r<t+\frac{1}{n}\Big)\times(\omega:\xi(r,\omega)<\lambda)$$

而右方第一因子集属于 $\mathcal{B}_1$, 第二因子集属于 $\mathcal{F}$, 故 $\inf\limits_{t<r<t+\frac{1}{n}}\xi(r,\omega)$ 为 $\mathcal{B}_1\times\mathcal{F}$ 可测, 从而 $\zeta(t,\omega)=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{t<r<t+\frac{1}{n}}\xi(t,\omega)$, $(\omega\in\Omega_0)$ 在 $T\times\Omega_0$ 上为 $\mathcal{B}_1\times\mathcal{F}$ 可测, 故 $x(t,\omega)$ 在 $T\times\Omega$ 上也如此. □

§3.4 Wiener 过程、 Poisson 过程与半鞅

(一) 实值随机过程 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ (T 为区间, 开、闭、半开、半闭、有穷、无穷均可) 称为 Wiener**过程** 或 **布朗运动**, 如果第一, 它有 **独立增量**: 即对任意 $t_1<\cdots<t_n$ $(n>2,t_i\in T)$, 诸增量

$$x_{t_1},x_{t_2}-x_{t_1},\cdots,x_{t_n}-x_{t_{n-1}}\tag{1}$$

是相互独立的随机变量, 第二, x_t-x_s $(s,t\in T)$ 有 $N(0,\sigma\cdot|t-s|^{1/2})$ 分布, $\sigma>0$.

Wiener 过程是实际中的布朗运动的数学模型, 直观的想法如下: 1827 年布朗 (Brown) 发现在水中的花粉 (或其它液体中某微粒) 在不停地运动, 起因是由于粒子受到周围分子不平衡的碰撞. 分子的运动产生一种涨落不定的力. 粒子每秒钟所受碰撞次数非常大, 达到 10^{21} 次. 因此可认为它因受到很多微小的随机力的作用而作随机运动. 以 x_t 表它在 t 时所在位置的一个坐标, 设液体是均匀的, 此时自然设想自时刻 t_1 到 t_2 的位移 $x_{t_2}-x_{t_1}$ 是许多几乎独立的小位移的和, 即许多小随机变量的和. 根据中心极限定理, 自然应该假设 $x_{t_2}-x_{t_1}$ 有正态分布. 由液体的均匀性, 还应设 $E(x_{t_2}-x_{t_1})=0$, 而其方差为

$$D(x_{t_2}-x_{t_1})=E(x_{t_2}-x_{t_1})^2=\sigma^2(t_2-t_1).$$

这里 $\sigma>0$ 是依赖于液体的具体性质的常数, 由均匀性, 它应与时间 t 及空间位置无关. 又因位移 $x_{t_n}-x_{t_{n-1}},\cdots,x_{t_2}-x_{t_1}$ 分别为许多几乎独立的小位移的和, 故应设它们是独立的.

现在运用前几节的理论来研究 Wiener 过程.

由于对任意固定的 $t\in T$

$$\lim_{s\to t}E|x_s-x_t|^2=\lim_{s\to t}\sigma^2|s-t|=0,$$

故它是随机连续的. 从而由 §3.1 定理 2, 存在完全可分的修正, 后者仍记为 $\{x_t(\omega), t\in T\}$. 由 §3.2 系 2 及假设 $D(x_s-x_t)=\sigma^2|s-t|$, 对此修正, 几乎一切样本函数都是连续的; 换言之, 存在 A, $P(A)=1$, 使 $\omega\in A$ 时, $x_t(\omega)$ 在 T 上连续. 定义

$$\overline{x}_t(\omega)=\begin{cases}x_t(\omega), & \text{如}\omega\in A;\\ 0, & \text{如}\omega\overline{\in}A,\end{cases} \tag{2}$$

则 $\{\overline{x}_t(\omega), t\in T\}$ 的一切样本函数都连续, 显然它也是原过程的一个修正. 由 §3.3 引理 1, $\{\overline{x}_t(\omega), t\in T\}$ 是强可测的, 故更是 Borel 可测的与可测的.

虽然可分 Wiener 过程的样本函数 $x(t,\omega)$ $(t\in T)$ 以概率 1 连续, 然而它却在任一固定的 t_0 上有有穷导数的概率等于 0.

实际上, 如说不然, 对 $\Delta>0$, 有

$$P\Big(\lim_{\Delta\to 0}\frac{x(t_0+\Delta,\omega)-x(t_0,\omega)}{\sqrt{\Delta}}=0\Big)\geqslant P(x(t,\omega)\text{ 在 }t_0\text{ 有有穷导数})=a.$$

这里 $a>0$ 为某常数 [2]. 因此, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $\Delta<\delta$ 时, 有

$$P\Big(\Big|\frac{x(t_0+\Delta,\omega)-x(t_0,\omega)}{\sqrt{\Delta}}\Big|<\varepsilon\Big)>\frac{a}{2}. \tag{3}$$

但另方面, 由于 $x(t_0+\Delta)-x(t_0)$ 有 $N(0,\sigma\sqrt{\Delta})$ 分布, 故 $\frac{x(t_0+\Delta)-x(t_0)}{\sqrt{\Delta}}$ 有 $N(0,\sigma)$ 分布. 由正态分布的性质, 当 ε 充分小时, (3) 式左方的概率 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{|y|<\varepsilon}\exp\big(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\big)\,dy$ 便小于 $\frac{a}{2}$, 不论 $\Delta>0$ 如何. 这与 (3) 矛盾.

这种现象产生的实质原因是: 由假设 x_s-x_t 的方差 $E|x_s-x_t|^2$ 与 $|s-t|$ 同级, 而为了有有穷导数必须 $|x_s-x_t|$ 与 $|s-t|$ 同级. 既然 "平均地"$|x_s-x_t|$ 与 $\sqrt{|s-t|}$ 同级, 故不能有有穷导数.

(二) 取非负整数值的随机过程 $\{x_t(\omega), t\in[0,\infty)\}$ 称为 Poisson**过程**, 如果它有独立增量, 而且对任意 $t>s\geqslant 0$

$$P(x_t(\omega)-x_s(\omega)=k)=\frac{e^{-\lambda(t-s)}\lambda^k(t-s)^k}{k!}. \tag{4}$$

这里 $\lambda>0$ 为常数, 而 $k=0,1,2,\cdots$.

试研究此过程的样本函数的性质.

第一, 对任意实数 δ, 使 $t\geqslant 0, t+\delta\geqslant 0$, 有

$$P(x_{t+\delta}\neq x_t)=1-P(x_{t+\delta}=x_t)=1-e^{-\lambda|\delta|}\leqslant\lambda|\delta|,$$

故过程是随机连续的而且满足 §3.2(6). 因此, 如假设此过程是可分的, 则它是完全可分的, 并且样本函数以概率 1 在任意 $[0,n]$, 从而在 $[0,\infty)$ 中是阶梯函数. 以下设过程可分, 可分集为 R.

[2]这说明 $\frac{x(t_0+\Delta)-x(t_0)}{\sqrt{\Delta}}$ 在一概率不小于 a 的集上几乎处处收敛, 故在此集上必概率收敛.

第二，对任意 $0 \leqslant s < t$, 由 (4) 得

$$P(x_t \geqslant x_s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(x_t - x_s = k) = 1,$$

故

$$P(x_t \geqslant x_s \text{ 对 } R \text{ 中一切} s, t,\ t > s) = 1.$$

换言之，样本函数在 R 上以概率 1 是不减的，由可分性知，它以概率 1 在 $[0, \infty)$ 上不减.

第三，几乎一切样本函数是不连续的，因此，几乎一切样本函数有断点，如上所述，后者是跳跃点 (参看 §3.2 中的定义). 实际上

$$P(x_t(\omega) \text{ 在 } [0, a] \text{ 中连续}) = P(x_a(\omega) = x_0(\omega)) = e^{-\lambda a} \to 0 \ \ (a \to \infty).$$

故令 $A_\infty = (x_t(\omega) \text{ 在 } [0, \infty) \text{ 连续})$, $A_a = (x_t(\omega) \text{ 在 } [0, a] \text{ 连续})$, 则因 $A_b \subset A_a (a \leqslant b)$, 故

$$P(A_\infty) = P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n \to \infty} P(A_n) = \lim_{n \to \infty} e^{-\lambda n} = 0.$$

第四，对几乎一切样本函数，在每一跳跃点的跃度 (即左右极限的差的绝对值) 为 1. 实际上，如在 $[0, a]$ 中，有一跃度大于 1, 则必

$$\max_{0<j<n} \left[x\Big(\frac{j+1}{n} a\Big) - x\Big(\frac{j-1}{n} a\Big) \right] > 1 \ \ (n \geqslant 1).$$

但此事件的概率不超过

$$\sum_{j=1}^{n-1} P\Big(x\Big(\frac{j+1}{n} a\Big) - x\Big(\frac{j-1}{n} a\Big) > 1 \Big)$$
$$= (n-1)\Big(1 - e^{-2\lambda a/n} - e^{-2\lambda a/n} \cdot \frac{2\lambda a}{n}\Big) \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

故在 $[0, a]$ 中存在跃度大于 1 的概率为 0. 然后利用上段中同样方法即得所欲证.

第五，在任一固定点 $t_0 \geqslant 0$ 上，几乎一切样本函数都是连续的. 实际上，如 $t_0 > 0$

$$P(x(t_0 + \varepsilon, \omega) - x(t_0 - \varepsilon, \omega) > 0) = 1 - e^{-2\lambda\varepsilon} \to 0 \ (\varepsilon \to 0),$$
$$P(x(\varepsilon, \omega) - x(0, \omega) > 0) = 1 - e^{-\lambda\varepsilon} \to 0 \ (\varepsilon \to 0).$$

然后利用第三段中同样方法.

注意性质三，五不是矛盾的. 第三表示，存在 ω 集 A, $P(A) = 1$, 使对任意的 $\omega \in A$, 样本函数 $x(t) (= x_t(\omega))$ 不是 t 的连续函数. 而第五表示，对任意固定的 t_0, 存在 ω 集 B_{t_0}, $P(B_{t_0}) = 1$, 使 $\omega \in B_{t_0}$ 时，样本函数 $x(t) (= x_t(\omega))$ 在固定点 t_0 是连续的. 换言之，虽然几乎一切样本函数都不是连续的，然而它的断点却是 "流动的". 这引导出下列一般的概念:

设 $\{x_t(\omega), t \in T\}$ 为任意的随机过程， $t_0 \in T$. 如果存在序列 $s_n \to t_0$, 使

$$P\big(\lim_{n \to \infty} x_{s_n}(\omega) = x_{t_0}(\omega)\big) < 1$$

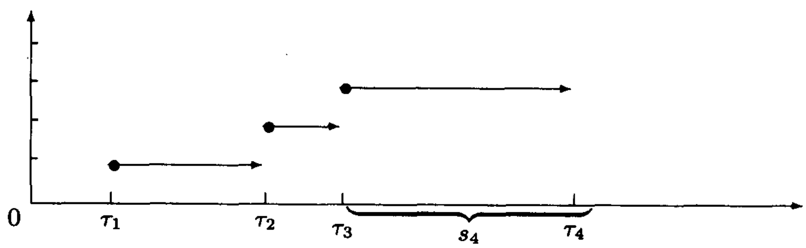
时，**就称 t_0 为过程的 固定断点**，不是固定断点的断点称为 **流动断点**.

第三，第五可改述为：对可分 Poisson 过程，以概率 1 存在流动断点，但任何 $t_0(\geqslant 0)$ 都不是固定断点.

既然几乎一切样本函数都是阶梯函数，它们的跳跃点可按大小排列成

$$\tau_1(\omega) < \tau_2(\omega) < \cdots.$$

在任意有穷区间中，只可能有有穷多个 τ_i 的概率为 1. 每一 $\tau_i(\omega)$ 以概率 1 有定义. 由阶梯函数的定义，$x(\tau_i)$ 等于 $x(\tau_i+0)$ 或 $x(\tau_i-0)$. 由于 τ_i 不是固定断点，对任一非负常数 t_0, $P(\tau_i = t_0) = 0$, 故不影响过程的有穷维分布，可设 $x(\tau_i,\omega) = x(\tau_i+0,\omega)$. 经过这样修改后，此可分 Poisson 过程的几乎一切样本函数都是右连续的阶梯函数，取非负整数值，而且 $x(\tau_i) - x(\tau_i - 0) = 1$. 下面绘出一个典型的样本函数的图形 (其中设 $x(0) = 0$).



第六，现在考虑随机变量列 $\{s_n(\omega)\}$, 这里

$$s_n(\omega) = \tau_n(\omega) - \tau_{n-1}(\omega) \quad (\tau_0(\omega) \equiv 0).$$

试证 $\{s_n(\omega)\}$ 为独立同分布的，共同的分布函数为

$$F(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y}, & \text{如} y \geqslant 0, \\ 0, & \text{如} y < 0. \end{cases}$$

实际上，如 $y_1 \geqslant 0$

$$P(s_1(\omega) \leqslant y_1) = P(x(y_1,\omega) - x(0,\omega) \geqslant 1\} = 1 - e^{-\lambda y_1};$$

如 $y_1 < 0$, 则因 $s_1(\omega)$ 非负，故 $P(s_1(\omega) \leqslant y_1) = 0$.

以下证独立同分布. 为了使记号简单起见，只证 $s_1(\omega)$ 与 $s_2(\omega)$ 独立，有相同分布函数为 $F(y)$. 对有穷多个 $s_1(\omega), \cdots, s_n(\omega)$ 的证明类似. 对任意 $n > 1$, 如 $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, 有

$$\begin{aligned} P(s_1(\omega) \leqslant y_1, s_2(\omega) \leqslant y_2) \leqslant & \sum_{j=0}^{n-1} P\Big[x\Big(\frac{jy_1}{n},\omega\Big) - x(0,\omega) = 0, \\ & x\Big(\frac{j+1}{n}y_1,\omega\Big) - x\Big(\frac{j}{n}y_1,\omega\Big) = 1, x\Big(\frac{j+1}{n}y_1 + y_2,\omega\Big) - x\Big(\frac{j+1}{n}y_1,\omega\Big) \geqslant 1\Big] \\ & + \sum_{j=0}^{n-1} P\Big[x\Big(\frac{jy_1}{n},\omega\Big) - x(0,\omega) = 0, x\Big(\frac{j+1}{n}y_1,\omega\Big) - x\Big(\frac{jy_1}{n},\omega\Big) \geqslant 2\Big]. \end{aligned}$$

根据增量独立的假定及 (4) 右方第二项为

$$\sum_{j=0}^{n-1} e^{-\lambda j y_1/n}\Big(1-e^{-\lambda y_1/n}-e^{-\lambda y_1/n}\frac{\lambda y_1}{n}\Big)=\frac{1-e^{-\lambda y_1}}{1-e^{-\lambda y_1/n}}O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)=O\Big(\frac{1}{n}\Big)\ (n\to\infty),$$

而第一项为

$$\sum_{j=0}^{n-1} e^{-\lambda j y_1/n-(\lambda y_1/n)}\Big(\frac{\lambda}{n}y_1\Big)(1-e^{-\lambda y_2})\to(1-e^{-\lambda y_1})(1-e^{-\lambda y_2})\ (n\to\infty).$$

故得

$$P(s_1(\omega)\leqslant y_1, s_2(\omega)\leqslant y_2)\leqslant(1-e^{-\lambda y_1})(1-e^{-\lambda y_2}). \tag{5}$$

另方面， (5) 中左方值不小于

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{n-1}P\Big[x\Big(\frac{jy_1}{n},\omega\Big)-x(0,\omega)=0, x\Big(\frac{j+1}{n}y_1,\omega\Big)-x\Big(\frac{jy_1}{n},\omega\Big)=1,\\&\qquad x\Big(\frac{jy_1}{n}+y_2,\omega\Big)-x\Big(\frac{j+1}{n}y_1,\omega\Big)\geqslant 1\Big]\\&=\sum_{j=0}^{n-1}e^{-\lambda j y_1/n}\frac{\lambda y_1}{n}e^{-\lambda y_1/n}(1-e^{-\lambda[y_2-(y_1/n)]})\to(1-e^{-\lambda y_1})(1-e^{-\lambda y_2})\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

故论断得以证明.

既然 $P(s_i(\omega)<\infty)=1$, 故

$$P(\tau_n(\omega)<\infty)=P\Big(\sum_{i=1}^{n}s_i(\omega)<\infty\Big)=1,$$

可见每 $\tau_n(\omega)$ 以概率 1 有穷. 根据阶梯函数的定义，得

$$P\big(\lim_{n\to\infty}\tau_n(\omega)=\infty\big)=1.$$

第七，由上已知， Poisson 过程的一个修正是 $\{x_t(\omega),t\geqslant 0\}$, 它的样本函数以概率 1 右连续. 换句话说，存在 A, $P(A)=1$, 使对任意固定的 ω, $x_t(\omega)$ $(t\geqslant 0)$ 是 t 的右连续函数. 仿照 (2) 取其另一修正 $\{\overline{x}_t(\omega),t\geqslant 0\}$, 由 §3.3 引理 1 知后者强可测.

但也可用 §1.1 引理 3 中所述清洗基本事件空间的办法：令 $\widetilde{\Omega}=A$, $\widetilde{\mathcal{F}}=(B)$, 这里 $B=\widetilde{\Omega}C$ $(C\in\mathcal{F})$, $\widetilde{P}(B)=P(C)$; $\widetilde{x}_t(\omega)=x_t(\omega)$, $t\in[0,\infty)$, 于是 $\{\widetilde{x}_t(\omega),t\geqslant 0\}$ 是定义在 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{P})$ 上的 Poisson 过程，它还是右连续的.

第八， Poisson 过程产生的实际背景如下：从时刻 $t=0$ 起开始观察某片星空，如在时刻 t_0 上发现有一流星，就说在 $t=t_0$ 时出现了一个事件，随着流星的陆续流过，就得到一个事件流，诸事件鱼贯地出现. 以 x_t 表在 $(0,t]$ 时间内总共出现事件的个数，亦即出现流星的个数. 于是得到 $\{x_t,t\geqslant 0\}$. 对此事件流，自然合理地假定：

1° 在互不相交的时间区间内，各自出现的事件个数是相互独立的. 亦即，严格地说，$\{x_t,t\geqslant 0\}$ 有独立增量.

2° 在长为 t 的区间 $(a,a+t]$ 中，出现 k 个事件的概率 $v_k(t)$ 只与 t 有关而不依赖于 a, $v_0(t)$ 不恒等于 1.

3° 在有穷区间 $(a,a+t]$ 中只出现有穷多个事件，即

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) = 1.$$

4° 在 $(a,a+t]$ 中出现二个或更多事件的概率 $\psi(t)(=1-v_0(t)-v_1(t))$ 关于 t 是高级无穷小，即

$$\lim_{t\to 0}\frac{\psi(t)}{t} = 0.$$

在这些假定下，试证 $\{x_t, t\geqslant 0\}$ 是 Poisson 过程. 为此，只要证 (4) 成立.

令 $v_i(t-s)=P(x_t-x_s=i)$, 由 1°,2°

$$v_0(1)=\left[v_0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n.$$

设 $v_0(1)=\theta$, 则 $v_0\left(\frac{1}{n}\right)=\theta^{1/n}$. 对任意给定的 t, 决定 k, 使 $\frac{k-1}{n}<t\leqslant\frac{k}{n}$. 由于 $v_0(t)$ 是 t 的不增函数，有

$$\theta^{\frac{k-1}{n}} = v_0\left(\frac{k-1}{n}\right)\geqslant v_0(t)\geqslant v_0\left(\frac{k}{n}\right)=\theta^{\frac{k}{n}}.$$

令 $n\to\infty$, 由 k 的定义 (k 是 n 的函数) 得 $\frac{k}{n}\to t$, $\frac{k-1}{n}\to t$, 从而由上式得

$$v_0(t)=\theta^t\quad(t>0), \tag{6}$$

其中 $0\leqslant\theta=v_0(1)\leqslant 1$. 如 $\theta=0$, 则 $v_0(t)=0$ 对任意 $t>0$ 成立，由 1° 可推知以概率 1 在任意在穷区间内会出现无穷多个事件，此与假设 3° 矛盾；如 $\theta=1$, 则在任意区间内不出现事件的概率为 1, 此与 2° 矛盾. 故不需考虑 $\theta=0$ 或 1 的情况. 于是可设 $\theta=e^{-\lambda}$, 这里 λ 是某正常数. 故由 (6) 得

$$v_0(t)=e^{-\lambda t}. \tag{7}$$

下面计算 $v_k(t)$, 它是在 $(a,a+t]$ 中出现 k 个事件的概率. 由 2°, 不妨取 $a=0$. 将 $(0,t]$ 分成 n 个等长的子区间，$n>k$. 令 A_1 表事件："在某 k 个子区间内，各恰好出现一个事件，而在其它 $n-k$ 个子区间内不出现事件";A_2 表"至少有一个子区间内出现二个或二个以上事件". 于是

$$v_k(t)=P(A_1)+P(A_2;\text{在 }(0,t]\text{ 中出现 }k\text{ 个事件}). \tag{8}$$

既然

$$P(A_1)=\binom{n}{k}[v_1(\delta)]^k[v_0(\delta)]^{n-k},$$

其中 $\delta=\frac{t}{n}$, 而且由 (7), 4° 当 $n\to\infty$ 因而 $\delta\to 0$ 时

$$\begin{aligned}
[v_0(\delta)]^{n-k} &= e^{-\lambda\delta(n-k)} = e^{-\lambda t}e^{k\lambda\delta} = e^{-\lambda t}[1+o(1)],\\
[v_1(\delta)]^k &= [1-e^{-\lambda\delta}-\psi(\delta)]^k = [1-e^{-\lambda\delta}+o(\delta)]^k\\
&= (\lambda\delta)^k[1+o(1)] = \frac{(\lambda t)^k}{n^k}[1+o(1)],
\end{aligned}$$

故

$$P(A_1) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}[1+o(1)]$$
$$\to e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (n\to\infty). \tag{9}$$

其次．(8) 中右方第二个概率显然不大于 $P(A_2)$. 既然在任一固定的子区间出现二个或二个以上事件的概率为 $\psi(\delta)$, 由 4°

$$P(A_2) \leqslant n\psi(\delta) = t\cdot\frac{\psi(\delta)}{\delta} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

由此及 (8),(9) 得证 (4) 式，即

$$v_k(t) = P(x_{a+t}-x_a = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (k=0,1,2,\cdots).$$

(三) 作为第三例，试研究可分半鞅 $\{x_t, t\in[0,\infty)\}$ 的样本函数的性质．为此，先证明与 §1.4 引理 4 平行的一结果：

引理 1 设 $\{x_1, x_2, \cdots, y\}$ 是半鞅，则

$$CP(\inf_n x_n < C) \geqslant Ex_1 - \int_{(\inf_n x_n \geqslant C)} yP(d\omega) \geqslant Ex_1 - E|y|.$$

证 令 $D_1 = (\omega : x_1(\omega) < C)$, $D_k = (x_k < C, \min_{j<k} x_j \geqslant C)$, $k>1$, $B_n = (\min_{1\leqslant k\leqslant n} x_k < C)$, 因而 $B_n = \bigcup_{k=1}^n D_k$. 注意，为证引理的结论，只要证明

$$\int_{\overline{D}_1} x_1 P(d\omega) \leqslant \int_{\overline{B}_n} x_n P(d\omega) + CP(B_n\overline{D}_1), \tag{10}$$

其中 $\overline{A} = \Omega\setminus A$. 实际上，因为 $B_n = D_1 \cup B_n\overline{D}_1$, 故由

$$\int_{D_1} x_1 P(d\omega) \leqslant CP(D_1),$$

(10) 及半鞅性得

$$Ex_1 = \int_{\overline{D}_1} x_1 P(d\omega) + \int_{D_1} x_1 P(d\omega) \leqslant \int_{\overline{B}_n} x_n P(d\omega) + CP(B_n\overline{D}_1) + CP(D_1)$$
$$\leqslant \int_{\overline{B}_n} yP(d\omega) + CP(B_n),$$

再令 $n\to\infty$, 即得引理结论．

当 $n=1$ 时，(10) 显然正确．设 (10) 对 n 正确，则因

$$\overline{B}_n = \overline{B}_{n+1} \cup \overline{B}_n D_{n+1},$$

利用半鞅性得

$$\int_{\overline{B}_n} x_n P(d\omega) \leqslant \int_{\overline{B}_n} x_{n+1} P(d\omega) = \int_{\overline{B}_{n+1}} x_{n+1} P(d\omega) + \int_{\overline{B}_n D_{n+1}} x_{n+1} P(d\omega)$$
$$\leqslant \int_{\overline{B}_{n+1}} x_{n+1} P(d\omega) + CP(\overline{B}_n D_{n+1}).$$

因而由 $B_n\overline{D}_1 \cup \overline{B}_n D_{n+1} \subset B_{n+1}\overline{D}_1$ 得

$$\int_{\overline{D}_1} x_1 P(d\omega) \leqslant \int_{\overline{B}_n} x_n P(d\omega) + CP(B_n\overline{D}_1)$$
$$\leqslant \int_{\overline{B}_{n+1}} x_{n+1} P(d\omega) + CP(B_n\overline{D}_1) + CP(\overline{B}_n D_{n+1})$$
$$\leqslant \int_{\overline{B}_{n+1}} x_{n+1} P(d\omega) + CP(B_{n+1}\overline{D}_1),$$

此得证 (10) 对 $n+1$ 也成立. □

今设 $\{x_t, t \in [o,\infty)\}$ 为可分半鞅. 任意固定 $d>0$. 以 R 表可分集, 由 §1.4 引理 4 及可分性得

$$P\big(\sup_{t\in[0,d]} x_t \geqslant C\big) = P\big(\sup_{t\in R[0,d]} x_t \geqslant C\big) \leqslant \frac{E|x_d|}{C}.$$

记 $\big(\sup\limits_{t\in[0,d]} x_t \geqslant C\big) = M_C$, 显然 $M_1 \supset M_2 \supset \cdots$, 令 $M = \bigcap\limits_n M_n$, 则 $\overline{M} = \big(\sup\limits_{t\in[0,d]} x_t < \infty\big)$, 而上式表示 $P(\overline{M}) = 1$.

同样, 利用引理 1 即得 $P\big(\inf\limits_{t\in[0,d]} x_t > -\infty\big) = 1$. 综合此二结果并注意 $d>0$ 的任意性, 便得证: **可分半鞅在 $[0,\infty)$ 的每个有穷区间上有界的概率为 1.**

进一步, 我们证明: **可分半鞅的几乎一切样本函数在任一 $t \geqslant 0$ 上有有穷的左, 右极限**(当然, 在 $t=0$ 只考虑右极限); 这句话的精确含义是说: 存在可测集 A, $P(A)=1$, 当任意固定 $\omega \in A$ 时, 样本函数 $x(t,\omega)$ 在任一点 $t \geqslant 0$ 上的左, 右极限都存在而且有穷.

为证此, 将 R 中的点排成 $\{t_j\}$. 考虑 $[0,d]$. 把点 $0, d$ 以及 R 中前 n 个并且含于 $[0,d]$ 中的点按大小排成 $t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \cdots$, 它们的个数不超过 $n+2$. 固定一对实数 $r_1 < r_2$, 以 $H_n(\omega)$ 表 $x_{t_1^{(n)}}(\omega), x_{t_2^{(n)}}(\omega), \cdots$ 通过 $[r_1, r_2]$ 的次数 (见 §1.4), 根据 §1.4 引理 3

$$EH_n \leqslant \frac{E|x_d| + |r_1|}{r_2 - r_1}.$$

因此, 如果令 $M_{nk} = (\omega : H_n(\omega) \geqslant k)$, 则由 Чебышев 不等式 [1], 得

$$P(M_{nk}) \leqslant \frac{E|x_d| + |r_1|}{k(r_2 - r_1)}, \quad k \geqslant 1, \tag{11}$$

由于 $M_{nk} \subset M_{n+1\,k}$, $\bigcup\limits_n M_{nk} = \lim\limits_{n\to\infty} M_{nk}$, 并注意上式右方与 n 无关, 故

$$P\Big(\bigcup_n M_{nk}\Big) = \lim_{n\to\infty} P(M_{nk}) \leqslant \frac{E|x_d| + |r_1|}{k(r_2 - r_1)}. \tag{12}$$

[1] 见 [1] 第五章

以 N_1 表可分性定义中的例外集， $P(N_1)=0$. 固定 $\omega\overline{\in}N_1$ 而考虑 ω 所对应的样本函数 $x(t)$. 假定 $x(t)$ 在 $[0,d]$ 的某一点 s 没有左或右极限，则必存在一对 $r_1<r_2$, 使 [1]

$$\varlimsup_{t\to s-0} x(t)>r_2>r_1>\varliminf_{t\to s-0} x(t),\quad t\in[0,d], \tag{13}$$

或者

$$\varlimsup_{t\to s+0} x(t)>r_2>r_1>\varliminf_{t\to s+0} x(t),\quad t\in[0,d], \tag{14}$$

特别，当 t 只沿 $\{t_j\}$ 中的点而趋于 s 时，上述不等式也应当成立. 这样便得知 $x(t_1^{(n)})$, $x(t_2^{(n)}),\cdots$ 通过 $[r_1,r_2]$ 的次数当 $n\to\infty$ 时应趋于 ∞. 因此，如以 M 表所有这种 ω 的集，它所对应的样本函数具有性质 (13) 或 (14), 则必

$$M\subset\bigcup_n M_{nk},\ k=1,2,\cdots. \tag{15}$$

由于 (12),(15) 右方的集对 k 的交集是零测集，这交集由定义依赖于 r_1,r_2 与 d, 故应记为 $N(r_1,r_2,d)$. 令

$$N_2=\bigcup_{r_1,r_2,d} N(r_1,r_2,d),$$

其中求和号对一切有理数 $r_1,r_2,r_1<r_2$ 以及 $d=1,2,\cdots$ 进行. 显然

$$P(N_2)=0.$$

根据上一段关于有界性的讨论，知存在零测集 N_3, 当 $\omega\overline{\in}N_3$ 时，它所对应的样本函数在任一有穷 t 区间都是有界的. 因此，如果 $\omega\overline{\in}N=N_1\cup N_2\cup N_3$, 则由上面的讨论，可见此 ω 所对应的样本函数在任一点 $t\geqslant 0$ 上有有穷的左，右极限，取 $A=\Omega\setminus N$, 便得到所需要的结论.

§3.5 补充与习题

1. 可分性的理论由 J. L. Doob 所建立，它的目的是为了克服具有连续参数的随机过程时所发生的困难. 注意如参数集 T 是可列集时，此随机过程显然是可分的，只要取 T 为可分集 R 就行了. 我们所用的叙述方法与 Doob 原作稍许不同，其好处在于形象易懂. §3.1 定理 3 说明我们的定义与 Doob 的 “关于闭集可分” 的定义等价.

2. 设 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 关于 R 可分，试证

A. $P(\omega:$ 对一切 $t\in T$, $\varliminf\limits_{\substack{r\to t\\ r\in R}} x_r(\omega)\leqslant x_t(\omega)\leqslant\varlimsup\limits_{\substack{r\to t\\ r\in R}} x_r(\omega))=1$.

B. $(\omega:x_t(\omega)$ 在 T 上有界$)\in\mathcal{F}$.

3. 试造一过程 $\{x_t(\omega),t\in[0,1]\}$, 使对每一 $t\in[0,1]$, 有 $P(x_t(\omega)=0)=1$, 然而 $P(x_t(\omega)=0$, 对一切 $t\in[0,1])=0$.

---

[1] $t\to s-0$ 或 $t\to s-$ 表 $t<s,t\to s$; $t\to s+0$ 或 $t\to s+$ 表 $t>s,t\to s$.

提示：令 $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{F}$ 为 $[0,1]$ 中一切 Borel 集， P 为勒贝格测度．定义 $x_t(\omega)=0$, 如 $\omega\neq t$, $=1$, 如 $\omega=t$. 注意此过程不是可分的，如取其可分修正 $\{\widetilde{x}_t(\omega),t\in[0,1]\}$, 则可使

$$P(\widetilde{x}_t(\omega)=0\ \text{对一切}t\in[0,1])=1.$$

4. 如过程 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 关于 R 可分，又 $T\supset S\supset R$, 则它关于 S 也可分．

5. 设 $\{x_t(\omega),t\in[a,b]\}$ 关于 R 可分，试证 ω- 集

$$(\omega:x_t(\omega)\ \text{在}\ [a,b]\ \text{上均匀连续})\in\mathcal{F}.$$

提示：考虑 ω- 集 $\bigcap\limits_n\bigcup\limits_m\bigcap\limits_{\substack{|r_1-r_2|<1/m\\ r_1,r_2\in R}}\left(|x_{r_1}(\omega)-x_{r_2}(\omega)|<\frac{1}{n}\right)$.

6. §3.2 定理 2 属于 Колмогоров. 条件 (8) 虽非必要，但已不能本质地改进，即其中 $1+\varepsilon$ 不能换为 1. 例：考虑题 3 提示中的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$, 定义

$$x_t(\omega)=\begin{cases}0, & \text{如}\omega\geqslant t;\\ 1, & \text{如}\omega<t,\end{cases}$$

则 $\{x_t(\omega),t\in[0,1]\}$ 是可分过程．试证对任一 $\alpha>0$, 有

$$E\{|x_t(\omega)-x_{t+\Delta}(\omega)|^\alpha\}=|\Delta|,$$

然而其样本函数以概率 1 不连续．

关于这方面的进一步结果见本章末文献 2.

7. 对什么样的过程存在可分的 Borel 可测修正？有下列结果：

设过程 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 关于 R 可分而且对每一固定的 $t\in T$, 有

$$P\{\lim_{s\downarrow t}x(s,\omega)=x(t,\omega)\}=1,$$

则存在等价的过程 $\{\widetilde{x}_t,t\in T\}$, 后者关于 R 可分、Borel 可测而且一切样本函数都右下半连续 (证明可参见书 [14],157 页).

8. 设 $P(x(0,\omega)=0)=1$. 试分别计算 Wiener 过程与 Poisson 过程的有穷维联合分布．对 Poisson 过程，证明 $\lambda=\frac{1}{Es_n}$, 它还等于在 $(a,a+1]$ 中，出现事件个数的平均值．

提示：利用增量的独立性． $\sum\limits_{k=0}^{\infty}kv_k(t)=\lambda t$.

9. 设 $x(\omega),y_1(\omega),y_2(\omega),\cdots$ 为一列独立随机变量， $x(\omega)$ 有参数为 λ 的 Poisson 分布， $\{y_n(\omega)\}$ 有相同的在 $[0,1]$ 上均匀的分布．定义

$$x_t(\omega)=\sum_{i=1}^{x(\omega)}\chi_{[0,t]}(y_i(\omega)),$$

这里 $\chi_{[0,t]}$ 是 $[0,t]$ 的示性函数，即 $\chi_{[0,t]}(z)=1$, 如 $z\in[0,t]$, 否则 $=0$. 试证 $\{x_t(\omega),0\leqslant t\leqslant 1\}$ 是 Poisson 过程．

提示：对 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$，有

$$
\begin{aligned}
&P(x_{t_i}-x_{t_{i-1}}=k_i,\ i=1,\cdots,n)\\
&=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{k!}{k_1!\cdots k_n!}\prod_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})^{k_i}\quad\left(k=\sum_{i=1}^{n}k_i\right)\\
&=\prod_{i=1}^{n}e^{-\lambda(t_i-t_{i-1})}\frac{[\lambda(t_i-t_{i-1})]^{k_i}}{k!}.
\end{aligned}
$$

10. 试证任一形如 $[\frac{k_1}{2^{l_1}},\frac{k_2}{2^{l_2}}]$ 的 $(l_1,l_2,k_1,k_2$ 都是整数，$l_1\geqslant 1,l_2\geqslant 1)$ 长度不超过 1/2 的闭区间都可表为若干个互邻的形如 $[\frac{\tau}{2^m},\frac{\tau+1}{2^m}]$ 的闭区间的和，其中 m,τ 都是整数，$m\geqslant 1$，而且具有固定的 m 的闭区间在此和中出现的次数不多于 2. 其实还有 $m\leqslant\max(l_1,l_2)$.

解 设 $\frac{k_i}{2^{l_i}}$ 为即约分数. 将一切形如 $[\frac{k_1}{2^{l_1}},\frac{k_2}{2^{l_2}}]$ 的区间按 $l_1+l_2=n$ 分类 $(n=2,3,\cdots)$，用归纳法证：如 $n=2$，则由于长度不超过 1/2 而区间只能有形状为 $[\frac{k}{2},\frac{k+1}{2}]$，故结论正确. 今设结论对 $n\leqslant n_0$ 正确. 考虑 $[\frac{k_1}{2^{l_1}},\frac{k_2}{2^{l_2}}]$，$l_1+l_2=n_0+1$，先设 $l_1\neq l_2,l_1>l_2\geqslant 1$. 由 $\frac{k_1}{2^{l_1}}$ 的既约性它必有形为 $\frac{2k'-1}{2^{l_1}}$. 显然此时区间长不小于 $\frac{1}{2^{l_1}}$，故 $2\frac{k'}{2^{l_1}}\leqslant\frac{k_2}{2^{l_2}}$. 如等号成立则结论得证；否则必有

$$
\left[\frac{k_1}{2^{l_1}},\frac{k_2}{2^{l_2}}\right]=\left[\frac{2k'-1}{2^{l_1}},\frac{2k'}{2^{l_1}}\right]\cup\left[\frac{k'}{2^{l_1-1}},\frac{k_2}{2^{l_2}}\right],
$$

化 $\frac{k'}{2^{l_1-1}}$ 为既约形式 $\frac{k''}{2^l}$，$l\leqslant l_1-1$，则 $l+l_2\leqslant n_0$. 由归纳前题，$[\frac{k''}{2^l},\frac{k_2}{2^{l_2}}]$ 可按结论中的要求分解为 $[\frac{\tau}{2^m},\frac{\tau+1}{2^m}]$ 的和. 因一切 $m\leqslant\max(l,l_2)<l_1$，故 l_1 只出现一次而结论得证. 对 $l_2>l_1\geqslant 1$ 或 $l_1=l_2$ 的情况，证明类似 (赵忠信证). □

附记 过程可分性的理论由 J. L. Doob 建立，原始的叙述见 [16]，那里的内容较丰富，但也较难懂，最初的文献也可从该书索引中找到. 我们所以假定概率 P 的完全性正是为了便于叙述和运用可分性.

利用 Колмогоров 关于过程连续性的定理 (§3.2 定理 2),Добрушин 找到了使可分过程的样本函数以概率 1 无第一类断点的充分条件，由此并得到可分鞅的样本函数以概率 1 连续的充分条件. 见本章末文献 1.

Wiener 过程的另一重要性质是:几乎一切样本函数都非有界变差函数. 证明可见 [16]§8.2.

参 考 文 献

[1] Добрушин Р. Л., Условие непрерывности выборочных функций Мартингала, Теория вероятностей и её применения, **3**:1 (1958), 97-98.

[2] Серегин Л. В., Условия непрерывности вероятностных процессов, Теория вероятностей и её применения, **6**:1 (1961), 3-30.

第四章　马尔科夫过程的一般理论

§4.1　马尔科夫性

(一) 马氏链的一般化是马尔科夫过程.

定义 1　设 $\{x_t(\omega), t \in T\}$ $(T \subset R_1)$ 为定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 而取值于可测空间 $(E, \mathcal{B})$ 的随机过程. 如果对任意有穷多个 [1] $t_1 < \cdots < t_n, t_i \in T$, 任意 $A \in \mathcal{B}$, 以概率 1 有

$$P(x_{t_n} \in A|\, x_{t_1}, \cdots, x_{t_{n-1}}) = P(x_{t_n} \in A|\, x_{t_{n-1}}), \tag{1}$$

则称此过程为 **马尔科夫过程**(简称 **马氏过程**), 而性质 (1) 称为 **马尔科夫性**(简称 **马氏性**).

马氏性有许多种表面上不同而实际等价的形式. 表面看来, 含义最少的一种是 (1), 含义最多的一种是下面的 (3), 处于中间地位的各种将陆续出现在下列定理 1 的证明过程中, 最终总结见系 1.

引入记号

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{N}_t^s &= \mathcal{F}\{x_u,\ s \leqslant u \leqslant t, u \in T\}, \\ \mathcal{N}_t &= \mathcal{F}\{x_u,\qquad u \leqslant t, u \in T\}, \\ \mathcal{N}^t &= \mathcal{F}\{x_u,\qquad u \geqslant t, u \in T\}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

它们的直观意义见 §3.3.

定理 1　马氏性 (1) 等价于下列性质: 对任意固定的 $t \in T$, 如果函数 $\xi(\omega)$ 为 $\mathcal{N}^t$ 可测, 并且 [2] $E|\xi| < \infty$, 则以概率 1 有

$$E(\xi|\, \mathcal{N}_t) = E(\xi|\, x_t). \tag{3}$$

证　充分性: 设 (3) 成立. 令 $t = t_{n-1}$, $\xi(\omega) = \chi_{(x_{t_n} \in A)}(\omega)$, 这里 χ_C 表集 C 的示性函数. 由 (3)

$$P(x_{t_n} \in A|\, \mathcal{N}_{t_{n-1}}) = P(x_{t_n} \in A|\, x_{t_{n-1}}) \ \ \text{(a.s.)}.$$

此式两边取 $E(--\,|\, x_{t_1}, \cdots, x_{t_{n-1}})$ 后, 由 §1.3 H 即得 (1).

必要性: 设 (1) 成立而欲证 (3). 分四步来证.

(i) 对任意 $u \geqslant t$

$$P(x_u \in A|\, \mathcal{N}_t) = P(x_u \in A|\, x_t) \ \ \text{(a.s.)}. \tag{4}$$

实际上, 先考虑 $u = t$ 的情形. 由 §1.3 条件期望的性质 G, 易见在集 $(x_t \overline{\in} A)$ 上, (4) 式中两方值都几乎处处等于 0, 而在 $(x_t \in A)$ 上, 二值都几乎处处等于 1. 故 (4) 成立.

其次设 $u > t$. 显然 $P(x_u \in A|\, x_t)$ 为 $\mathcal{N}_t$ 可测, 故只要证对任意 $B \in \mathcal{N}_t$, 有

$$P(B, x_u \in A) = \int_B P(x_u \in A|\, x_t)\, P(d\omega). \tag{5}$$

[1] 由此可见, 在马氏过程定义中, 参数集 T 应是序集.

[2] 如 $E|\xi| < \infty$, 称 $\xi(\omega)$ 可积.

令 $\Lambda=\{B:B\in\mathcal{F};\ (5)\ 成立\}$, 则 Λ 是一 λ- 系. 但当

$$B=(x_{t_i}\in A_i,\ i=1,\cdots,n-1,\ t_i\leqslant t) \tag{6}$$

时, 由 (1) 知 (5) 正确. 故 Λ 包含一切 (6) 形的集. 但 (6) 形集构成一产生 $\mathcal{N}_t$ 的 π- 系, 故由附篇引理 3, 即得 $\Lambda\supset\mathcal{N}_t$.

(ii) 对任意 $u\geqslant t$, 设 $\xi(\omega)$ 为关于 $\mathcal{F}\{x_u\}$ (单个随机变量 x_u 产生的 σ 代数) 可测函数, $E|\xi|<\infty$, 试证

$$E(\xi|\ \mathcal{N}_t)=E(\xi|\ x_t)\ \ (\text{a.s.}). \tag{7}$$

实际上, 令

$$\mathcal{L}=\{全体可积函数\xi(\omega)\},$$
$$L=\{使\ (7)\ 成立的全体\xi(\omega)\}.$$

于是易见 L 是一 $\mathcal{L}$- 系. 由 (i)L 包含集 $(x_u\in A)$ $(A\in\mathcal{B})$ 的示性函数, 而后诸集构成产生 σ 代数 $\mathcal{F}\{x_u\}$ 的 π- 系. 由附篇引理 4, L 包含一切 $\mathcal{F}\{x_u\}$ 可测的可积函数.

(iii) 试证对任意有穷多个 $t\leqslant u_1<u_2<\cdots<u_m$, $u_i\in T$, $A_i\in\mathcal{B}$, 有

$$\begin{aligned}&P(x_{u_i}\in A_i,\ i=1,\cdots,m|\ \mathcal{N}_t)\\&\quad=P(x_{u_i}\in A_i,\ i=1,\cdots,m|\ x_t)\ \ (\text{a.s.}).\end{aligned} \tag{8}$$

实际上, 如 $m=1$, 则 (8) 化为 (4). 下面用归纳法. 简记 $B_1=(x_{u_1}\in A_1)$, $B_2=(x_{u_2}\in A_2,\cdots,x_{u_m}\in A_m)$, $B=B_1B_2$. 由 §1.3H 及 F

$$\begin{aligned}P(B|\ \mathcal{N}_t)&=E(\chi_{B_1}\chi_{B_2}|\ \mathcal{N}_t)=E[E(\chi_{B_1}\chi_{B_2}|\ \mathcal{N}_{u_1})|\ \mathcal{N}_t]\\&=E[\chi_{B_1}E(\chi_{B_2}|\ \mathcal{N}_{u_1})|\ \mathcal{N}_t]=E[\chi_{B_1}P(B_2|\ \mathcal{N}_{u_1})|\ \mathcal{N}_t]\ \ (\text{a.s.}),\end{aligned} \tag{9}$$

由归纳法假定: "(8) 对 $m-1$ 个事件正确", 故

$$P(B_2|\ \mathcal{N}_{u_1})=P(B_2|\ x_{u_1})\ \ (\text{a.s.}).$$

代入 (9), 得知以概率 1 有

$$P(B|\ \mathcal{N}_t)=E[\chi_{A_1}(x_{u_1})P(B_2|\ x_{u_1})|\ \mathcal{N}_t].$$

但 $\chi_{A_1}(x_{u_1})P(B_2|\ x_{u_1})$ 是 $\mathcal{F}\{x_{u_1}\}$ 可测的可积函数, 由 (ii) 即得

$$P(B|\ \mathcal{N}_t)=E[\chi_{A_1}(x_{u_1})P(B_2|\ x_{u_1})|\ x_t].\ \ (\text{a.s.}) \tag{10}$$

另方面, 由 §1.3H,F 及归纳法假定, 得

$$\begin{aligned}P(B|\ x_t)&=E[P(B_1B_2|\ \mathcal{N}_{u_1})|\ x_t]=E[\chi_{B_1}P(B_2|\ \mathcal{N}_{u_1})|\ x_t]\\&=E[\chi_{A_1}(x_{u_1})P(B_2|\ x_{u_1})|\ x_t]\ \ (\text{a.s.}).\end{aligned} \tag{11}$$

综合 (10),(11) 即得 (8).

(iv) 今可证 (3). 令 $\mathcal{L}=\{$ 全体可积函数 $\xi(\omega)\}$, $L=\{$ 全体使 (3) 成立的 $\xi(\omega)\}$. 由 (iii), L 包含全体形为 $B=\{x(u_i)\in A_i,\ i=1,\cdots,m,\ u_i\geqslant t\}$ 的 ω- 集的示性函数，而全体有这种形状的集构成产生 σ 代数 $\mathcal{N}^t$ 的 π- 系. 故由附篇引理 4, L 包含全体 $\mathcal{N}^t$ 可测而且可积的函数 $\xi(\omega)$. □

系 1 性质 (1),(4),(7),(8),(3) 及下列的 (12),(13) 都是相互等价的. 对任意 $B\in\mathcal{N}^t, t\in T$, 有

$$P(B|\,\mathcal{N}_t)=P(B|\,x_t)\ \ \text{(a.s.)}. \tag{12}$$

设 $T=[0,\infty)$, 对任意定义在 E^T 上的 $\mathcal{B}^T$ 可测函数 [1] $f(e(\cdot))$ 及 $t\in T$, 如 $E|\,f(x(t+\cdot,\omega))|<\infty$, 则

$$E[f(x(t+\ \cdot,\omega))|\,\mathcal{N}_t]=E[f(x(t+\ \cdot,\omega))|\,x_t]\ \ \text{(a.s.)}. \tag{13}$$

证 在 (12) 中令 $B=(x_u\in A)$ 即得 (4); 在 (3) 中令 $\xi=\chi_B$ 即得 (12). 由附篇引理 10 得 (13) 与 (3) 的等价性. □

这些性质中的任何一个以后都叫马氏性. 一般，为要证明某过程为马氏过程，就用 (1); 而在由马氏性以导出其它结果时，则用 (3) 或 (13).

下面的系 2 常常有用.

系 2 (a) 如 $A\in\mathcal{N}_t, B\in\mathcal{N}^t, t\in T$, 则

$$P(AB)=\int_A P(B|\,x(t))\,P(d\omega). \tag{14}$$

(b) 如 $\xi(\omega)$ 为 $\mathcal{N}_t$ 可测， $\eta(\omega)$ 为 $\mathcal{N}^t$ 可测， η 及 $\xi\eta$ 均可积，则

$$E\xi\eta=E[\xi E(\eta|\,x(t))]. \tag{15}$$

证 由 (12) 及条件概率的定义立得 (14). 由 (3) 得

$$E\xi\eta=E[E(\xi\eta|\,\mathcal{N}_t)]=E[\xi E(\eta|\,\mathcal{N}_t)]=E[\xi E(\eta|\,x(t))].\square$$

(二) 现在叙述与马氏性等价的另一性质： “在已知 ‘现在’ 的条件下， ‘将来’ 与 ‘过去’ 是独立的”. 这一直观上明显的性质的严格叙述包含在下列定理 2 中.

定理 2 为使 $\{x_t t(\omega), t\in T\}$ 是马氏过程，充分与必要条件是：对任意有穷多个值 $s_1<\cdots<s_m<t<t_1<\cdots<t_n$, $s_i,t,t_i\in T$, 及 $A_j\in\mathcal{B}$, $B_k\in\mathcal{B}$, $j=1,\cdots,m$; $k=1,\cdots,n$, 以概率 1 有 [2]

$$\begin{aligned}&P\{x_{s_j}\in A_j, j=1,\cdots,m;\ x_{t_k}\in B_k, k=1,\cdots,n|\,x_t\}\\&\quad=P\{x_{s_j}\in A_j, j=1,\cdots,m|\,x_t\}\cdot P\{x_{t_k}\in B_k, k=1,\cdots,n|\,x_t\}.\end{aligned} \tag{16}$$

证 必要性：设 (1) 成立而欲证 (16). 记

$$A=(x_{s_j}\in A_j,\ j=1,\cdots,m);$$
$$B=(x_{t_k}\in B_k,\ k=1,\cdots,n).$$

[1] 记号意义见附 8 篇 (七) 段

[2] 下式的一般化见 §4.5 题 1(B)

由于 $E(\chi_B|\, x_t)$ 为 $\mathcal{F}\{x_t\}$ 可测，由 §1.3F 及 (3) 得

$$\begin{aligned}&E(\chi_A|\, x_t)E(\chi_B|\, x_t) = E[\chi_A E(\chi_B|\, x_t)|\, x_t]\\&\quad = E[\chi_A E(\chi_B|\, \mathcal{N}_t)|\, x_t] = E[E(\chi_A\chi_B|\, \mathcal{N}_t)|\, x_t] = E(\chi_A\chi_B|\, x_t) \quad \text{(a.s.)},\end{aligned}$$

其中第三个等号成立是因 χ_A 为 $\mathcal{N}_t$ 可测及 §1.3F, 最后一等号是由于 §1.3H. 故得证 (16).

充分性：设

$$E(\chi_A|\, x_t)E(\chi_B|\, x_t) = E(\chi_A\chi_B|\, x_t) \quad \text{(a.s.)}. \tag{17}$$

于是以概率 1 有

$$E(\chi_A\chi_B|\, x_t) = E(\chi_A|\, x_t)(\chi_B|\, x_t) = E[\chi_A E(\chi_B|\, x_t)|\, x_t],$$

由条件数学期望的定义，可见对任意 $C \in \mathcal{B}$, 有

$$\int_{(x_t \in C)} \chi_A\chi_B\, P(d\omega) = \int_{(x_t\in C)} \chi_A E(\chi_B|\, x_t)\, P(d\omega),$$

亦即

$$\int_{A\cap(x_t\in C)} \chi_B\, P(d\omega) = \int_{A\cap(x_t\in C)} E(\chi_B|\, x_t)\, P(d\omega). \tag{18}$$

令使等式

$$\int_M \chi_B\, P(d\omega) = \int_M E(\chi_B|\, x_t)\, P(d\omega). \tag{19}$$

成立的全体可测集 M 所成的集为 Λ, 则 Λ 是一 λ- 系，由 (18),Λ 包含 $A\cap(x_t \in C)$, 即含一切形为

$$(x_{s_k} \in A_k,\ k = 1,\cdots,m, x_t \in C)$$

的集，而后诸集构成产生 σ 代数 $\mathcal{F}\{x_{s_1},\cdots,x_{s_m},x_t\}$ 的 π- 系，故 $\Lambda \supset \mathcal{F}\{x_{s_1},\cdots,x_{s_m},x_t\}$. 从而得证 (19) 对 $\mathcal{F}\{x_{s_1},\cdots,x_{s_m},x_t\}$ 中一切集成立，故

$$E(\chi_B|\, x_{s_1},\cdots,x_{s_m},x_t) = E(\chi_B|\, x_t) \quad \text{(a.s.)}$$

或

$$\begin{aligned}&P(x_{t_k} \in B_k,\ k = 1,\cdots,n|\, x_{s_1},\cdots,x_{s_m},x_t)\\&\quad = P(x_{t_k} \in B_k,\ k = 1,\cdots,n|\, x_t) \quad \text{(a.s.)}.\end{aligned} \tag{20}$$

令 $n = 1$ 即得 (1). □

定理 2 中所述的性质虽然与马氏性等价，但它却有独到的优点. 因为在它的陈述中，"将来" 与 "过去" 完全处于对称 (关于 "现在") 的地位. 故此性质不依于 T 中正向的选择. 由定理 2 直接推出

系 3 如 $\{x_t(\omega), t \in T\}$ 是马氏过程，则 $\{x_t(\omega), t \in \widetilde{T}\}$ 也是马氏过程， $\widetilde{T}$ 是 T 的反序集 [1].

[1] T 与 $\widetilde{T}$ 有相同的点，但在 $\widetilde{T}$ 中的序是自然序的反序，如称 a 在 b 之前，如 $a \geqslant b$

证 如 $\{x_t(\omega), t \in T\}$ 是马氏过程，则 (16) 成立，象从 (16) 推出 (20) 一样，从 (16) 可推出

$$\begin{aligned} &P(x_{s_j} \in A_j,\ j=1,\cdots,m|\ x_t, x_{t_1},\cdots,x_{t_n}) \\ &\quad = P(x_{s_j} \in A_j,\ j=1,\cdots,m|\ x_t)\ \ (\text{a.s.}). \end{aligned} \tag{21}$$

这表示将 T 反序后，随机变量族 $\{x_t, t \in \widetilde{T}\}$ 也是马氏过程. □

(三) 例.

1. 设 $E=(0,1,2,\cdots)$, $\mathcal{B}$ 为 E 中一切子集所成 σ 代数， $T=(0,1,2,\cdots)$. 此时 §2.1 定义 1 与本节定义 1 等价，故马氏链是一马氏过程. 实际上，设 §2.1(2) 正确. 为证 (1) 成立，只要证对任意集 [1] $B \in \mathcal{F}(x_{t_1},\cdots,x_{t_{n-1}})$, $P(B)>0$, 有

$$\int_B P(x_{t_n}=i|\ x_{t_{n-1}})P(d\omega) = P(B, x_{t_n}=i). \tag{22}$$

利用 λ- 系方法，只要证上式对

$$B=(x_{t_1}=i_1,\cdots,x_{t_{n-1}}=i_{n-1})$$

正确. 由于 $P(x_{t_n}=i|\ x_{t_{n-1}})$ 只是 $x_{t_{n-1}}$ 的函数，在这样的 B 上，它的值为 $P(x_{t_n}=i|\ x_{t_{n-1}}=i_{n-1})$, 故 (22) 化为

$$\begin{aligned} &P(x_{t_n}=i|\ x_{t_{n-1}}=i_{n-1})P(x_{t_1}=i_1,\cdots,x_{t_{n-1}}=i_{n-1}) \\ &\quad = P(x_{t_1}=i_1,\cdots,x_{t_{n-1}}=i_{n-1},x_{t_n}=i). \end{aligned} \tag{23}$$

而这式由 §2.1(2) 是正确的. 逆转以上各步，便可自 (1) 证明 §2.1(2).

2. 设 $\{y_n(\omega)\}$ ($n \geqslant 0$ 整数) 为独立随机变量列， $(E,\mathcal{B})$ 为 $(R_1,\mathcal{B}_1)$, 或者 $E=F$, F 是 R_1 中任一 Borel 可测子集，而 $\mathcal{B}=F\mathcal{B}_1$, 即 $\mathcal{B}$ 是 F 中全体 Borel 可测子集所成的 σ 代数. 于是 $\{y_n\}$ 是马氏过程. 实际上，这时只要证明：对任意 $\lambda \in R_1$

$$P(y_t \leqslant \lambda|\ y_0,\cdots,y_s) = P(y_t \leqslant \lambda|\ y_s)\ \ (\text{a.s.}) \tag{24}$$

$(t>s)$. 令 $A=(y_0 \leqslant \lambda_0,\cdots,y_s \leqslant \lambda_s)$, 这里 $\lambda_i \in R_1$. 由独立性

$$P(y_t \leqslant \lambda, A) = P(y_t \leqslant \lambda)P(A) = \int_A P(y_t \leqslant \lambda)\, P(d\omega).$$

利用 λ- 系方法，可见上式对一切 $A \in \mathcal{F}(y_0,\cdots,y_s)$ 成立，故得证

$$P(y_t \leqslant \lambda|\ y_0,\cdots,y_s) = P(y_t \leqslant \lambda)\ \ (\text{a.s.});$$

同样可证

$$P(y_t \leqslant \lambda|\ y_s) = P(y_t \leqslant \lambda)\ \ (\text{a.s.}).$$

于是 (24) 正确.

---

[1] 如 $P(B)=0$, 则 (22) 自动成立.

3. 同例 2 假定，并令 $x_n=\sum\limits_{i=0}^{n}y_i$, 则 $\{x_n\}$ $(n\geqslant 0)$ 也是马氏过程. 为证此，令 F_{mn} 为

$$x_n-x_m=\sum_{i=m+1}^{n}y_i$$

的分布函数. 试证对 $t>s$, 有

$$P(x_t\leqslant\lambda|\,x_0,\cdots,x_s)=F_{st}(\lambda-x_s)=P(x_t\leqslant\lambda|\,x_s)\ \ (\text{a.s.}).\tag{25}$$

只要证第一等式，因第二等式的证明完全类似. 任意取

$$B\in\mathcal{F}(x_0,\cdots,x_s),$$

要证的是

$$\int_B F_{st}(\lambda-x_s)P(d\omega)=P(B,x_t\leqslant\lambda).\tag{26}$$

首先注意， $\mathcal{F}(x_0,\cdots,x_s)=\mathcal{F}(y_0,\cdots,y_s)$, 故由 λ- 系方法，只须证

$$\int_{(y_0\leqslant\lambda_0,\cdots,y_s\leqslant\lambda_s)}F_{st}(\lambda-x_s)P(d\omega)=P(y_0\leqslant\lambda_0,\cdots,y_s\leqslant\lambda_s,x_t\leqslant\lambda).\tag{27}$$

简记 $F_{i-1\,i},F_{st}$ 为 F_i,F_{s+1}, 它们分别是 y_i 及 $\sum\limits_{j=s+1}^{t}y_j$ 的分布函数. 由假定，$y_0,\cdots,y_s$, $\sum\limits_{j=s+1}^{t}y_j$ 是相互独立的. 特别， $y_0,\cdots,y_s$ 的联合分布函数

$$F_{y_0,\cdots,y_s}(\eta_0,\cdots,\eta_s)=\prod_{j=0}^{s}F_j(\eta_j)\ \ (\eta_j\in R_1).$$

利用积分变换定理，得 (27) 的左方值等于

$$\int_{-\infty}^{\lambda_0}\cdots\int_{-\infty}^{\lambda_s}F_{s+1}\left(\lambda-\sum_{j=0}^{s}\eta_j\right)F_{y_0,\cdots,y_s}(d\eta_0,\cdots,d\eta_s)$$
$$\int_{-\infty}^{\lambda_0}F_0(d\eta_0)\cdots\int_{-\infty}^{\lambda_s}F_{s+1}\left(\lambda-\sum_{j=0}^{s}\eta_j\right)F_s(d\eta_s);$$

而右方值由 §1.1 引理 1 也等于上值. 于是 (27) 因而 (26) 得以证明. （$\{x_n\}$ 是马氏过程的另一证明见 §4.5,12 题. ）

4. 设 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 为独立增量过程，即对任意 $t_i\in T$, $t_0<t_1<\cdots<t_n$

$$x_{t_1}-x_{t_0},\cdots,x_{t_n}-x_{t_{n-1}}$$

是独立随机变量；如果将此条件加强为

$$x_{t_0},x_{t_1}-x_{t_0},\cdots,x_{t_n}-x_{t_{n-1}}$$

是独立的 (例如，当 T 有最左点 s, 而 $P(x_s=0)=1$ 时，此条件满足), 则 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 也是马氏过程. 这里关于相空间的假定仍同例 2.

实际上，令 $y_0 = x_{t_0}, y_1 = x_{t_1} - x_{t_0}, \cdots, y_s = x_{t_s} - x_{t_{s-1}}, y_{s+1} = x_t - x_{t_s}$, 则 $y_0, \cdots y_{s+1}$ 是独立随机变量，而 $x_{t_0} = y_0, x_{t_1} = y_0 + y_1, \cdots, x_{t_s} = \sum_{i=0}^{s} y_i, x_t = \sum_{i=0}^{s+1} y_i$ 是独立随机变量的和，故由例 3, 知对 $t > t_s$,

$$P(x_t \leqslant \lambda | x_{t_0}, \cdots, x_{t_s}) = P(x_s \leqslant \lambda | x_{t_s}) \text{ (a.s.)}. \tag{28}$$

特别地，可见当开始分布集中在 0 时， Poisson 过程与 Wiener 过程都是马氏过程.

§4.2 转移函数；强马尔科夫性

(一) 设 T 为 R_1 中的子集， $(E, \mathcal{B})$ 为可测空间，一切单点集 $\{x\} \in \mathcal{B}$.

定义 1 四元函数 $p(s,x;t,\Gamma)$ $(s,t \in T, s \leqslant t, x \in E, \Gamma \in \mathcal{B})$ 称为 **转移函数**, 如果

(A) 对固定的 s,x,t, 它关于 Γ 是 $\mathcal{B}$ 上的概率测度；

(B) 对固定的 s,t,Γ, 它关于 x 是 $\mathcal{B}$- 可测函数；

(C) $p(s,x;s,\{x\}) = 1$;

(D) Колмогоров-Chapman 方程成立：对任意 $s \leqslant t \leqslant u, s,t,u \in T$, 有

$$p(s,x;u,\Gamma) = \int_E p(s,x;t,dy)p(t,y;u,\Gamma). \tag{1}$$

定义 2 称转移函数 $p(s,x;t,\Gamma)$ 为 **齐次的**, 如果

$$p(s,x;u,\Gamma) = p(t-s,x,\Gamma); \tag{2}$$

即当 x,Γ 固定时，它只依赖于 $t-s$.

例 1 设 $E = (0,1,2,\cdots)$, $\mathcal{B}$ 为 E 的一切子集所成的 σ 代数. 这里的 E 中的元习惯上记为 $i,j,k,\cdots$ 等等，如 §2.1. 设已给一列随机矩阵 $\{_mP\}, m = 1,2,\cdots$. $_mP = (_mp_{ij})$ $(i,j \in E)$ 仿 §2.1, 定义

$$_mp_{ij}^{(k+1)} = \sum_{j_1,j_2,\cdots,j_k} {_mp_{ij_1}} \cdot {_{m+1}p_{j_1j_2}} \cdots {_{m+k}p_{j_kj}} \tag{3}$$

$(k \geqslant 0)$, 并令 $T = (0,1,2,\cdots)$ 及

$$p(s,i;t,\Gamma) = \begin{cases} \sum_{j\in\Gamma} {_sp_{ij}^{(t-s)}} & (t > s), \\ \delta r(i) & (t = s). \end{cases} \tag{4}$$

这里 $\delta r(i) = 1$ 或 0, 视 $i \in \Gamma$ 或 $i \overline{\in} \Gamma$ 而定. 易见

$$_mp_{ij}^{(k)} \geqslant 0, \quad \sum_j {_mp_{ij}^{(k)}} = 1. \tag{5}$$

这可由 $_mP$ 是随机矩阵的假定直接推得. 又由 (3)

$$_mp_{ij}^{(k+l)} = \sum_r {_mp_{ir}^{(k)}} \cdot {_{m+k}p_{rj}^{(l)}}.$$

对 $j\in\Gamma$ 求和，改写 m 为 s 后，利用 (4) 即得

$$p(s,i;m+k+l,\Gamma)=\sum_r p(s,i;m+k,r)p(m+k,r;m+k+l,\Gamma).$$

记 $t=m+k$, $u=m+k+l$, 可改写上式为

$$p(s,i;u,\Gamma)=\sum_r p(s,i;t,r)p(t,r;u,\Gamma),$$

这就是 (1).

如果补设 $_mp$ 与 m 无关, 即 $_mp_{ij}=p_{ij}$ 不依赖于 m, 由 (3),(4) 立知 $p(s,i;t,\Gamma)=p(t-s,i,\Gamma)$ 是齐次的.

在这例中，我们利用了 "一切正整数是 1 的倍数" 这一特点，由已给的一步转移函数，即 $\{_mp_{ij}\}$, 造出了 $p(s,i;u,\Gamma)$.

例 2 $(E,\mathcal{B})$ 同上例，但 $T=[0,\infty)$. 设已给一族函数 $p_{ij}(s,t)$, $i,j=0,1,2,\cdots$, $0\leqslant s\leqslant t$, 满足

(a) $0\leqslant p_{ij}(s,t)$;

(b) $\sum\limits_{j=0}^{\infty}p_{ij}(s,t)=1$;

(c) $p_{ij}(s,s)=\delta_{ij}$ ($\delta_{ii}=1$; $\delta_{ij}=0$, $i\neq j$)

(d) 对 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant u$, 有

$$p_{ij}(s,u)=\sum_k p_{ik}(s,t)p_{kj}(t,u),$$

则易见

$$p(s,i;t,\Gamma)=\begin{cases}\sum\limits_{j\in\Gamma}p_{ij}(s,t) & (t>s),\\ \delta_\Gamma(i) & (t=s)\end{cases}\tag{6}$$

也是一转移函数. 当且仅当 $p_{ij}(s,t)=p_{ij}(t-s)$ 时，它是齐次的. 特别，如

$$p_{ij}(t)=\begin{cases}e^{-\lambda t}\cdot\dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} & (t>0,j\geqslant i),\\ 0 & (j<i),\\ \delta_{ij} & (t=0)\end{cases}\tag{7}$$

所产生的转移函数叫 Poisson**转移函数**.

例 3 设 $(E,\mathcal{B})=(R_1,\mathcal{B}_1)$, $T=[0,\infty)$, 则

$$p(s,x;t,\Gamma)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(t-s)}}\displaystyle\int_\Gamma \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2(t-s)}\right]dy & (0\leqslant s<t);\\ \delta_\Gamma(x) & (s=t)\end{cases}\tag{8}$$

(σ 为正常数) 是一转移函数，称为 Wiener**转移函数**. 实际上，A,B,C 显然满足，只要验证 (1) 就可. 如 $s=t$ 或 $t=u$, 由 (8) 知两边均等于 $p(s,x;u,\Gamma)$; 如 $s=u$, 则当 $x\in\Gamma$ 时，两

边均等于 1, 当 $s\bar{\in}\Gamma$ 时，两边均等于 0; 最后，如 $0\leqslant s<t<u$, 以 (8) 代入 (1) 后，(1) 右方等于 $\xi_1+\xi_2\in\Gamma$ 的概率，ξ_1,ξ_2 是相互独立的随机变量，分别有分布为 $N(x,\sigma\sqrt{t-s})$ 及 $N(0,\sigma\sqrt{u-t})$, 由正态分布的性质知 $\xi_1+\xi_2$ 的分布为 $N(x,\sigma\sqrt{u-t})$, 故 (1) 右方值为

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(u-s)}}\int_\Gamma \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2(u-s)}\right]dy=p(s,x;u,\Gamma).$$

(二) 上节 (1) 式表示，过程的马尔科夫性是通过条件概率表达的，这种表达的方式和许多其它的过程例如独立随机过程不同，那里条件加在过程的联合分布上.

过程的有穷维分布满足什么条件，才能保证它所决定的过程是马氏的？

在马氏链情况已有答案，那就是：如联合分布由 §2.1(12) 式给出，则过程是马氏链.

这个结果的一般化是下面的定理 1:

定理 1 设 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 为定义在 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上而取值于 $(E,\mathcal{B})$ 中的随机过程，如果存在转移函数 $p(s,x;t,\Gamma)$, $s,t\in T,s\leqslant t,x\in E,\Gamma\in\mathcal{B}$, 使对任意有穷多个 $t_i\in T$, $t_0<t_1<\cdots<t_n$, $\Gamma_i\in\mathcal{B}$, 有 [1]

$$\begin{aligned}
&P(x(t_0)\in\Gamma_0,x(t_1)\in\Gamma_1,x(t_2)\in\Gamma_2,\cdots,x(t_n)\in\Gamma_n)\\
&=\int_{\Gamma_0}P_{t_0}(d\xi_0)\int_{\Gamma_1}p(t_0,\xi_0;t_1,d\xi_1)\int_{\Gamma_2}p(t_1,\xi_1;t_2,d\xi_2)\\
&\quad\cdots\int_{\Gamma_n}p(t_{n-1},\xi_{n-1};t_n,d\xi_n),
\end{aligned}\tag{9}$$

则 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 是马氏过程. 这里 $P_t(A)=P(x_t\in A),A\in\mathcal{B}$.

这时称 $p(s,x;t,\Gamma)$ 为过程的 **转移概率** 或 **转移函数**.

证 需要证的是：对任意 $A\in\mathcal{B}$, 有

$$P(x_{t_n}(\omega)\in A|\,x_{t_0},x_{t_1},\cdots,x_{t_{n-1}})=P(x_{t_n}(\omega)\in A|\,x_{t_{n-1}})\ \ \text{(a.s.)}.\tag{10}$$

显然 $P(x_{t_n}\in A|\,x_{t_{n-1}})$ 为 $\mathcal{F}(x_{t_0},x_{t_1},\cdots,x_{t_{n-1}})$ 可测，故只要证对任意 $B\in\mathcal{F}(x_{t_0},x_{t_1},\cdots,x_{t_{n-1}})$, 有

$$P(B,x_{t_n}\in A)=\int_B P(x_{t_n}\in A|\,x_{t_{n-1}})P(d\omega).\tag{11}$$

为证此，先证一事实：以概率 1 有

$$P(x_{t_n}\in A|\,x_{t_{n-1}})=p(t_{n-1},x_{n-1};t_n,A).\tag{12}$$

实际上，由 (B) 知 $p(t_{n-1},x_{t_{n-1}};t_n,A)$ 为 $\mathcal{F}\{x_{t_{n-1}}\}$ 可测；其次，对任意 $C\in\mathcal{B}$, 由积分变换定理及 (9) 得

$$\begin{aligned}
&\int_{(x_{t_{n-1}}\in C)}p(t_{n-1},x_{t_{n-1}};t_n,A)P(d\omega)=\int_C p(t_{n-1},x;t_n,A)P_{t_{n-1}}(dx)\\
&=P(x_{t_{n-1}}\in C,x_{t_n}\in A),
\end{aligned}$$

[1] (9) 中的积分从最后一积分积起，消去 ξ_n 后，作为 ξ_{n-1} 的函数，再计算倒数第二积分，$\cdots$. 此时要用到 “$\int_\Gamma p(s,\xi;t,d\eta)P(t,\eta;u,A)$ 是 ξ 的可测函数” 这一事实，见附篇引理 7.

故得证 (12). 从而为证 (11) 只要证

$$P(B, x_{t_n} \in A) = \int_B p(t_{n-1}, x_{t_{n-1}}; t_n, A) P(d\omega). \tag{13}$$

以 Λ 表使 (13) 成立的全体可测 ω- 集 B 的类，易见 Λ 是一 λ- 系. 实际上，附篇中 λ- 系的条件 2),3),4) 显然满足；又由 (9)

$$\int_\Omega p(t_{n-1}, x_{t_{n-1}}; t_n, A) P(d\omega) = \int_E p(t_{n-1}, x; t_n, A) P_{t_{n-1}}(dx)$$
$$= P(x_{t_n} \in A) = P(\Omega, x_{t_n} \in A),$$

此表 $\Omega \in \Lambda$, 从而 Λ 是一 λ- 系. 因此，如能证 (13) 对 ω- 集

$$(x_{t_i} \in A_i,\ i = 0, 1, \cdots, n-1)$$

成立，则因这种形状的集构成一 π- 系，故由附篇引理 3 即知

$$A \supset \mathcal{F}(x_{t_0}, x_{t_1}, \cdots, x_{t_{n-1}}).$$

以此 ω- 集代入 (13) 右方中的 B, 利用积分变换得右方值为

$$\int_{(x_{t_0} \in A_0, \cdots, x_{t_{n-1}} \in A_{n-1})} p(t_{n-1}, x_{t_{n-1}}; t_n, A) P(d\omega)$$
$$= \int_{A_{n-1}} p(t_{n-1}, \xi_{n-1}; t_n, A) \widetilde{P}(d\xi_{n-1}), \tag{14}$$

这里 $\widetilde{P}(\Gamma) = P(x_{t_0} \in A_0, \cdots, x_{t_{n-2}} \in A_{n-2}, x_{t_{n-1}} \in \Gamma)$ 是 $\mathcal{B}$ 上的测度，由 (9)

$$\widetilde{P}(\Gamma) = \int_{A_0} P_{t_0}(d\xi_0) \int_{A_1} p(t_0, \xi_0; t_1, d\xi_1)$$
$$\cdots \int_{A_{n-2}} p(t_{n-3}, \xi_{n-3}; t_{n-2}, d\xi_{n-2}) p(t_{n-2}, \xi_{n-2}; t_{n-1}, \Gamma). \tag{15}$$

令 $\mu(\Gamma) = \int_{A_0} P_{t_0}(d\xi_0) \int_{A_1} p(t_0, \xi_0; t_1, d\xi_1) \cdots \int_{A_{n-3}} p(t_{n-4}, \xi_{n-4}; t_{n-3}, d\xi_{n-3})\, p(t_{n-3}, \xi_{n-3}; t_{n-2}, \Gamma)$, 则由附篇引理 9,(15) 化为

$$\widetilde{P}(\Gamma) = \int_{A_{n-2}} \mu(d\xi_{n-2}) p(t_{n-2}, \xi_{n-2}; t_{n-1}, \Gamma), \tag{16}$$

这式与 (14) 结合后，可见 (13) 右方值为

$$\int_{A_{n-1}} p(t_{n-1}, \xi_{n-1}; t_n, A) \int_{A_{n-2}} \mu(d\xi_{n-2}) p(t_{n-2}, \xi_{n-2}; t_{n-1}, d\xi_{n-1}),$$

再由附篇引理 9, 此值等于

$$\int_{A_{n-2}} \mu(d\xi_{n-2}) \int_{A_{n-1}} p(t_{n-2}, \xi_{n-2}; t_{n-1}, d\xi_{n-1}) p(t_{n-1}, \xi_{n-1}; t_n, A),$$

根据 (9), 上值等于 $P(x_{t_0}\in A_0,\cdots,x_{t_{n-1}}\in A_{n-1},x_{t_n}\in A)$. □

注 1 由 (12),(13) 知 (10) 中双方值都等于

$$p(t_{n-1},x_{t_{n-1}};t_n,A)\ \ \text{(a.s.)}.$$

我们称满足定理 1 中条件 (9) 的马氏过程为 **规则马氏过程** [1].

规则马氏过程是否存在？我们对 $E=R_1,\mathcal{B}=\mathcal{B}_1$ 时来证明下面的定理：

定理 2 (存在定理) [2] 设已给具有首元 t_0 的参数集 T, 又已给 $(E,\mathcal{B})=(R_1,\mathcal{B}_1)$ 上的转移函数 $p(s,x;t,\Gamma)$ 及概率测度 $P_{t_0}(\Gamma)$ $(\Gamma\in\mathcal{B})$. 于是必存在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 及定义于其上的规则马氏过程 $\{x_t(\omega),t\in T\}$, 它的转移概率为 $p(s,x;t,\Gamma)$, 而开始分布为 $P_{t_0}(\Gamma)$, 即 $P(x_{t_0}\in\Gamma)=P_{t_0}(\Gamma)$.

证 令 $\Omega=E^T$, 因而 $\omega=e(\cdot)$, 它是定义在 T 上而取值于 E 中的抽象函数； $\mathcal{F}=\mathcal{B}^T$, 即 $\mathcal{F}=\mathcal{F}\{W_n\}$, 而 W_n 表任一有穷维柱集

$$W_n=\{e(\cdot):e(t_0)\in\Gamma_0,e(t_1)\in\Gamma_1,\cdots,e(t_n)\in\Gamma_n\},$$

其中 $t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n$, $t_i\in T$, $\Gamma_i\in\mathcal{B}$; 又令

$$x_t(\omega)=e(t),\ t\in T,\ \text{如}\,\omega=e(\cdot);$$

最后，对 W_n, 定义 $P(W_n)=P_{t_1,\cdots,t_n}(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_n)$ 为 (9) 右方的值，由转移函数的性质，易见 $\{P_{t_1,\cdots,t_n}(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_n)\}$ 满足相容性条件，故由附篇定理 4, 存在唯一概率测度 $P(B)$, $B\in\mathcal{F}$, 它在 W_n 上的值与 $P_{t_1,\cdots,t_n}(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_n)$ 重合. 这样造出的 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 和过程 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 显然满足定理的要求. □

注 2 由于附篇定理 4 对 σ- 紧距离可测空间正确，故上面的定理 2 当 $(E,\mathcal{B})$ 为 σ- 紧距离可测空间时也正确. 如果 T 为非负整数集，那么定理 2 对任意可测空间 $(E,\mathcal{B})$ 都正确，证明仍如上，只是要以附篇中的 Tulcea 定理代替附篇定理 4.

在马氏链的研究中我们已经看到，起重要作用的常常不是概率 P, 而是转移概率

$$_m p_{ij}^{(n)}=P(x_{m+n}=j|\,x_m=i),$$

或者更一般地， $P(x_{m+n_1}=j_1,\cdots,x_{m+n_k}=j_k|\,x_m=i)$ 等等，这里 $(x_{m+n_1}=j_1,\cdots,x_{m+n_k}=j_k)\in\mathcal{F}\{x_l,l\geqslant m\}$. 这样的事实启发我们应该怎样去考虑一般情况. 首先注意，如果

$$m<m_1<m_2<\cdots<m_k,$$

对马氏链有

$$\begin{aligned}&P(x_{m_1}\in\Gamma_1,\cdots,x_{m_k}\in\Gamma_k|\,x_m=i)\\&=\sum_{j_1\in\Gamma_1}\cdots\sum_{j_k\in\Gamma_k}{}_m p_{i\,j_1}^{(m_1-m)}\,{}_{m_1}p_{j_1\,j_2}^{(m_2-m_1)}\cdots{}_{m_{k-1}}p_{j_{k-1}\,j_k}^{(m_k-m_{k-1})}.\end{aligned}\tag{16$_1$}$$

[1] 等价的定义见 §4.5 第 14 题.

[2] 参看 §2.1 定理 1.

这式左方只是当 $P(x_m = i) > 0$ 才有意义，然而右方值却总是有意义的，我们把右方的值简写为 $P_{m,i}(x_{m_1} \in \Gamma_1, \cdots, x_{m_k} \in \Gamma_k)$, 可把它理解为：在 "质点于 m 时自 i 出发" 的条件下，事件 $(x_{m_1} \in \Gamma_1, \cdots, x_{m_k} \in \Gamma_k)$ 的 (条件) 概率. 注意 $m_i > m$.

一般地，考虑规则马氏过程 $\{x_t(\omega), t \in T\}$ 及任一对 $(s, x), s \in T, x \in E$, 我们自然希望能类似地定义在 "质点于 s 时自 x 出发" 的条件下，属于将来的事件 A(即 $\mathcal{N}^s$ 中的集 A) 的 (条件) 概率 $P_{s,x}(A)$. 当 A 为 $\mathcal{N}^s$ 中的柱集时，受 (16_1) 的启发，应定义

$$\begin{aligned} &P_{s,x}(x(t_i, \omega) \in \Gamma_i, i = 1, \cdots, n) \\ &\quad = \int_{\Gamma_1} p(s, x; t_1, d\xi_1) \int_{\Gamma_2} p(t_1, \xi_1; t_2, d\xi_2) \cdots \int_{\Gamma_n} p(t_{n-1}, \xi_{n-1}; t_n, d\xi_n), \end{aligned} \tag{17}$$

其中 $s \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n, t_i \in T, \Gamma_i \in \mathcal{B}$ 均任意. 容易设想，如果 (17) 中的，只在柱集上有定义的集函数 $P_{s,x}$, 能唯一地扩大定义域到全 $\mathcal{N}^s$, 那么我们所想定义的 $P_{s,x}(A)$ $(A \in \mathcal{N}^s)$ 便完全确定. 可惜，在一般情形，这种扩张没有根据，因而只得把它当作条件来引进.

称规则马氏过程 $\{x_t(\omega), t \in T\}$ 为 **标准的**[1], 如果由 (17) 式定义的集函数 $P_{s,x}$ 可唯一地扩大定义域到 $\mathcal{N}^s$ 上而成为概率测度，记后者为 $P_{s,x}(A), A \in \mathcal{N}^s$ (一切 $s \in T, x \in E$). 称标准马氏过程为 **齐次的**, 如果 (2) 式成立.

由附篇定理 4, 知对定理 2 中所造出的过程 (注意对此过程，Ω 重合于全体样本函数的集合), 由 (17) 所定义的 $P_{s,x}$ 可唯一扩大定义域到 $\mathcal{N}^s$ 上而成为概率测度，故此过程是标准马氏过程. 类似地，由注 2 可见，对任意 σ- 紧距离空间 $(E, \mathcal{B})$ 上已给的转移函数 $p(s, x; t, \Gamma)$, 必存在标准马氏过程，它的转移概率重合于已给的 $p(s, x; t, \Gamma)$.

本书以后无特别声明时，**所考虑的马氏过程永远假定为标准马氏过程，不再一一申述**.

试考察概率 $P_{s,x}(A)$ $(A \in \mathcal{N}^s)$ 的性质.

首先，它可以看成 $p(s, x; t, \Gamma)$ 的延续，因为由 (17) 有

$$P_{s,x}(x(t, \omega) \in \Gamma) = p(s, x; t, \Gamma) \quad (s \leqslant t). \tag{18}$$

特别，在上式中令 $\Gamma = \{x\}, t = s$, 得

$$P_{s,x}(x(s, \omega) = x) = p(s, x; s, \{x\}) = 1, \tag{19}$$

换言之，测度 $P_{s,x}$ 集中在 ω- 集 $(x(s, \omega) = x)$ 上.

其次，由 (12) 及 (18) 得

$$P(x(t, \omega) \in A \mid x(s)) = P_{s,x(s)}(x(t, \omega) \in A) \quad \text{(a.s.)}. \tag{20}$$

作为 (20) 的一般化，试证

引理 1 如 $\xi(\omega)$ 为 $\mathcal{N}^s$ 可测的有界函数，则

$$E(\xi \mid x(s)) = E_{s,x(s)}\xi \quad \text{(a.s.)}, \tag{21}$$

其中 $E_{s,x(s)}\xi = [E_{s,y}\xi]_{y=x(s)}$, 即以 $x(s, \omega)$ 代入 $E_{s,y}\xi$ 中的 y 而得的 ω 的函数.

---

[1] 参看 §4.5 末附记.

证 试证当 $\xi(\omega)$ 为 ω- 集

$$B=(x_{t_1}\in\Gamma_1,\cdots,x_{t_n}\in\Gamma_n) \tag{22}$$

的示性函数时，(21) 成立，这里 $s\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$. 对这样的 $\xi(\omega)$,(21) 化为

$$P(x_{t_1}\in\Gamma_1,\cdots,x_{t_n}\in\Gamma_n|\,x_s)=P_{s,x(s)}(x_{t_1}\in\Gamma_1,\cdots,x_{t_n}\in\Gamma_n)\ \ \text{(a.s.)}. \tag{23}$$

先设 $s<t_1$. 由 (17) 及附篇引理 7, 引理 6 知，(23) 右方项为 $\mathcal{F}\{x_s\}$ 可测. 其次，对任意 $\Gamma_0\in\mathcal{B}$

$$\begin{aligned}&\int_{(x(s)\in\Gamma_0)}P_{s,x(s)}(x_{t_1}\in\Gamma_1,\cdots,x_{t_n}\in\Gamma_n)P(d\omega)\\&=\int_{(x(s)\in\Gamma_0)}\left[\int_{\Gamma_1}p(s,x(s);t_1,d\xi_1)\cdots\int_{\Gamma_n}p(t_{n-1},\xi_{n-1};t_n,d\xi_n)\right]P(d\omega)\\&=\int_{\Gamma_0}\left[\int_{\Gamma_1}p(s,\xi_0;t_1,d\xi_1)\cdots\int_{\Gamma_n}p(t_{n-1},\xi_{n-1};t_n,d\xi_n)\right]P_s(d\xi_0).\end{aligned} \tag{24}$$

由 (9), 此式右方值等于 $P(x_s\in\Gamma_0,x_{t_1}\in\Gamma_1,\cdots,x_{t_n}\in\Gamma_n)$, 故当 $s<t_1$ 时得证 (23). 如 $s=t_1$, 则在 $(x_s\overline{\in}\Gamma_1)$ 上，由条件概率的性质，(23) 左方几乎处处为 0; 注意 (23) 右方不超过 $P_{s,x(s)}(x_s\in\Gamma_1)$, 由 (19) 知它也等于 0, 故在 $(x_s\overline{\in}\Gamma_1)$ 上 (23) 成立；在 $(x_s\in\Gamma_1)$ 上，由类似理由 (23) 化为

$$P(x_{t_2}\in\Gamma_2,\cdots,x_{t_n}\in\Gamma_n|\,x_s)=P_{s,x(s)}(x_{t_2}\in\Gamma_2,\cdots,x_{t_n}\in\Gamma_n)\ \ \text{(a.s.)}. \tag{25}$$

其中 $s<t_2$, 故化为前一情形 (只要以 $(x_s\in\Gamma_1)$ 代 Ω 而考虑). 故得证 (23). 今令

$$\mathcal{L}=\{\text{全体有界函数}\xi(\omega)\},$$
$$L=\{\text{使 (21) 成立的全体 }\mathcal{N}^s\text{ 可测函数}\},$$

利用 $\mathcal{L}$- 系方法，即知引理正确. □

定理 3 设 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 为马氏过程，$t_1<t_2<\cdots<t_n$, $t_i\in T$, 则

$$P(x_{t_n}\in A|\,x_{t_1},\cdots,x_{t_{n-1}})=P_{t_{n-1},x_{t_{n-1}}}(x_{t_n}\in A)\ \ \text{(a.s.)}; \tag{26}$$

又如 $\xi(\omega)$ 为 $\mathcal{N}^t$ 可测的有界函数，则

$$E(\xi|\,\mathcal{N}_t)=E_{t,x_t}\xi\ \ \text{(a.s.)}. \tag{27}$$

如果 $T=[0,\infty)$, f 为 $\mathcal{B}^T$ 可测的有界函数，则

$$E[f(x(t+\cdot,\omega))|\,\mathcal{N}_t]=E_{t,x_t}f(x(t+\cdot,\omega))\ \ \text{(a.s.)}; \tag{28}$$

特别，如果此过程是齐次的，则

$$E_{t,x}f(x(t+\cdot,\omega))=E_{0,x}f(x(\cdot,\omega))\ \ (t\geqslant0,x\in E), \tag{29}$$

$$E[f(x(t+\cdot,\omega))|\,\mathcal{N}_t]=E_{0,x_t}f(x(\cdot,\omega))\ \ \text{(a.s.)} \tag{30}$$

证 由上节 (1),(3),(13) 及本节 (20),(21) 得 (26),(27) 与 (28).

当 f 为集 $(e(\cdot):e(t_i)\in\Gamma_i, i=1,2,\cdots,n)$ $(t_i>0)$ 的示性函数时，由 (17) 及 (2), 知 (29) 正确. 然后令

$$\mathcal{L}=\{\text{全体有界函数}f(e(\cdot))\},$$
$$L=\{\text{使 (29) 成立的全体 }\mathcal{B}^T\text{ 可测函数 }f\},$$

用 $\mathcal{L}$- 系方法即得 (29). 综合 (28),(29), 得证 (30). □

注意，(26)-(28) 及 (30) 中 (a.s.) 是对测度 P 而言的，故为明确起见，最好记成 (P a.s.). 用同样的方法，对马氏过程，容易证明：对任意 $s\leqslant t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n, s,t_i\in T, x\in E, A\in\mathcal{B}$, 有

$$P_{s,x}(x_{t_n}\in A|\,x_{t_1},\cdots,x_{t_{n-1}})=P_{t_{n-1},x_{t_{n-1}}}(x_{t_n}\in A)\quad(P_{s,x}\text{a.s.}).$$

关于 (27),(28),(30) 也如此. §4.1 系 2 也有相应的形式，例如那里的 (b) 应改成：

设 $s\leqslant t, s,t\in T$, $\xi(\omega)$ 为 $\mathcal{N}_t^s$ 可测，$\eta(\omega)$ 为 $\mathcal{N}^t$ 可测，又 $\eta(\omega)$ 及 $\xi\eta$ 为 $P_{s,x}$ 可积，则

$$E_{s,x}\xi\eta=E_{s,x}[\xi E_{t,x_t}\eta]. \tag{30_1}$$

(三) 在研究马氏过程样本函数的性质时，常常需要一种比马氏性更强的性质，即所谓强马氏性. 原来，在马氏性的定义中，“现在”是指固定的时刻 t,t 是与 ω 无关的常数. 但许多问题中，却要求把“现在”理解为某一随机的时刻 $\tau(\omega)$, 它随 ω 不同而可取不同的值.

例如，对马氏链 $\{x_n(\omega)\}$, 固定状态 k, 定义

$$\tau(\omega)=\inf(n:x_n(\omega)=k),$$

亦即 $\tau(\omega)$ 是初次到达 k 的时刻，它是随机变量. 试问：在已知“现在 $x_\tau(\omega)$ $(=k)$”的条件下，“将来”(即初次到达 k 以后的运动进程) 是否也不依赖于“过去”(即初次到达 k 以前的运动进程) 呢？

一般情形，我们把问题形式地 (暂时没有精确的内容) 提为：对马氏过程 $\{x(t,\omega), t\in T\}$, 扩充了的 (28) 式

$$E[f(x(\tau+\cdot\,,\omega))|\,\mathcal{N}_\tau]=E_{\tau,x_\tau}f(x(\tau+\cdot\,,\omega))\quad\text{(a.s.)} \tag{31}$$

是否成立？

相当长一段时期中，不少人认为 (31) 是 (28) 的必然推论. 直到 1956 年左右，有人找到了反例. 这问题才引起广泛注意. 最早认为 (31) 需要认真证明的是 Doob (1945).

为了使 (31) 有精确的数学意义，看看要做些什么工作.

第一，$\tau(\omega)$ 不能过于任意. 以下我们只限于考虑所谓“不依赖于将来”的随机变量.

第二，σ 代数 $\mathcal{N}_\tau$ 应如何定义？回忆在 (3) 或 (28) 中，

$$\mathcal{N}_t=\mathcal{F}\{x_u, u\leqslant t\},$$

直观地说，$\mathcal{N}_t$ 是在时刻 t 以前 (包含 t) 质点运动中所发生的事件的集. 因此，自然地 $\mathcal{N}_\tau$ 也应该是在时刻 τ 及其以前质点运动中所发生的事件的集. 然而这里 $\tau(\omega)$ 是随机变量，故如何定义 $\mathcal{N}_\tau$ 是一个新问题.

第三，(31) 中隐含着许多可测性问题，例如要求 $f(x(\tau+\cdot,\omega))$ 是随机变量，要求 $E_{\tau,x_\tau}f(x(\tau+\cdot,\omega))$ 关于 $\mathcal{N}_\tau$ 可测等等.

这些直观上的考虑引出下列正式定义：

设 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 为取值于 $(E,\mathcal{B})$ 的任意过程 (不必是马氏过程), 为确定计，设 $T=[0,\infty)$. 对其它的 $T\subset R_1$, 不难类似考虑.

称随机变量 $\tau(\omega)$ 关于此过程为 **不依赖于将来的**, 如果它取值于 $\overline{T}=[0,\infty]$, 并且对任意常数 $s\in T$, 有

$$(\omega:\tau(\omega)\leqslant s)\in\mathcal{N}_s. \tag{32}$$

令 $\Omega_\tau=(\omega:\tau(\omega)<\infty)$, 考虑 Ω_τ 中的 σ 代数 $\mathcal{N}_\tau$, 它由如下的 ω- 集 A 构成：

$$A\subset\Omega_\tau;$$

而且对任意 $s\in T$, 有 [1]

$$A\cap(\omega:\tau(\omega)\leqslant s)\in\mathcal{N}_s. \tag{33}$$

上述定义的直观意义是：(32) 表示，为了断定 $\tau(\omega)$ 是否大于 s, 只要知道质点在时间 $[0,s]$ 中如何运动就够了，与 s 以后 (将来) 如何运动无关. (33) 则表示：当 $\tau(\omega)\leqslant s$ 而考虑 A 时，或者说，在 $(\tau(\omega)\leqslant s)$ 上考虑 A 时，它属于 $\mathcal{N}_s$; 换句话说，如已知 $\tau\leqslant s$, 则 A 只依赖于 $[0,s]$ 中运动的进程.

显然，如 $\tau(\omega)\equiv t$ 常数，$\tau(\omega)$ 满足 (32).

现在可以定义强马氏过程. 为了不过多地讨论这个问题，只考虑齐次情形，这样并不会影响对问题本质的理解. 回忆 §3.3(二) 中强可测过程的定义后，我们有

定义 3 称齐次马氏过程 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 为强马氏过程，如果

α. 它是强可测过程；

β. 对任意不依赖于将来的随机变量 $\tau(\omega)$, 任意 $\mathcal{B}^T$ 可测的有界函数 f, 有 [2]

$$E[f(x(\tau+\cdot,\omega))|\mathcal{N}_\tau]=E_{0,x(\tau)}f(x(\cdot,\omega))\quad(\Omega_\tau,P). \tag{34}$$

这里 (Ω_τ,P) 表对 $\Omega_\tau-\mathcal{N}$ 中一切的 ω, 上式成立，而 $P(N)=0$, $\mathcal{N}\subset\Omega_\tau$.

显然，(30) 是 (34) 当 $\tau(\omega)\equiv t$ 时的特殊情形.

条件 α 的引进是为了保证下列各种可测性成立. 先证明 $f(x(\cdot,\omega))$ 是随机变量，这由 f 是 $\mathcal{B}^T$ 可测的假定及附篇引理 10 推出. 其次有

引理 2 设 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 为任意强可测过程，$\tau(\omega)$ 是不依赖于将来的随机变量. 于是 $x(\tau(\omega),\omega)$ 是 $(\Omega_\tau,\mathcal{N}_\tau)$ 到 $(E,\mathcal{B})$ 的可测变换.

证 由 $\mathcal{N}_\tau$ 的定义，要证明的是：对任意 $B\in\mathcal{B}$, 有

$$(x(\tau(\omega),\omega)\in B)(\tau(\omega)\leqslant t)\in\mathcal{N}_t.$$

记 $C_t=(\tau(\omega)\leqslant t)$, 这等于要证：在 C_t 上

$$x(\tau(\omega),\omega)\ \text{为}\ (C_t,\mathcal{N}_t)\to(E,\mathcal{B})\ \text{可测}. \tag{35}$$

[1]在 (33) 中令 $s\to\infty$, 可见 $\mathcal{N}_\tau\subset\mathcal{N}_\infty\subset\mathcal{F}$.

[2]对照 §4.2(29).

但因 $\tau(\omega)$ 不依赖于将来，故在 C_t 上

$$\tau(\omega) \text{ 为 } (C_t, \mathcal{N}_t) \to ([0,t], \mathcal{B}_t) \text{ 可测},$$

这里 $\mathcal{B}_t$ 表 $[0,t]$ 中全体 Borel 子集所成 σ 代数. 故由附篇引理 2, 在 C_t 上

$$(\tau(\omega), \omega) \text{ 为 } (C_t, \mathcal{N}_t) \to ([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}_t \times \mathcal{N}_t) \text{ 可测}.$$

既然过程是强可测的，故在 $[0,t] \times \Omega$ 上

$$x(t,\omega) \text{ 为 } ([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}_t \times \mathcal{N}_t) \to (E, \mathcal{B}) \text{ 可测}.$$

综合最后二结果，利用复合可测变换的可测性，即知在 C_t 上，(35) 成立. □

设 t 为非负固定常数，对 $\tau + t$ 用引理 2, 可见 $x(\tau(\omega)+t,\omega)$ 是 $(\Omega_\tau, \mathcal{N}_{\tau+t})$ 到 $(E,\mathcal{B})$ 的可测变换. 故对每一 $A \in \mathcal{B}$, 有

$$(\omega : x(\tau(\omega)+t,\omega) \in A) \in \mathcal{N}_\infty \subset \mathcal{F}.$$

第四，试证在 Ω_τ 上，$f(x(\tau+\cdot,\omega))$ 也是可测的. 实际上，要证的是：对任意 $a \in R_1$, 有

$$\Omega_\tau \cap (f(x(\tau+\cdot,\omega)) \leqslant a) \in \mathcal{F},$$

如令 $f^{-1}(a) = (e(\cdot) : f(e(\cdot)) \leqslant a)$, 则上式可写为

$$\Omega_\tau \cap (x(\tau+\cdot,\omega) \in f^{-1}(a)) \in \mathcal{F}. \tag{36}$$

令 $\Lambda = \{B : B \subset E^T, \Omega_\tau \cap (x(\tau+\cdot,\omega) \in B) \in \mathcal{F}\}$, 则 Λ 是 E^T 中的 σ 代数. 如果

$$B = (e(\cdot) : e(t_1) \in A_1, \cdots, e(t_n) \in A_n) \tag{37}$$

$(A_i \in \mathcal{B})$, 则

$$\Omega_\tau \cap (x(\tau+\cdot) \in B) = \Omega_\tau \cap (x(\tau+t_1) \in A_1, \cdots, x(\tau+t_n) \in A_n),$$

如上所述，$(x(\tau+t_i) \in A_i) \in \mathcal{F}$, 故上式左方集属于 $\mathcal{F}$. 这表示 Λ 包含柱集 (37), 从而也包含 $\mathcal{B}^T$. 既然 $f^{-1}(a) \in \mathcal{B}^T$, 故 (36) 成立.

有了这些准备后，现在问：

什么样的过程是强马氏过程？

本节以下设相空间为距离可测空间 $(E,\rho,\mathcal{B})$, $\mathcal{B}$ 为全体开集所产生的 σ 代数 (其实下面的定义 4 适用于拓扑可测空间).

定义 4 称齐次转移函数 $p(t,x,\Gamma)(x \in E, \Gamma \in \mathcal{B})$ 为 Feller **函数**, 如对任意实值函数 $f(x) \in C$, 有

$$T_t f(x) = \int_E f(y) p(t,x,dy) \in C \quad (t \geqslant 0), \tag{38}$$

这里 C 表 E 上有界连续函数全体.

称齐次马氏过程为 Feller**过程**, 如果它的转移概率是 Feller 函数.

换言之，利用 $p(t,x,\Gamma)$, 对每 $t \geqslant 0$, 在 C 上定义一个线性变换 T_t 如 (38). 如果每个 T_t 都保留 C 不变，就称 $p(t,x,\Gamma)$ 为 Feller 函数. 注意到 $T_t f(x) = E_{0,x} f(x(t,\omega))$, 就会发现 Feller 过程具有一定意义上的运动稳定性：如果在 $t=0$ 时，开始位置相差甚微 $(x_n \to x)$, 那么在时刻 t, 平均值 $E_{0,x} f(x(t,\omega))$ 也相差甚微 $(E_{0,x_n} f(x(t,\omega)) \to E_{0,x} f(x(t,\omega))$.

为了回答上述问题，还需要一个引理：

引理 3 对任意马氏过程 $\{x_t(\omega), t \in T\}$(未必是齐次过程), 任意固定的 $A \in \mathcal{N}^s, s \in T, P_{s,x}(A)$ 是 x 的 $\mathcal{B}$ 可测函数.

证 当 A 为 $\mathcal{N}^s$ 中柱集

$$(x(t_1) \in \Gamma_1, \cdots, x(t_n) \in \Gamma_n)$$

$(s \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_m, \Gamma_i \in \mathcal{B})$ 时，由附篇引理 7 及本节 (17), 应用归纳法后可见结论正确.

令

$$\Lambda = \{A : A \in \mathcal{N}^s, P_{s,x}(A) \text{ 关于 } x \text{ 为 } \mathcal{B} \text{ 可测}\},$$

则 Λ 是一 λ- 系，既然 Λ 包含诸柱集，它们是产生 $\mathcal{N}^s$ 的 π- 系，故由附篇引理 3, 知 $\Lambda \supset \mathcal{N}^s$. □

定理 4 右连续 Feller 过程是强马氏过程.

证 条件 α 由 §3.3 引理 1 得到. 只要证 (34). 先证当 f 具有形状

$$f(e(\cdot)) = f_1(e_{u_1}) f_2(e_{u_2}) \cdots f_m(e_{u_m}) \quad (0 \leqslant u_1 < u_2 < \cdots < u_m) \tag{39}$$

时， (34) 成立，这里 $e_{u_i} = e(u_i)$ 是 $e(\cdot)$ 在定点 u_i 上的值，而每 f_i 是 E 上的有界连续函数. 因此，这时 f 只依赖 $e(\cdot)$ 在有穷多个坐标上的值. 为了使记号简单，只对 $m=2$ 时证明，因为对一般的 m 证明类似. 任取 $a<b$, $0<b<\infty$. 令

$$a_{ni} = a + \frac{i}{n}(b-a),$$

$$\tau_n(\omega) = \begin{cases} a_{ni}, & \text{如} a_{n\,i-1} < \tau(\omega) \leqslant a_{ni} \ (i=1,\cdots,n), \\ \infty, & \text{如} b < \tau(\omega). \end{cases}$$

对任意 $A \in \mathcal{N}_\tau$, 有

$$\begin{aligned} &\int_{A(a<\tau\leqslant b)} f_1(x_{\tau_n+u_1}) f_2(x_{\tau_n+u_2}) P(d\omega) \\ &\quad = \sum_{i=1}^n \int_{A(a_{n\,i-1}<\tau\leqslant a_{n\,i})} f_1(x_{a_{n\,i}+u_1}) f_2(x_{a_{n\,i}+u_2}) P(d\omega), \end{aligned}$$

因为 $A(a_{n\,i-1} < \tau \leqslant a_{n\,i}) = A(\tau \leqslant a_{n\,i}) \setminus A(\tau \leqslant a_{n\,i-1}) \in \mathcal{N}_{a_{n\,i}}$, 故由条件数学期望定义，上式右方值

$$= \sum_{i=1}^n \int_{A(a_{n\,i-1}<\tau\leqslant a_{n\,i})} E[f_1(x_{a_{n\,i}+u_1}) f_2(x_{a_{n\,i}+u_2}) | \mathcal{N}_{a_{n\,i}}] P(d\omega),$$

根据马尔科夫性 (30)

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{A(a_{n\ i-1}<\tau\leqslant a_{n\ i})} E_{0\ x(a_{n\ i})} f_1(x_{u_1}) f_2(x_{u_2}) P(d\omega) \\
&= \int_{A(a<\tau\leqslant b)} E_{0\ x(\tau_n)} f_1(x_{u_1}) f_2(x_{u_2}) P(d\omega)
\end{aligned} \tag{40}
$$

当 $n \to \infty$ 时，在 $(a < \tau \leqslant b)$ 上，$\tau_n \geqslant \tau, \tau_n \to \tau$，故由右连续性假定，得 $x(\tau_n + u) \to x(\tau + u)$. 既然 f_1, f_2 有界而且连续，故 (40) 中最左端项当 $n \to \infty$ 时趋于

$$
\int_{A(a<\tau\leqslant b)} f_1(x_{\tau+u_1}) f_2(x_{\tau+u_2}) P(d\omega). \tag{41}
$$

试证 (40) 中最右端项趋于

$$
\int_{A(a<\tau\leqslant b)} E_{0\ x(\tau)} f_1(x_{u_1}) f_2(x_{u_2}) P(d\omega). \tag{42}
$$

为此只要证明 $E_{0\ x} f_1(x_{u_1}) f_2(x_{u_2})$ 是 x 的有界连续函数 [1]. 由 (30_1) 及 (29) 得

$$
\begin{aligned}
E_{0\ x} f_1(x_{u_1}) f_2(x_{u_2}) &= E_{0\ x} f_1(x_{u_1}) E_{u_1 x(u_1)} f_2(x_{u_2}) \\
&= E_{0\ x} f_1(x_{u_1}) E_{0\ x(u_1)} f_2(x_{u_2-u_1}) = E_{0\ x} F(x_{u_1}),
\end{aligned}
$$

其中 $F(y) = f_1(y) E_{0\ y} f_2(x_{u_2-u_1})$ 由 Feller 性是两个自变量为 y 的有界连续函数的积，故也是有界连续的；再用一次 Feller 性知 $E_{0\ x} F(x_{u_1})$ 也是 x 的有界连续函数. 这样便证明了 (40) 中最右端趋于 (42) 中值，从而 (41),(42) 中二值相等. 于其中令 $a < 0$ 任意，$b \to \infty$ 即得等式

$$
\int_A f_1(x_{\tau+u_1}) f_2(x_{\tau+u_2}) P(d\omega) = \int_A E_{0\ x(\tau)} f_1(x_{u_1}) f_2(x_{u_2}) P(d\omega).
$$

为了完成 (34) 对 (39) 中的 f 正确的证明，根据条件数学期望定义的要求，还要证明 (34) 右方项

$$
E_{0\ x(\tau)} f_1(x_{u_1}) f_2(x_{u_2}) = \int_\Omega f_1(x_{u_1}) f_2(x_{u_2}) P_{0\ x(\tau)}(d\omega) \tag{43}
$$

是 $\mathcal{N}_\tau$ 可测函数. 由引理 3 及附篇引理 7, 知

$$
G(y) = \int_\Omega f_1(x_{u_1}) f_2(x_{u_2}) P_{0\ y}(d\omega)
$$

是 y 的 $\mathcal{B}$ 可测函数；再根据引理 2, $x(\tau)$ 是 $(\Omega_\tau, \mathcal{N}_\tau)$ 到 $(E, \mathcal{B})$ 的可测变换，故由 (43)

$$
G(x(\tau)) = E_{0\ x(\tau)} f_1(x_{u_1}) f_2(x_{u_2})
$$

[1] 用归纳法可证对一般的 m, $E_{0\,x} f_1(x_{u_1}) \cdots f_m(x_{u_m})$ 是 x 的连续函数. 实际上，当 $m = 1$ 时，由 Feller 性，此正确. 设结论对 $m - 1$ 成立，则因

$$
E_{0\,x} f_1(x_{u_1}) \cdots f_m(x_{u_m}) = E_{0\,x} G(x_{u_1}),
$$

其中 $G(y) = f_1(y) \cdot E_{0\,y} f_2(x_{u_2-u_1}) \cdots f_m(x_{u_m-u_1})$, 由归纳法前题，并再用一次 Feller 性，即得证对 m 结论也对.

是 $\mathcal{N}_\tau$ 可测函数.

这样，我们便证明了 (34) 对 (39) 中的 f 正确，即

$$E[f_1(x_{\tau+u_1})\cdots f_m(x_{\tau+u_m})|\,\mathcal{N}_\tau) = E_{0\,x_\tau} f_1(x_{u_1})\cdots f_m(x_{u_m})\quad (\Omega_\tau, P) \tag{44}$$

固定 $f_2,\cdots,f_m$ 为任意有界连续函数，而令

$$\mathcal{L} = (\text{全体有界函数} f_1),$$
$$L = (\text{全体使 (44) 正确的 } \mathcal{B} \text{ 可测函数} f_1),$$

则 L 是一 $\mathcal{L}$- 系，由附篇引理 8, 可见 (44) 当 f_1 为有界可测函数，而 $f_2,\cdots,f_m$ 为有界连续函数时正确. 今固定 f_1 为任意有界可测函数， $f_3,\cdots,f_m$ 为任意有界连续函数，将此方法运用于 f_2, 可见 (44) 对有界可测的 f_1,f_2, 有界连续的 $f_3,\cdots,f_m$ 正确. 共重复 m 次后，即得证 (44) 对有界 $\mathcal{B}$ 可测函数 $f_1,\cdots,f_m$ 正确.

特别，考虑 $\mathcal{B}^T$ 中柱集

$$W_m = (e(\cdot): e(u_i)\in B_i,\ i=1,\cdots,m)\quad (B_i\in\mathcal{B}) \tag{45}$$

的示性函数 $\chi_{W_n}(e(\cdot))$, 它可表成

$$\chi_{W_n}(e(\cdot)) = \chi_{B_1}(e_{u_1})\cdots\chi_{B_m}(e_{u_m}),$$

即 m 个有界 $\mathcal{B}$ 可测函数之积，如上所证， (34) 对这种函数正确. 令

$$\mathcal{L} = \{\text{全体有界函数} f(e(\cdot))\},$$
$$L = \{\text{全体使 (34) 正确的 } \mathcal{B}^T \text{ 可测函数} f(e(\cdot))\},$$

则 L 是一 $\mathcal{L}$- 系而且 $\chi_{W_m}(e(\cdot))\in L$. 既然诸 W_m 构成产生 $\mathcal{B}^T$ 的 π- 系，故由附篇引理 4, L 包含一切有界 $\mathcal{B}^T$ 可测函数 $f(e(\cdot))$. □

注 定理证明中积累了不少技巧，它们有方法论的意义，同时也是常用的重要方法.

1° 将随机变量 $\tau(\omega)$"离散化" 为 $\tau_n(\omega)$, 对 $\tau_n(\omega)$ 用马氏性，然后利用极限过渡以证明对 $\tau(\omega)$ 的强马氏性；

2° 为了证明某性质对最一般形式的函数 (泛函) $f(e(\cdot))$ 正确，可化为对形如 (39) 的简单函数来证明，然后利用传统的方法 ($\mathcal{L}$- 系或 λ- 系方法) 以过渡到 $f(e(\cdot))$.

3° 函数可测性的证明方法是很重要的. 过程论中常常碰到许多可测性问题，这是 Колмогоров 公理结构的副产品. 不证明某些函数或集的可测性便无法运用测度论，而可测性的证明又不常常都是容易的. 因此必须大量掌握这种证明方法.

最后，我们指出，与定理 3 后的注意相应地，对右连续 Feller 过程，和 (34) 相当的下式正确：

$$E_{0\,x}[f(x(\tau+\cdot,\omega))|\,\mathcal{N}_\tau] = E_{0\,x(\tau)} f(x(\cdot,\omega))\quad (\Omega_\tau, P_{0\,x}). \tag{46}$$

§4.3 马氏过程与半群理论

到现在我们已将马氏性和强马氏性叙述清楚，所用的工具是测度论的一般知识. 下面两节却几乎完全不用测度论而只倚赖于简单的数学分析与泛函分析的知识. 这种情况不是偶然的.

回忆初等概率论中也有类似情况：在证明加强大数定理时，需要测度论；但讲中心极限定理时，却只用到数学分析，例如特征函数的一些性质等等.

原来，在过程论中，基本上有两种类型的问题：一种是研究过程本身 $\{x(t,\omega),t\in T\}$, 例如它的样本函数等等，这时工作多在 Ω 上进行，工具主要是测度论，利用它可以把对过程轨道的观察所引起的思想严格化. 一种是研究过程的某种重要特征，如马氏过程的转移概率，独立随机变量列的分布函数列或特征函数列，以及以后要讲的弱平稳过程的相关函数或谱函数等等，这时工作多在相空间 E 或实数，复数空间中进行，工具主要是分析的.

现在运用泛函分析中半群理论来研究马氏过程.

(一) 预备知识. 设 $(E,\rho,\mathcal{B})$ 为距离可测空间，$\mathcal{B}$ 为含一切开集的最小 σ 代数. 定义在 E 上的全体有界 $\mathcal{B}$ 可测实值函数 $f(x)$ 构成一 Banach 空间，记为 $B=\{f(x)\}$, f 的范定义为

$$\|f\|=\sup_{x\in E}|f(x)|. \tag{1}$$

在 B 中可以定义强与弱两种收敛性：

设 $f_n(x)\in B, f(x)\in B$, 如果 $\|f_n-f\|\to 0$, 就说 $\{f_n\}$**强收敛** 于 $f(x)$, 并记成 $s\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$;

如果 $f_n(x)\in B$, $f(x)\in B$, 而且 $\|f_n\|$ 有界，又对每个 $x\in E$, 有 $f_n(x)\to f(x)$, 就说 $\{f_n\}$**弱收敛** 于 f, 并记成 $\mathrm{w}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$.

显然，如 $\mathrm{s}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, 则必 $\mathrm{W}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$.

今设对每 $t\in\Delta=[a,b]$, 有一 $f_t(=f_t(x))\in B$ 与之对应，称 $f_t(t\in\Delta)$ 在 **点** $t_0\in\Delta$ **强连续或强可导**, 如果

$$\mathrm{s}\lim_{t\to t_0}f_t=f_{t_0}, \tag{2}$$

或存在强极限 [1]

$$\mathrm{s}\lim_{h\to 0}\frac{f_{t_0+h}-f_{t_0}}{h}\in B; \tag{3}$$

如果 f_t 在每一点 $t_0\in\Delta$ 都强连续或强可导，就说 f_t**在 Δ 上强连续** 或 **强可导**. 如果对 Δ 的任意分割 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, $\delta=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|t_k-t_{k-1}|$, 存在下列极限，就称 f_t 在 Δ 上 **强可积**,

$$\mathrm{s}\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}f_{t_k}\cdot(t_k-t_{k-1})\in B; \tag{4}$$

并记右方极限为 $\int_\Delta f_t\,dt$ 或 $\int_a^b f_t\,dt$. 如果存在极限 $\mathrm{s}\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f_t\,dt$, 则称 f_t**在** $[a,\infty)$ **强可积**, 并记此极限为 $\int_a^\infty f_t\,dt$.

---

[1] 在强收敛下，极限必属于 B, 此因 B 为 Banach 空间，关于此收敛完备. 故 (3) 中属于 B 的要求必然满足，但对弱收敛则是一条件.

利用弱收敛性可类似地定义 **弱连续**，**弱可导** 与 **弱可积**.

试举出积分的若干性质：

1) 设 f_t 在 Δ 上强连续. 如 Δ 有界，则 f_t 在 Δ 上强可积；如果 Δ 无界，为使 f_t 在 Δ 上强可积，只要存在一非负，在 Δ 上可积函数 $g(t)$, 使 $\|f_t\| \leqslant g(t)$. 在任一情况下

$$\left\| \int_\Delta f_t \, dt \right\| \leqslant \int_\Delta \|f_t\| \, dt. \tag{5}$$

2) 如 f_t 为强可积，T 为 B 中有界线性算子，则 Tf_t 也强可积，并且

$$\int_a^b Tf_t \, dt = T\left(\int_a^b f_t \, dt \right). \tag{6}$$

3) 如 f_t 在 $[a, a+h]$ 上强可积，而且在点 a 强连续，则

$$\mathrm{s}\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f_t \, dt = f_a. \tag{7}$$

以上性质可仿普通积分论证明，或参考关于泛函分析的书 [1].

4) 设 $f_t(x)$ $(t \in \Delta, x \in E)$ 为 (t, x) 的 $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}$($\mathcal{B}_1$ 为 Δ 中全体 Borel 子集所成 σ 代数) 可测函数，又 $\|f_t\| < c(t)$, 其中 $c(t)$ 为 Δ 上可积函数，则普通积分

$$g(x) = \int_\Delta f_t(x) \, dt \tag{8}$$

存在，而且 $g(x)$ 是有界可测函数；又

$$\|g\| \leqslant \int_\Delta c(t) \, dt. \tag{9}$$

如果 φ 是 $\mathcal{B}$ 上任一有穷测度，则由 Fubini 定理，

$$\int_E g(x)\varphi(dx) = \int_E \int_\Delta f_t(x) dt \, \varphi(dx) = \int_\Delta \left[\int_E f_t(x)\varphi(dx) \right] dt. \tag{10}$$

5) 如 $\mathrm{w}\lim\limits_{t\to a+} f_t = f$, 则

$$\mathrm{w}\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f_t \, dt = f. \tag{11}$$

6) 设 f_t 在有界的 $\Delta = [a, b]$ 上有强连续的强导数 f_t', 则

$$\int_a^b f_t' \, dt = f_b - f_a.$$

设已给齐次转移函数 $p(t, x, \Gamma)$ $(t \geqslant 0, x \in E, \Gamma \in \mathcal{B})$. 在 B 上，对每 $t \geqslant 0$, 可定义一有界线性算子 T_t:

$$T_t f(x) = \int_E f(y) p(t, x, dy) \quad (f \in B). \tag{12}$$

[1] 例如，关肇直：泛函分析讲义，高等教育出版社， 1958, 第二章 §6.

根据转移函数的性质 (§4.2) 及附篇引理 9, 立知 $T_t(t \geqslant 0)$ 构成 B 上一个压缩算子半群, 即

$$T_{s+t} = T_s T_t = T_t T_s \quad (\text{半群性}, s \geqslant 0, t \geqslant 0). \tag{13}$$

$$\|T_t f\| \leqslant \|f\| \quad (\text{压缩性}). \tag{14}$$

于是由已给的 $p(t,x,\Gamma)$ 得到 B 上一算子半群. 还可另造一半群 $V_t(t \geqslant 0)$ 如下:

以 L 表定义在 $\mathcal{B}$ 上全体具有有界变差的完全可加集函数 $\varphi(\Gamma)$ $(\Gamma \in \mathcal{B})$ 的全体, 定义 φ 的范为 φ 的全变差, 即

$$\|\varphi\| = \varphi(E^+) - \varphi(E^-),$$

$E^+ \cup E^- = E$ 为 E 关于 φ 的任一 Hahn 展开, 则 L 也构成一 Banach 空间. 对每 $t \geqslant 0$, 在 L 上定义一有界线性算子 V_t:

$$V_t\varphi(\Gamma) = \int_E p(t,x,\Gamma)\varphi(dx), \tag{15}$$

于是 $V_t(t \geqslant 0)$ 是 L 上一个压缩算子半群.

如已知 T_t 或 $V_t(t \geqslant 0)$, 则只要在 (12) 或 (15) 中令 $f(y) = \chi_\Gamma(y)$ 或令 $\varphi(\Gamma) = I(x,\Gamma)$ (即当 $x \in \Gamma$ 时 $\varphi(\Gamma) = 1$, 否则等于 0), 就可得到 $p(t,x,\Gamma)$. **故转移函数为其任一半群 T_t 或 $V_t(t \geqslant 0)$ 所决定.**

B 可看成为 L 上线性泛函的空间:

$$(f,\varphi) = \int_E f(x)\varphi(dx) \quad (f \in B, \varphi \in L), \tag{16}$$

而且 $(T_t f, \varphi) = (f, V_t\varphi)$, 故 T_t, V_t 共轭.

以下研究 $T_t(t \geqslant 0)$.

称 $p(t,x,\Gamma)$ 为 **随机连续** 的, 如对任一 $x \in E$, 任一含 x 的开集 G, 有

$$\lim_{t \to 0+} p(t,x,G) = 1. \tag{17}$$

关于 $p(t,x,\Gamma)$ 与 $T_t(t \geqslant 0)$ 的"连续性"间, 有

定理 1 下二条件等价:

1.1. $p(t,x,\Gamma)$ 随机连续;

1.2. 对任意连续函数 $f(x) \in B$, 有

$$\mathrm{w}\lim_{t \to 0+} T_t f = f. \tag{18}$$

证 由 $\|T_t f\| \leqslant \|f\|$, 知 $\|T_t f\|$ 有界.

1.1 $\Longrightarrow$ 1.2.

$$\begin{aligned}|T_t f(x) - f(x)| \leqslant & \int_G p(t,x,dy)|f(y) - f(x)| \\ & + |f(x)||p(t,x,G) - 1| + \int_{\overline{G}} p(t,x,dy)|f(y)| \\ \leqslant & \sup_{y \in G} |f(y) - f(x)| + 2\|f\|(1 - p(t,x,G)),\end{aligned}$$

由 $f(y)$ 的连续性及 (17), 取 G 充分小，右方即可小于任意指定的 ε.

1.2 $\Longrightarrow$ 1.1. 设 $x \in G$, 取连续函数

$$\varphi(y) = \rho(y, \overline{G}) = \inf_{z \in \overline{G}} \rho(y, z),$$

令

$$f(y) = \begin{cases} 1, & \text{如}\varphi(y) \geqslant \varphi(x), \\ \dfrac{\varphi(y)}{\varphi(x)}, & \text{如}0 < \varphi(y) < \varphi(x), \\ 0, & \text{如}\varphi(y) = 0. \end{cases}$$

于是 $f \in B$ 连续，由于 $0 \leqslant f(y) \leqslant 1$, 而且 $f(y) = 0$, $y \in \overline{G}$, 故

$$f(x) - T_t f(x) = 1 - \int_E p(t, x, dy) f(y) \geqslant 1 - p(t, x, G),$$

即得 1.1. □

(二) 强收敛性. 令

$$B_0 = \{f : f \in B; \text{s} \lim_{t \to 0+} T_t f = f\}, \tag{19}$$

$$D_A = \left\{f : f \in B; \text{存在 s} \lim_{h \to 0+} \frac{T_h f - f}{h} = g \in B\right\}. \tag{20}$$

简记 $\text{s} \lim\limits_{h \to 0+} \frac{T_h f - f}{h} = g$ 为

$$Af = g. \tag{21}$$

称 A 为半群 $T_t(t \geqslant 0)$ 的 **(强) 无穷小算子**,D_A 称为 A 的 **定义域**. A 是线性算子，但未必有界.

其次，对每 $\lambda > 0$, 作线性算子

$$R_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f \, dt \ \ (f \in B_0). \tag{22}$$

在这一段中，收敛都用强收敛，我们证明，此算子对 $f \in B_0$ 有定义，而且是有界的，称为**豫解算子**. 事实上，先证对每 $f \in B_0$, $T_t f$ 在 $t \geqslant 0$ 上强连续，此因如 $t \geqslant t_0$, 则

$$\|T_t f - T_{t_0} f\| = \|T_{t_0}(T_{t-t_0} f - f)\| \leqslant \|T_{t-t_0} f - f\| \to 0,$$

如 $t \leqslant t_0$, 则

$$\|T_t f - T_{t_0} f\| = \|T_t(f - T_{t_0 - t} f)\| \leqslant \|f - T_{t_0 - t} f\| \to 0.$$

既然 $\|e^{-\lambda t} T_t f\| \leqslant e^{-\lambda t} \|f\|$, 故由上述的积分性质 1, 即知 $R_\lambda f$ 存在. 有界性则由下式推出：

$$\|R_\lambda f\| \leqslant \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|f\| \, dt = \frac{\|f\|}{\lambda}. \tag{23}$$

由于半群性 (13), 为决定整个半群 $T_t(t \geqslant 0)$, 只要知道 $T_t(0 \leqslant t \leqslant h)$ 就够了， $h > 0$ 任意. 知道了后者，自然也决定了 A. 因此算子 A 是此半群的无穷小特征. 试问

1° 无穷小算子 A 是否也决定 T_t $(t \geqslant 0)$ 本身，换言之，如二半群 $T_t, T'_t(t \geqslant 0)$ 有相同的无穷小算子，是否此二半群相同 (即 $T_t f(x) = T'_t f(x)$ 对一切 $f \in B$ 成立)? 因之产生此二半群的二转移函数相同？

2° 什么样的算子 A 可以作为某半群 $T_t(t \geqslant 0)$ 的无穷小算子？已知 A 如何造 $T_t, t \geqslant 0$?

本节中只研究前一问题. 反面的问题即 2°, 留待下节考虑.

为此先须研究 $T_t(t \geqslant 0), A, R_\lambda(\lambda > 0)$ 间的关系，结果发现， R_λ 是一重要工具.

引理 1 (关于 D_A 及 B_0 的性质).

(i) D_A 与 B_0 是线性集 [1], $D_A \subset B_0$;

(ii) 对任意 $f \in B_0, T_t f$ 在 $t \geqslant 0$ 上强连续，因而半群 $T_t, t \geqslant 0$ 保留 B_0 不变 [2];

(iii) B_0 是闭集， D_A 在 B_0 中稠密；

(iv) $A(D_A) \subset B_0$, 即如 $f \in D_A$, 则 $Af \in B_0$.

证 (i) 由 D_A 与 B_0 的定义显然. (ii) 在上面已证明. (iii) 先证 B_0 的闭性. 设 $f_n \in B_0$, $\operatorname{s}\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, 由压缩性

$$\|T_t f - f\| \leqslant \|T_t f - T_t f_n\| + \|T_t f_n - f_n\| + \|f_n - f\| \leqslant 2\|f - f_n\| + \|T_t f_n - f_n\|,$$

取某一相当大的 n, 使 $\|f - f_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$, 对此固定的 n, 由于 $f_n \in B_0$, 存在 $\delta > 0$, 使 $t < \delta$ 时, $\|T_t f_n - f_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$. 故 $f \in B_0$. 其次证稠性. 设 $f \in B_0$, 由 (ii) 及积分性质 1), 存在

$$g_{a,b} = \int_a^b T_t f\, dt \quad (0 \leqslant a < b < \infty).$$

由积分性质 2)

$$T_h g_{a,b} = \int_a^b T_{t+h} f\, dt = \int_{a+h}^{b+h} T_t f\, dt = g_{a,b} + \int_b^{b+h} T_t f\, dt - \int_a^{a+h} T_t f\, dt.$$

由积分性质 3)

$$\begin{aligned}\operatorname{s}\lim_{h\to 0+} \frac{T_h g_{a,b} - g_{a,b}}{h} &= \operatorname{s}\lim_{h\to 0+} \left[\frac{1}{h} \cdot \int_b^{b+h} T_t f\, dt - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} T_t f\, dt\right] \\ &= T_b f - T_a f,\end{aligned}$$

因此 $g_{a,b} \in D_A$. 再由积分性质 3)

$$\operatorname{s}\lim_{b\to 0+} \frac{g_{0,b}}{b} = \operatorname{s}\lim_{b\to 0+} \frac{\int_0^b T_t f\, dt}{b} = f.$$

(iv) 如 $f \in D_A \subset B_0$, 由 (ii)$T_h f \in B_0$, 既然 B_0 是线性闭集，故 $Af = \operatorname{s}\lim\limits_{h\to 0+} \frac{T_h f - f}{h} \in B_0$. □

引理 2 如 $f \in D_A$, 则强导数 $\frac{dT_t f}{dt}$ 存在而且强连续，又

$$\frac{dT_t f}{dt} = AT_t f = T_t A f, \tag{24}$$

$$T_t f - f = \int_0^t T_s A f\, ds. \tag{25}$$

---

[1]称集 $G \subset B$ 为线性集，如 $f \in G, g \in G$, 则 $\alpha f + \beta g \in G(\alpha \in R_1, \beta \in R_1)$.

[2]即指对任意 $t_0 \geqslant 0, f \in B_0$, 有 $T_{t_0} f \in B_0$.

证 如 $f \in D_A$, 得

$$\left\|T_t\frac{T_hf-f}{h}-T_tAf\right\| \leqslant \left\|\frac{T_hf-f}{h}-Af\right\| \to 0 \quad (h\to 0+),$$

这表示：a) 存在 $\mathrm{s}\lim\limits_{h\to 0+}\frac{T_{t+h}f-T_tf}{h}=\frac{d^+T_tf}{dt}$; b) $T_tf\in D_A$ 而且 $\frac{d^+T_tf}{dt}=T_tAf=AT_tf$(后一等式是由于 $\frac{d^+T_tf}{dt}=\mathrm{s}\lim\limits_{h\to 0+}\frac{T_h(T_tf)-T_tf}{h}=AT_tf$).

故如能证 $\frac{d^-T_tf}{dt}=\frac{d^+T_tf}{dt}$, 则得证 (24). 对 $h>0$ 有

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T_tf-T_{t-h}f}{h}-T_tAf\right\| &\leqslant \left\|T_{t-h}\Big[\frac{T_hf-f}{h}-Af\Big]\right\|+\|T_{t-h}[Af-T_hAf]\|\\ &\leqslant \left\|\frac{T_hf-f}{h}-Af\right\|+\|Af-T_hAf\|\to 0\ (h\to 0+, \text{由 (iv)}).\end{aligned}$$

因此

$$\frac{d^-T_tf}{dt}=\mathrm{s}\lim_{h\to 0+}\frac{T_tf-T_{t-h}f}{h}=T_tAf=\frac{d^+T_tf}{dt}.$$

最后，由 (iv) 及 (ii), T_tAf(因之 $\frac{dT_tf}{dt}$) 对 t 强连续，自 0 到 t 积分 (24), 由积分性质 (6), 即得 (25). □

以 I 表恒等算子，即 $If=f(f\in B)$. R_λ 的作用在于

定理 2 $R_\lambda=(\lambda I-A)^{-1}$.

证 先证 $\lambda I-A$ 有逆算子 $(\lambda I-A)^{-1}$, 而且后者与 R_λ 有相同的定义域 B_0. 由于 $\lambda I-A$ 的定义域为 D_A, 故只要证 $\lambda I-A$ 将 D_A 一一地变到 B_0 上. 由引理 1(iv),$A(D_A)\subset B_0$, 既然 B_0 是线性集， $(\lambda-A)(D_A)\subset B_0$. 今任取 $f\in B_0$. 令 $F=R_\lambda f$. 由 (6)

$$\begin{aligned}T_hF&=T_h\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_tf\,dt\right)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_{t+h}f\,dt=\int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)}T_tf\,dt\\ &=e^{\lambda h}\int_h^\infty e^{-\lambda t}T_tf\,dt=e^{\lambda h}\left(F-\int_0^h e^{-\lambda t}T_tf\,dt\right),\end{aligned}$$

从而

$$\frac{T_hF-F}{h}=\frac{e^{\lambda h}-1}{h}F-\frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T_tf\,dt.$$

令 $h\to 0+$ 取强极限，利用引理 1(ii) 与 (7) 得

$$AF=\lambda F-f, \tag{26}$$

故 $F\in D_A$. 改写 (26) 为

$$(\lambda I-A)F=f. \tag{27}$$

这说明对每 $f\in B_0$, 存在 $F\in D_A$, 满足 (27). 换言之，得证

$$(\lambda I-A)(D_A)=B_0.$$

为证一一性，设有二个 $F_1\in D_A, F_2\in D_A$, 满足 $(\lambda I-A)F_1=(\lambda I-A)F_2$, 则 $g=F_1-F_2\in D_A$ 满足

$$Ag=\lambda g. \tag{28}$$

由 (24) 中后一式及 (28), $\frac{dT_tg}{dt}=\lambda T_tg$, 或 $\frac{d(e^{-\lambda t}T_tg)}{dt}=0$. 对每个固定的 $x\in E$, 上式是关于 t 的常微分方程，其解为

$$e^{-\lambda t}T_tg=c. \tag{29}$$

因为 $g\in D_A\subset B_0$, $\operatorname{s}\lim\limits_{t\to 0+}T_tg=g$, 故如在上式中令 $t\to 0+$, 即得 $c=g$. 以之代入 (29), 得

$$e^{-\lambda t}T_tg=g. \tag{30}$$

由压缩性， $\|g\|\leqslant e^{-\lambda t}\|g\|$, 令 $t\to\infty$ 得 $\|g\|=0$, 即 $F_1=F_2$. 故得证一一性.

剩下要证对每 $f\in B_0$, $R_\lambda f=(\lambda I-A)^{-1}f$, 即 $(\lambda I-A)R_\lambda f=f$. 而这已由 (27) 证明. □

以下定理说明，一般地无穷小算子不能唯一决定半群，并说明只能决定到一定程度.

定理 3 如二半群 T_t 与 $T'_t(t\geqslant 0)$ 有相同的无穷小算子 [1], 则它们有相同的 B_0, 而且对任意 $f\in B_0$,$T_tf=T'_tf(t\geqslant 0)$.

证 由引理 1(iii), 得证前一结论. 由定理 2, 半群 T_t 与 T'_t 有相同的豫解算子，换言之，对任意 $f\in B_0$, $x\in E$, 有

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_tf(x)\,dt=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T'_tf(x)\,dt\quad(\lambda>0), \tag{31}$$

由引理 1,$T_tf(x)$,$T'_tf(x)$ 关于 $t\geqslant 0$ 连续，故由 Laplace 变换的唯一性定理 (见 §4.5,3), $T_tf(x)=T'_tf(x)$. □

由此可见，如 $f\in D_A\subset B_0$, T_tf 为 A 所唯一决定. 如何由 A 以求出此 T_tf? 有

定理 4 设 $f\in D_A$, 则函数 $u_t=T_tf$ 是方程

$$\frac{du_t}{dt}=Au_t \tag{32}$$

在下列条件下的唯一解：

a) u_t 强可导，而且导数为强连续；

b) $\|u_t\|\leqslant ce^{kt}$ (c,k 为二常数);

c) $u_0=\operatorname{s}\lim\limits_{t\to 0+}u_t=f$.

证 由引理 2, 知 T_tf 满足 (32) 及 a). 又因 $\|T_tf\|\leqslant\|f\|$, 故如取 $c=\|f\|$, $k=0$, 则 T_tf 满足 b). 由于 $f\in D_A\subset B_0$, 故 $\operatorname{s}\lim\limits_{t\to 0+}T_tf=f$.

反之，设 u_t 为任一满足 a),b) 与 $\operatorname{s}\lim\limits_{t\to 0+}u_t=0$ 的 (32) 的解，试证 $u_t=0$.

令 $v_t=e^{-\lambda t}u_t$ $(\lambda>k)$. 由 (32)

$$\frac{dv_t}{dt}=-\lambda e^{-\lambda t}u_t+e^{-\lambda t}\frac{du_t}{dt}=-\lambda v_t+Av_t=-(\lambda I-A)v_t,$$

因而

$$-v_t=R_\lambda\Big(\frac{dv_t}{dt}\Big).$$

[1]就是说：首先， $D_A=D_{A'}$, 其次，对任意 $f\in D_A$, $Af=A'f$.

由 a),$\frac{dv_t}{dt}$ 强连续，既然 R_λ 有界，故由 (6)

$$\int_0^t v_s\,ds = -R_\lambda \int_0^t \frac{dv_s}{ds}ds = -R_\lambda(v_t - v_0) = -R_\lambda v_t$$

(因 $u_0 = \mathrm{s}\lim\limits_{t\to 0+} u_t = 0$). 由 b), 当 $t\to\infty$ 时

$$\|v_t\| = \|e^{-\lambda t}u_t\| \leqslant ce^{(k-\lambda)t} \to 0.$$

故 $\|R_{\lambda v_t}\| \leqslant \|R_\lambda\|\cdot\|v_t\| \to 0$, 从而只要 $\lambda > k$, 便有

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}u_t\,dt = \int_0^\infty v_t\,dt = 0.$$

由此及上述唯一性定理推出 $u_t = 0$. □

(三) 弱收敛性. 以弱收敛代替强收敛，可得与上段平行的几乎类似的结果. 令

$$\widetilde{B}_0 = \{f : f\in B; \mathrm{w}\lim_{t\to 0+} T_t f = f\}, \tag{33}$$

$$D_{\widetilde{A}} = \left\{f : f\in \widetilde{B}_0; \text{存在 } \mathrm{w}\lim_{h\to 0+}\frac{T_h f - f}{h} = g \in \widetilde{B}_0\right\}. \tag{34}$$

简记 $\mathrm{w}\lim\limits_{h\to 0+}\frac{T_h f-f}{h} = g$ 为

$$\widetilde{A}f = g.$$

称 $\widetilde{A}$ 为半群 $T_t(t\geqslant 0)$ 的弱无穷小算子，其定义域为 $D_{\widetilde{A}}$. $\widetilde{A}$ 是线性算子，但未必有界.

其次，对每 $\lambda > 0$, 作线性算子

$$\widetilde{R}_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t f\,dt \quad (f\in\widetilde{B}_0).$$

在这一段中，收敛都用弱收敛. 我们证明，此算子对 $f\in\widetilde{B}_0$ 有定义，而且 $\widetilde{R}_\lambda f\in B$. 实际上，在下面的引理 3(ii′) 中，将证明 $T_t f(x)$ 是 $t\geqslant 0$ 的右连续函数，既然 $T_t f(x) = \int_E p(t,x,dy)f(y)$ 对固定的 t 是 x 的 $\mathcal{B}$ 可测函数 (见附篇引理 7), 因而由 §3.3 引理 1,$T_t f(x)$(因之 $e^{-\lambda t}T_t f(x)$) 是 (t,x) 的可测函数. 又因 $\|e^{-\lambda t}T_t f\| \leqslant \|f\|e^{-\lambda t}$, 故积分 $\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t f\,dt$ 存在而且是 x 的有界 $\mathcal{B}$ 可测函数，从而 $\widetilde{R}_\lambda f\in B$.

引理 3

(i′) $D_A \subset D_{\widetilde{A}} \subset B_0 \subset \widetilde{B}_0$;

(ii′) 对任意 $f\in\widetilde{B}_0$, $T_t f$ 在 $t\geqslant 0$ 上弱右连续，因而半群 $T_t(t\geqslant 0)$ 保留 $\widetilde{B}_0$ 不变 [1].

(iii′) $D_A, D_{\widetilde{A}}, B_0, \widetilde{B}_0$ 有相同的弱闭包 [2]，记为 B_1.

(iv′) $\widetilde{A}(D_{\widetilde{A}}) \subset \widetilde{B}_0$.

证 (i′), 只要证 $D_{\widetilde{A}} \subset B_0$, 其余都显然，如 $f\in D_{\widetilde{A}}$, 由弱收敛定义，$\left\|\frac{T_t f-f}{t}\right\|$ 有界，故当 $t\to 0$ 时，$\|T_t f - f\| \to 0$, 此即表 $f\in B_0$.

---

[1] 由弱右连续性推知：对固定的 $x\in E$ 及 $f\in\widetilde{B}_0$, $T_t f(x)$ 是 $t\geqslant 0$ 的右连续函数.

[2] 集 M 的弱 (强) 闭包是含 M 的最小闭集，收敛性用弱 (强) 收敛.

(ii′) 首先注意，如 $\mathrm{w}\lim_{n\to\infty} f_n = f$, 由控制收敛定理，有

$$T_t\big[\mathrm{w}\lim_{n\to\infty} f_n\big] = \mathrm{w}\lim_{n\to\infty} T_t f_n. \tag{35}$$

故对任意固定的 $t_0 \geqslant 0$, 如 $f \in \widetilde{B}_0$, 则

$$\mathrm{w}\lim_{h\to 0+} T_{t_0+h} f = \mathrm{w}\lim_{h\to 0+} T_{t_0} T_h f = T_{t_0}\big[\mathrm{w}\lim_{h\to 0+} T_h f\big] = T_{t_0} f.$$

(iii′) 由引理 1(iii),B_0 是 D_A 的强闭包，故 D_A 的弱闭包包含 B_0, 由 $D_A \subset D_{\widetilde{A}} \subset B_0$, 知此三集有相同的弱闭包. 如能证 $D_{\widetilde{A}}$ 在弱收敛意义下稠于 $\widetilde{B}_0$, 则得证结论. 为此，注意 $f \in \widetilde{B}_0$ 时，象证明 $\widetilde{R}_\lambda f \in B$ 一样，可证在弱收敛下

$$g_{a,b} = \int_a^b T_t f\, dt \quad (0 \leqslant a < b < \infty)$$

也属于 B. 然后只要仿照引理 1 中 D_A 稠于 B_0 的证明即可. [唯一差别是：这里的 $T_h g_{a,b} = \int_a^b T_{t+h} f\, dt$ 不是由积分性质 2) 推出，而是由积分性质 4) 推出.]

(iv′) 由 (34) 中 $g \in \widetilde{B}_0$ 的假定即得 $\widetilde{A}(D_{\widetilde{A}}) \subset \widetilde{B}_0$. □

引理 4 如 $f \in D_{\widetilde{A}}$, 则弱右导数 $\frac{d^+ T_t f}{dt}$ 存在而且弱右连续，又

$$\frac{d^+ T_t f}{dt} = \widetilde{A} T_t f = T_t \widetilde{A} f, \tag{36}$$

$$T_t f - f = \int_0^t T_s \widetilde{A} f\, ds. \tag{37}$$

证 与引理 2 之证明类似. □

定理 5 $\widetilde{R}_\lambda = (\lambda I - \widetilde{A})^{-1}$.

证 将定理 2 的证明几乎逐字地重复到 (28). 由 (36) 及 (28), 得

$$\frac{d^+ T_t f}{dt} = T_t \widetilde{A} g = \lambda T_t g$$

或 $\frac{d^+(e^{-\lambda t} T_t g)}{dt} = 0$. 既然 $g \in D_{\widetilde{A}} \subset B_0$, 函数 $e^{-\lambda t} T_t g$ 连续，故根据数学分析中关于右导数的一结果 (见 §4.5, 13), 由上式可得 (30). 以下再逐字重复即可. □

定理 3 的强化是下面的

定理 6 如二半群 T_t 与 $T_t'(t \geqslant 0)$ 的强或弱无穷小算子一致，则它们有相同的 B_1, 而且对一切 $f \in B_1$, 有

$$T_t f = T_t' f. \tag{38}$$

证 第一结论由引理 3(iii′) 推得. 如二者的强无穷小算子相同，由定理 3, (38) 对一切 $f \in B_0$ 成立. 根据 (35), 可见 B 中使 (38) 成立的全体 f 所成的集 F 关于弱收敛封闭，既然 $B_0 \subset F$, 故 B_0 的弱闭包 $B_1 \subset F$.

如二者有相同的弱无穷小算子，由定理 5,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t' f\, dt$$

对一切 $f \in B_0 \cap B_0'$ 成立. 但当 $f \in B_0 \cap B_0'$ 时, $T_t f$ 与 $T_t' f$ 对 t 连续, 由 Laplace 变换唯一性定理, (38) 对一切 $f \in B_0 \cap B_0' \supset D_{\widetilde{A}} = D_{\widetilde{A'}}$ 成立. 再用引理 3(iii$'$) 及 (35), 即知 (38) 对 $f \in B_1$ 成立. □

为了叙述与定理 4 平行的定理, 需要对 $p(t,x,\Gamma)$ 补加一条件

(E): 对任意固定的 $\Gamma \in \mathcal{B}$, $p(t,x,\Gamma)$ 关于 (t,x) 为 $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}$ 可测函数, $\mathcal{B}_1$ 为 $[0,\infty)$ 中全体 Borel 子集所成 σ 代数.

由此条件易见: 如 $g_t(x)$ 当 $t \geqslant 0$ 固定时属于 B, 当 x 固定时, 对 t 右连续, 又在任一有界区间 $[a,b]$ 内, $\|g_t\|$ 有界, 则在弱收敛下, $\int_a^b g_t(x)\,dt \in B$, 而且 $\int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s g_t(x)\,ds \in B$ $(\lambda > 0)$.

实际上, 对每固定的 $x \in E$, 由右连续性及有界性, 显然存在 $\int_a^b g_t(x)\,dt$. 既然 $g_t(x)$ 对 x 为 $\mathcal{B}$ 可测, 对 t 右连续, 故关于 (t,x) 可测. 由附篇引理 7, $\int_a^b g_t(x)\,dt \in B$. 其次, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使 $d > N$ 时, $\int_d^\infty e^{-\lambda t}\,dt < \frac{\varepsilon}{\|g_t\|}$, 故当 $N_2 > N_1 > N$ 时

$$\left\| \int_0^{N_2} e^{-\lambda s} T_s g_t\,ds - \int_0^{N_1} e^{-\lambda s} T_s g_t\,ds \right\| \leqslant \|g_t\| \cdot \int_{N_1}^{N_2} e^{-\lambda t}\,dt < \varepsilon,$$

故存在 $\int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s g_t(x)\,ds$. 用附篇引理 7 两次, 知后者属于 B.

定理 7 设 (E) 成立, 如 $f \in D_{\widetilde{A}}$, 则函数 $u_i = T_t f$ 是方程

$$\frac{d^+ u_t}{dt} = \widetilde{A} u_t \tag{39}$$

在下列条件下的唯一解:

a) u_t 弱连续; $\frac{d^+ u_t}{dt}$ 弱右连续; $\left\|\frac{d^+ u_t}{dt}\right\|$ 在任一有界区间内有界.

b) $\|u_t\| < Ce^{kt}$ $(C, k$ 为二常数).

c) $u_0 = \mathrm{w}\lim\limits_{t \to 0+} u_t = f$.

证 由 $D_{\widetilde{A}} \subset B_0$ 及引理 1(ii), $T_t f$ 弱 (甚至强) 连续. 由 (34) 知 $\widetilde{A} f \in \widetilde{B}_0$, 根据 (36) 及引理 3(ii$'$) 知 $\frac{d^+ u_t}{dt}$ 弱右连续, 有界性由 (36) 后式可见. b),c) 显然.

今设 (39) 之解 u_t 满足 a),b) 及 $\mathrm{w}\lim\limits_{t \to 0+} u_t = 0$, 试证 $u_t = 0$. 仿定理 4 之证, $v_t = e^{-\lambda t} u_t$ 满足

$$v_t = -\widetilde{R}_\lambda \left(\frac{d^+ v_t}{dt} \right) = -\int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s \left(\frac{d^+ v_t}{dt} \right) ds,$$

$$\int_0^t v_r dr = -\int_0^t \left[\int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s \left(\frac{d^+ v_r}{dr} \right) ds \right] dr.$$

函数 $T_s v_r(x) = e^{-\lambda r} T_s u_r(x)$ 对 s 连续 (因 $u_r \in D_{\widetilde{A}}$), 对 r 连续 (由 a) 及积分控制收敛定理), 故它关于 (s,r) 可测 [1]. 既然

$$T_s \left(\frac{d^+ v_r}{dr} \right)(x) = \frac{d^+}{dr} [T_s v_r(x)]$$

是可测函数列的极限 (可换序是由于 (35)), $e^{-\lambda s} T_s \left(\frac{d^+ v_r}{dr} \right)$ 为 (s,r) 可测. 运用 Fubini 定理, 我们可以改变积分次序, 再注意

$$T_h \left[\int_\Delta f_t\,dt \right] = \int_\Delta T_h f_t\,dt \tag{40}$$

[1] 仿 §3.3 引理 1 证明.

(于 (10) 中令 $\varphi(\Gamma)=p(h,y,\Gamma)$ 即得上式), 有

$$\int_0^t v_r\,dr=-\int_0^\infty\left[e^{-\lambda s}T_s\int_0^t\frac{d^+v_r}{dr}dr\right]ds. \tag{41}$$

函数 $v_t-\int_0^t\frac{d^+v_r}{dr}\,dr$ 连续，右导数等于 0, 故此函数等于常数. 但当 $t=0$ 时，它等于 0, 故

$$\int_0^t\frac{d^+v_r}{dr}\,dr=v_t. \tag{42}$$

以 (42) 代入 (41), 得

$$\int_0^t v_r\,dr=-\widetilde{R}_\lambda v_t.$$

然后重复定理 4 以下的证明即可. □

(四) 现在来叙述唯一性定理，它说明何时半群 (因之转移函数) 被它的强无穷小算子 A 或弱无穷小算子 $\widetilde{A}$ 所唯一决定. 定理 6 提供了解决这问题的初步形式：在 B_1 上半群既为 A 也为 $\widetilde{A}$ 所唯一决定. 因此，如果 $B_1=B$, 则唯一性成立. 注意 B_1 依赖于 $T_t,t\geqslant0$, 而且一般地 $B_1\subset B$. 故为使 $B_1=B$, 必须此半群 (或相应地， $p(t,x,\Gamma)$) 具有某种 “较好” 的性质. 这性质在以下定理中叙述.

如 $p(t,x,\Gamma)$ 的半群 $T_t,\ t\geqslant0$ 的无穷小算子为 A, 就说 $p(x,t,\Gamma)$ 的无穷小算子为 A. 对 $\widetilde{A}$ 也如此.

以下仍以 C 表 E 上全体有界连续函数所成的集.

定理 8 (唯一性定理)

(i) 如 $T_t(t\geqslant0)$ 的 $\widetilde{B}_0$ 包含 C, 则此半群既为 A, 也为 $\widetilde{A}$ 所唯一决定；

(ii) 如转移函数 $p(t,x,\Gamma)$ 随机连续，则它既为其强无穷小算子 A, 也为其弱无穷小算子 $\widetilde{A}$ 所唯一决定.

证 取 $\mathcal{L}=B$. 设二半群 $T_t,T_t'(t\geqslant0)$ 有相同的 A(或 $\widetilde{A}$), 因之有相同的 B_1, 又设各自的 $\widetilde{B}_0\supset C,\ \widetilde{B}_0'\supset C$. 令

$$L=\{f:f\in B;\ T_tf=T_t'f\},$$

由 (35) 知 L 是 $\mathcal{L}$- 系. 由假定及定理 6, $C\subset\widetilde{B}_0\cap\widetilde{B}_0'\subset B_1\subset L$, 根据附篇引理 8, $B\subset L$, 此得证 (i). (ii) 则由定理 1 推出. □

现在特别地研究 Feller 函数. 回忆它的定义：转移函数 $p(t,x,\Gamma)$ 所产生的半群 $T_t(t\geqslant0)$ 如保留 C 不变，即如 $f\in C$ 则 $T_tf\in C$ 时，就称 $p(t,x,\Gamma)$ 为 Feller 转移函数.

空间 B 是对任一转移函数不变的，故一般地在 B 中考虑它的算子半群；现在既然 C 是 B 的子 Banach 空间，它又对 Feller 函数不变，我们自然愿意只在 C 中研究它所对应的半群. 试问与定理 8 相当的结果此时成立否？

令 $C_0=CB_0,\ \widetilde{C}_0=C\widetilde{B}_0,\ C_1$ 表 $\widetilde{C}_0$ 在 B 中的弱闭包，并仿照 (20),(21),(34) 等以定义限制在 C 中的无穷小算子 A_C 与 $\widetilde{A}_C$(只要在 (20),(34) 中补加条件 $f\in C,g\in C$), 它们的定义域分别记为 D_{A_C} 与 $D_{\widetilde{A}_C}$.

定理 9 随机连续的 Feller 函数既由其 A_C, 也由其 $\widetilde{A}_C$ 唯一决定；又 $C=\widetilde{C}_0$.

证 逐步检查定理 6 的证明，可见定理 6 可用于 A_C 与 $\widetilde{A}_C$, 因而此二算子中任一个足以在 C_1 中决定 $T_t(t \geqslant 0)$. 由定理 1,$C \subseteq \widetilde{B}_0$, 故 $C = \widetilde{C}_0 \subset C_1$. 象定理 8 的证明一样地定义 $\mathcal{L}$ 与 L, 则 $L \supset C_1 \supset C$, 故由附篇引理 8 得 $L \supset B$. □

为证定理 10, 要先证一引理，此引理给出 $f \in B_0$ 的充分条件.

引理 5 [1] 设 $f \in B$ 为某一元，如对 B 上任一线性连续泛函 l,, 数值函数 $l(T_tf)$ 对 $t > 0$ 右连续，则 T_tf 对 $t > 0$ 右强连续 (即对每 $t > 0, T_tf \in B_0$). 此外，如对每 l 尚有

$$\lim_{t \to 0+} l(T_tf) = l(f), \tag{43}$$

则 $f \in B_0$.

证 令 $B' = (g : g$ 是 f 及 T_rf 的有理系数的线性组合， $r > 0$ 为有理数) 的强闭包. 设对某 $t > 0$,$T_tf \overline{\in} B'$, 则由 Banach-Hahn 定理 [2] , 可造 B 上一线性连续泛函 l, 使

$$l(T_tf) = 1, \ \ l(g) = 0 \ \ (\text{一切} g \in B'),$$

但这与 $0 = \lim\limits_{r \to t+} l(T_rf) = l(T_tf) = 1$ 矛盾，故 $T_tf \in B'(t > 0)$.

既然 B' 关于 T_t 不变，故可只在此子空间上考虑此半群，显然 B' 为可分的. 设 l 为 B' 上任一线性连续泛函，因 $l(T_tf)$ 右连续，故可测. 根据 Dunford 定理 [3] , 可见 T_tf 对 $t > 0$ 右强连续，即 $T_tf \in B_0$.

如果说 $f \overline{\in} B_0$, 则由 Banach-Hahn 定理，存在线性连续泛函 l, 使 $l(f) = 1, l(g) = 0$(一切 $g \in B_0$). 由此 (43) 不可能. 故 $f \in B_0$. □

定理 10 当相空间 E 为紧距离空间时，为使 Feller 函数随机连续，必需且只需

$$C_0 = \widetilde{C}_0 = C; \ \ A_C = \widetilde{A}_C.$$

证 由随机连续性与定理 1, 对任意 $f \in C$ 有

$$\mathrm{w}\lim_{h \to 0+} T_hf = f.$$

由引理 3(ii′), 对任意 $t \geqslant 0$

$$\mathrm{w}\lim_{h \to 0+} T_{t+h}f = T_tf. \tag{44}$$

其次，由 E 的紧性， C 上任一线性连续泛函 l 可表为 [4]

$$l(f) = \int_E f(y)\varphi(dy), \tag{45}$$

这里 φ 是 $\mathcal{B}$ 上的广义测度. 由 (44),(45) 知，对任一 l,$l(T_tf)$ 是 t 的右连续函数，而且 $l(T_tf) \to l(f)$ $(t \to 0+)$. 故由引理 5 [5] ,$f \in C_0$, 即 $C \subset C_0$, 但 $C_0 \subset \widetilde{C}_0 \dot{\subset} C$, 故 $C_0 = \widetilde{C}_0 = C$. 既然 $\widetilde{R}_\lambda, R_\lambda$

[1] 其实此引理对一般的 Banach 空间 B 正确.

[2] 见 Л. А. Люстерник и В.`И. Соболев, 泛函数分析概要，杨从仁译， 1964(第二次印刷),169 页.

[3] 见上引关肇直：泛函分析讲义，第 482 页，定理 2. Banach-Hahn 定理见 82 页，系 2.

[4] 证明见参考书 [20]$ 56.

[5] 把那里的 B 看作 C,B_0 看作 C_0.

一一地将 $\widetilde{C}_0, C_0$ 分别变到 $D_{\widetilde{A}_C}$ 及 D_{A_C} 上．而且 [1] $R_\lambda \subset \widetilde{R}_\lambda$, 故由 $C_0 = \widetilde{C}_0$ 得 $D_{\widetilde{A}_C} = D_{A_C}$ 及 $\widetilde{A}_C = A_C$.

反之，如 $C = C_0(= CB_0)$, 则 $C \subset B_0$, 故 (18) 满足，由定理 1 即得 $p(t, x, \Gamma)$ 的随机连续性．□

定理 (10) 表明，当相空间为紧距离可测空间 $(E, \rho, \mathcal{B})$ 时，对随机连续的 Feller 函数，半群理论取完满的形式．这时由于强，弱无穷小算子一致，我们只要考虑一种收敛性，例如强收敛性就够了．

§4.4　马氏过程与半群理论 (续)

这一节中主要研究上节 (二) 中提出的问题 2°: 什么样的算子 A 可以作为某半群 $T_t(t \geqslant 0)$ 的无穷小算子？已知 A 如何造 $T_t, t \geqslant 0$? 为了解决这些问题，我们先略述泛函分析中关于一般的线性算子的半群理论，特别是 Hille-Yosida 定理．

设 B 为任意的 Banach 空间，其中的点记作 f, f 的范记作 $\|f\|$. 把 B 中的元变到 B 中的变换 T 称为 **有界线性算子** [2], 如果

1. 由 $\|f_n - f\| \to 0$ 可得 $\|Tf_n - Tf\| \to 0\ (n \to \infty)$;
2. 对任意数 $\alpha, \beta, f \in B, g \in B$, 有

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T f + \beta T g.$$

今设对每一 $t \geqslant 0$, 存在一个有界线性算子 T_t, 称此族算子 $T_t(t \geqslant 0)$ 构成一个 **压缩的有界线性算子半群**, 简称为 **压缩半群** [3], 如果满足条件

$$T_{s+t} = T_s T_t \quad (s \geqslant 0, t \geqslant 0), \tag{1}$$

$$\|T_t f\| \leqslant \|f\| \quad (f \in B), \tag{2}$$

分别称为 (1),(2)**半群性** 与 **压缩性**.

上节中，我们考虑了一个特殊的 Banach 空间 B, B 中的元 $f(= f(x))$ 是距离可测空间 $(E, \rho, \mathcal{B})$ 上的有界 $\mathcal{B}$ 可测函数， $\|f\| = \sup\limits_{x \in E} |f(x)|$, 并详细地研究了一个特殊的压缩半群 $T_t(t \geqslant 0)$

$$T_t f(x) = \int_E p(t, x, dy) f(y). \tag{3}$$

以后称由 (3) 定义的压缩半群为 **由转移函数** $p(t, x, \Gamma)$ **产生的压缩半群**, 或简称为 $p(t, x, \Gamma)$-**半群**.

上节中引进的许多基本概念自然可移植于一般情形，而且其中绝大部分 (关于强收敛) 的概念不需任何改变．

称 $\{f_n\} \subset B$**强收敛** 于 f,(f 必定属于 B), 如果 $\|f_n - f\| \to 0$, 并记成 $\operatorname{s}\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$. 由此便可象上节完全一样地定义 $f_t(t \in \Delta = [a, b])$ 在 Δ 上强连续，强可导，强可积，而且上节中关于积分的性质 1),2),3) 完全保留．

---

[1] 设 A, B 为二算子，如定义域 $D_A \subset D_B$, 而且 $f \in D_A$, 有 $Af = Bf$, 则记 $A \subset B$.

[2] T 的定义域也可以只是 B 的某一子空间 D, 此时只要求 1,2 对 D 中的 f_n, f, g 成立．

[3] 如 $T_t(t \geqslant 0)$ 只具有性质 (1), 则称为半群．

考虑抽象 Banach 空间 B 上任一压缩半群 $T_t(t\geqslant 0)$. 利用强收敛性, 与上节 (19),(20),(21),(22) 完全一样地定义 B_0, D_A, A 及 R_λ, 并称 A 为 $T_t(t\geqslant 0)$ 的 **强无穷小算子**,D_A 为其定义域, 称 $R_\lambda(\lambda>0)$ 为 **豫解算子**.

至于弱收敛性的一般化则涉及共轭空间的观念，需要更多的泛函分析知识. 好在以下我们不用弱收敛，故不拟引进. 因此，以下 "强收敛""强无穷小算子" 等中的 "强" 字省去.

上节第 (二) 段中一切结论和证明 [1] 对一般的 Banach 空间 B 及压缩半群都正确，因为那里一点也没有用到 B 及压缩半群的特殊性. 特别，以下引理正确：

引理 1 设 B 为任意 Banach 空间， $T_t(t\geqslant 0)$ 是其上的任意压缩半群， A 为它的无穷小算子，则

1° A 的定义域 D_A 在 B_0 中处处稠密 (在强收敛下);

2° 对任意 $g\in B_0$ 及 $\lambda>0$, 以下方程有解 $f\in D_A$:

$$\lambda f - Af = g; \tag{4}$$

3° 对任意 $f\in D_A$ 及 $\lambda>0, \|\lambda f - Af\|\geqslant \lambda\|f\|$.

证 由上节引理 1(iii) 及 (27) 得 1°,2°. 对 $f\in D_A$, 令 $\lambda f-Af=g$, 由上节定理 2,$R_\lambda g=f$, $g\in B_0$. 再由上节 (23), $\|R_\lambda g\|\leqslant\frac{\|g\|}{\lambda}$, 此即 $\|\lambda f-Af\|\geqslant\lambda\|f\|$. □

引理 2 如任二压缩半群 T_t 与 $T_t'(t\geqslant 0)$ 有相同的无穷小算子，则它们有相同的 B_0, 而且对任意 $f\in B_0$, $T_tf=T_t'f(t\geqslant 0)$.

证 如同上节定理 3 证明中的推理一样，由假设，知 T_t 与 $T_t'(t\geqslant 0)$ 有相同的 B_0 及相同的豫解算子. 故对任意 $f\in B_0$, $\lambda>0$, 有

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_tf\,dt=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t'f\,dt$$

或者

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}(T_tf-T_t'f)\,dt=0.$$

由积分的性质 2)(见上节) [2] , 对 B 上任一有界线性泛函 $l(g)(g\in B)$, 自上式得

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}l(T_tf-T_t'f)\,dt=0.$$

因 $f\in B_0$, $l(T_tf-T_t'f)$ 是 t 的有界连续函数. 由 Laplace 变换唯一性定理知 $l(T_tf-T_t'f)=0$ 但如在 Banach 空间某一元上一切有界线性泛函的值都等于 0, 则此元为 0, 即零元 (Banach-Hahn 定理). 故 $T_tf=T_t'f$ $(t\geqslant 0)$. □

为了便于理解 Hille-Yosida 定理，考虑下面的

例 Banach 空间 E 中全体有界线性算子构成一集 $\mathfrak{A}$. 对 $\mathfrak{A}$ 中元 Q, 引进范

$$\|Q\|=\sup_{\|f\|=1}\frac{\|Qf\|}{\|f\|} \tag{5}$$

---

[1] 唯一需要修改的是上节定理 3 的证明，因为上节 (31) 中用到了 $f=f(x)$ 这一特殊性. 修改见下面的引理 2.

[2] 此性质对无穷积分区间也成立，见上引关肇直书， 192 页定理 4.

后，泛函分析中证明了，关于普通的算子加法和对数的乘法运算，$\mathfrak{A}$ 构成一 Banach 空间[1].

今固定任一 $A \in \mathfrak{A}$, 试证诸算子 $e^{tA}(t \geqslant 0)$, 构成一半群，即满足 (1).

首先说明 e^{tA} 的定义. 这要从算子的无穷级数讲起. 设有一列 $\{Q_n\} \subset \mathfrak{A}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|Q_n\| < \infty$. 由于 $\mathfrak{A}$ 为 Banach 空间，必存在 $Q \in \mathfrak{A}$, 使 $\left\|Q - \sum\limits_{m=0}^{n} Q_m\right\| \to 0, n \to \infty$. 定义 Q 为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Q_n$. 这样，由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left\|\frac{A^n}{n!}\right\| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} < \infty$, 故可定义

$$e^{tA} = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(tA)^n}{n!}, & t > 0, \\ I, & t = 0. \end{cases}$$

由此定义，可见如 $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{A}$, 且 $AB = BA$, 则由逐项相乘，即得

$$e^A e^B = e^{A+B}. \tag{6}$$

由 (6) 特别地推出 $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}$, 故 $e^{tA}(t \geqslant 0)$ 构成一半群. 其次，因

$$\|e^{tA} - I - tA\| \leqslant \sum_{n \geqslant 2} \frac{\|A\|^n}{n!} t^n = e^{t\|A\|} - I - t\|A\|,$$

故得

$$\left\|\frac{e^{tA} - I}{t} - A\right\| \to 0 \quad (t \to 0+), \tag{7}$$

这表示半群 $e^{tA}(t \geqslant 0)$ 的无穷小算子是 A. 由此可见，如已给定义在 E 上的有界线性算子 A, 我们很容易地就可造出以 A 为无穷小算子的半群. 然而，当 A 不是有界算子时，情况就复杂得多.

引理 3 如 $A \in \mathfrak{A}, D \in \mathfrak{A}, AD = DA$, 而且对任意 $t \geqslant 0$, $\|e^{tA}\| \leqslant 1$, $\|e^{tD}\| \leqslant 1$, 则

$$\|e^{tA} - e^{tD}\| \leqslant t\|A - D\|. \tag{8}$$

证 我们有

$$e^{tA} - e^{tD} = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k-1}{n}tA} e^{\frac{n-k}{n}tD}\left(e^{\frac{t}{n}A} - e^{\frac{t}{n}D}\right)$$

$$\|e^{tA} - e^{tD}\| \leqslant n\|e^{\frac{t}{n}A} - e^{\frac{t}{n}D}\|. \tag{9}$$

由 (7), 当 $n \to \infty$ 时

$$\frac{e^{\frac{t}{n}A} - I}{\frac{t}{n}} \to A, \frac{e^{\frac{t}{n}D} - I}{\frac{t}{n}} \to D,$$

故 $n(e^{\frac{t}{n}A} - e^{\frac{t}{n}D}) \to t(A - D)$. 由此及 (9) 即得 (8). □

[1]见上引关肇直：泛函分析讲义，第 69 页.

设 $T_t(t \geqslant 0)$ 为 Banach 空间 B 中的线性算子半群，如果它的 $B_0 = B$, 即对任意 $f \in B$, 有

$$\mathrm{s}\lim_{t \to 0+} T_t f = f$$

时，称此半群为 **连续的**, 或 **在 B 中为连续的**.

定理 1 (Hille–Yosida) 设 B 为任一 Banach 空间，A 为 B 中的线性算子. 为使 A 为某个连续的压缩半群 $T_t(t \geqslant 0)$ 的无穷小算子，必须而且只需引理 1 中三条件 1°, 2°, 3° 满足 [1].

证 必要性已在引理 1 中证明，注意由假设，此时 $B = B_0$. 充分性之证明较长，步骤是：造一族有界线性算子 A_λ 逼近于 A: $\mathrm{s}\lim\limits_{\lambda \to \infty} A_\lambda f = Af (f \in D_A)$; 造半群 $T_t^\lambda = e^{tA_\lambda}$, 并证明对每 $f \in B$, 存在极限 $T_t f = \mathrm{s}\lim\limits_{\lambda \to \infty} T_t^\lambda f$, 而且此 $T_t(t \geqslant 0)$ 即所求之半群. 下面详细证明.

(i) 造有界线性算子 A_λ.

以 $R_\lambda g$ 表方程 (4) 的解，因为如果 $\lambda f - Af = 0$, 则由 3°, $f = 0$, 故此解唯一. 显然 R_λ 是定义在 B 上的线性算子. 由 3°

$$\|R_\lambda g\| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|g\|. \tag{10}$$

故 R_λ 是有界算子. 由 $R_\lambda g$ 的定义知

$$\lambda R_\lambda g - AR_\lambda g = g \quad (g \in B), \tag{11}$$

$$\lambda R_\lambda f - R_\lambda Af = f \quad (f \in D_A). \tag{12}$$

由此知如 $f \in D_A$, 则

$$R_\lambda Af = AR_\lambda f. \tag{13}$$

由 (11),(12),(13 得

$$\lambda R_\lambda R_\mu g = AR_\lambda R_\mu g + R_\mu g = R_\lambda AR_\mu g + R_\mu g = R_\lambda[\mu R_\mu g - g] + R_\mu g,$$

从而

$$R_\lambda R_\mu = \frac{R_\mu - R_\lambda}{\lambda - \mu},$$

故

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda. \tag{14}$$

今证对任意 $f \in B$, 有

$$\mathrm{s}\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R_\lambda f = f. \tag{15}$$

如 $f \in D_A$, 则由 (12),(10) 得

$$\|\lambda R_\lambda f - f\| = \|R_\lambda Af\| \leqslant \frac{\|Af\|}{\lambda}; \tag{16}$$

[1] 仔细考虑下列证明，可见实际上只需引理 1 中 1° 以及对某一列 $\lambda_n \to \infty$, 2°,3° 成立，即可证充分性.

如 $f\in B$, 由 1°, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $f_1\in D_A$, 使 $\|f-f_1\|<\frac{\varepsilon}{3}$. 利用 (10) 及 (16), 对 $\lambda>3\frac{\|Af_1\|}{\varepsilon}$, 有

$$\begin{aligned}\|\lambda R_\lambda f-f\|&\leqslant\|\lambda R_\lambda(f-f_1)\|+\|\lambda R_1 f_1-f_1\|+\|f_1-f\|\\&\leqslant\|f-f_1\|+\frac{\|Af_1\|}{\lambda}+\|f-f_1\|<\varepsilon,\end{aligned}$$

此得证 (15). 今令

$$A_\lambda=\lambda AR_\lambda, \tag{17}$$

由 (11)

$$A_\lambda=\lambda[\lambda R_\lambda-I], \tag{18}$$

故 A_λ 是定义在 B 上的线性算子. 由 (10)

$$\|A_\lambda f\|\leqslant 2\lambda\|f\|. \tag{19}$$

由此知 A_λ 为有界算子. 由 (18) 及 (14)

$$A_\lambda A_\mu=A_\mu A_\lambda. \tag{20}$$

对 $f\in D_A$, 由 (17),(13) 得 $A_\lambda f=\lambda R_\lambda Af$, 由 (15)

$$\mathrm{s}\lim_{\lambda\to\infty}A_\lambda f=Af. \tag{21}$$

(ii) 造半群 $T_t(t\geqslant 0)$.

由上面的例, 知 A_λ 产生半群

$$T_t^\lambda=e^{tA_\lambda}. \tag{22}$$

由 (18) 及 (6)

$$T_t^\lambda=e^{\lambda t[\lambda R_\lambda-I]}=e^{-t\lambda}e^{t\lambda^2R_\lambda}. \tag{23}$$

由 (10) 及显而易见的公式 $\|e^Q\|\leqslant e^{\|Q\|}$ $(Q\in\mathfrak{A})$ 得

$$\|T_t^\lambda\|=\|e^{-t\lambda}e^{t\lambda^2R_\lambda}\|\leqslant e^{-t\lambda}e^{t\lambda^2\|R_\lambda\|}\leqslant 1 \tag{24}$$

由 (22) 及引理 3 得

$$\|T_t^\lambda f-T_t^\mu f\|=\|e^{tA_\lambda}f-e^{tA_\mu}f\|\leqslant t\|A_\lambda f-A_\mu f\|. \tag{25}$$

根据此式及 (21), 可见如 $f\in D_A$, 则存在极限

$$\mathrm{s}\lim_{\lambda\to\infty}T_t^\lambda f=T_t f, \tag{26}$$

并且此收敛对每个有穷区间中的 t 是均匀的. 现在证明 $T_t(t\geqslant 0)$ 产生连续的压缩半群. 由 (24)

$$\|T_t f\|\leqslant\|f\|\quad(f\in D_A). \tag{27}$$

由此及 1° 可拓展 T_t 的定义域为全 B, 使 T_t 在 B 上为一线性有界算子并且满足 (26),(27). 既然对任意 $\lambda > 0$, $T_s^\lambda T_t^\lambda f = T_{s+t}^\lambda f$, 故 $T_s T_t f = T_{s+t} f$, 从而 $T_t(t \geqslant 0)$ 是一压缩半群. 剩下要证此半群的连续性. 显然 $T_0 = I$. 由

$$\|T_t f - f\| \leqslant \|T_t f - T_t^\lambda f\| + \|T_t^\lambda f - f\|,$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 由上述收敛均匀性，可取 λ 相当大，使右方第一项对一切 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 均小于 $\frac{\varepsilon}{2}$. 第二项则由引理 3 及 (19) 不超过 $t\|A_\lambda f\| \leqslant 2\lambda_t\|f\|$. 故可选 δ, $1 > \delta > 0$, 使 $t < \delta$ 时，第二项小于 $\frac{\varepsilon}{2}$ 而 $\|T_t f - f\| < \varepsilon$.

(iii) 证明 $T_t(t \geqslant 0)$ 的无穷小算子 $A_1 = A$.

因为 A_λ 是 $T_t^\lambda(t \geqslant 0)$ 的无穷小算子，由上节 (25)

$$T_t^\lambda f - f = \int_0^t T_s^\lambda A_\lambda f \, ds. \tag{28}$$

如 $f \in D_A$, 则由 (24)

$$\begin{aligned} \|T_s Af - T_s^\lambda A_\lambda f\| &\leqslant \|T_s Af - T_s^\lambda AF\| + \|T_s^\lambda Af - T_s^\lambda A_\lambda f\| \\ &\leqslant \|T_s Af - T_s^\lambda AF\| + \|Af - A_\lambda f\|, \end{aligned}$$

故当 $\lambda \to \infty$ 时， $T_s^\lambda A_\lambda f$ 关于 $s \in [0,t]$ 均匀地强收敛于 $T_s Af$. 于是由 (28) 得

$$T_t f - f = \int_0^t T_s Af \, ds.$$

由 $T_t(t \geqslant 0)$ 的连续性及上节 (7)

$$\mathrm{s}\lim_{t\to 0+} \frac{T_t f - f}{t} = \mathrm{s}\lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} \int_0^t T_s Af \, ds = Af.$$

从而得证 $D_A \subset D_{A_1}$ 而且 $A_1 f = Af (f \in D_A)$. 剩下只要证 $D_{A_1} \subset D_A$. 任取 $f \in D_{A_1}$, 令 $g = \lambda f - A_1 f$. 由 2°, 可考虑方程 $\lambda\varphi - A\varphi = g$ 的解 $\varphi \in D_A$. 由刚才所证 $A\varphi = A_1\varphi$, 故 φ 也满足方程 $\lambda\varphi - A_1\varphi = g$. 既然后者对任一 g 只有一个解，故 $f = \varphi \in D_A$. □

称定理 1 中的 $T_t(t \geqslant 0)$ 为 A**所产生的半群**.

系 1 设 H 为 B 的闭子集，使如 $f_1, f_2 \in H$, 则对任意 $c_1 \geqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$, 有 $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in H$. 如果由 $\lambda f - Af \in H$ 可推得 $f \in H$, 则由 A 所产生的半群 $T_t(t \geqslant 0)$ 保留 H 不变.

证 既然由 $\lambda f - Af \in H$ 可得 $f \in H$, 故 $R_\lambda H \subset H$ (即表 $R_\lambda g \in H$ 对每 $g \in H$ 成立). 由 (23) $T_t^\lambda H \subset H$, 再由 (26), $T_t H \subset H$. □

称算子 A 为算子 G 的**压缩**, 如 $D_A \subset D_G$, 而且对 $f \in D_A$, 有 $Af = Gf$; 此时记 $A \subseteq G$.

定理 2 设 (E, ρ) 为紧距离空间， C 为 (E, ρ) 上全体连续函数所成的空间. 为使 C 中的线性算子 A 是某个随机连续 Feller 函数的无穷小算子的压缩，充分与必要条件是：

a. A 的定义域 D_A 稠于 C;

b. 对每 $g \in C$, 下列方程有解 [1] $f \in D_A$

$$\lambda f - Af = g \quad (\lambda > 0);$$

[1]实际上只需对一列 $\lambda_n \to \infty$, 以下方程有解 $f \in D_A$, 即可证充分性.

c. 如 $f \in D_A$, $f(x_0) \geqslant f(x)$ (一切 $x \in E$), 则 $Af(x_0) \leqslant 0$;

d. $I \in D_A$ 而且 $AI = 0$.

证 必要性: 设 A 是某随机连续 Feller 函数的无穷小算子在 C 中的压缩, 由假设及上节定理 10, $C_0 = C$. 既然 D_A 在 $C_0(\subset B_0)$ 中稠密, 故得 a. 由上节 (27) 得 b. 又因

$$Af(x_0) = \mathrm{s}\lim_{t \to 0+} \frac{\int_E p(t, x_0, dy)[f(y) - f(x_0)]}{t}, \tag{29}$$

可见 c 及 d 成立.

充分性: 先自 a–d 证明引理 1 中的 $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ 成立.

任取 $f \in D_A$, 试证 3° 正确, 有三种情形: 如果对一切 $x \in E$, $f(x) \geqslant 0$, 由 c 得

$$\lambda f(x_0) - Af(x_0) \geqslant \lambda f(x_0) = \max_x \lambda f(x), \tag{30}$$

故

$$\max_x[\lambda f(x) - Af(x)] \geqslant \max_x \lambda f(x); \tag{31}$$

如果对一切 $x \in E$, $f(x) \leqslant 0$, 则对 $-f(x)$ 可用 (31), 故

$$\min_x[\lambda f(x) - Af(x)] \leqslant \min_x \lambda f(x); \tag{32}$$

如果 $f(x)$ 既取正值, 又取负值, 则 $f(x_0) \geqslant 0$. 由 c, (30) 成立, 故 (31) 也成立. 对 $-f(x)$ 同样讨论知 (32) 也满足. 因此, 不论在哪种情况, 总使 3° 成立. 由于在目前情况, 条件 $1^\circ, 2^\circ$ 与 a,b 重合, (视 C 为那里的 B), 故由定理 1, A 是某个在 C 中连续的压缩半群 $T_t(t \geqslant 0)$ 的无穷小算子.

以 H 表 C 中全体非负函数之集. 由上可见, 如 $f \in H$, 则 (32) 满足, 故 $\lambda f - Af \in H$. 由系 1, 知 $T_t(t \geqslant 0)$ 保留 H 不变.

对固定的 t 及 x, $T_t f(x)$ 是 C 上的线性泛函, 在 H 上取非负值. 由线性泛函的表现定理, 知

$$T_t f(x) = \int_E p(t, x, dy) f(y), \tag{33}$$

其中 $p(t, x, \Gamma)$ 当 t, x 固定时是 $\mathcal{B}$ 上的测度. 由 $\|T_t f\| \leqslant \|f\|$ 知 $p(t, x, E) \leqslant 1$. 由半群 $T_t(t \geqslant 0)$ 的连续性知 $p(0, x, E - \{x\}) = 0$. 故为证 $p(t, x, \Gamma)$ 是转移函数, 只须证明 $p(t, x, \Gamma)$ 对 x 的 $\mathcal{B}$ 可测性, $p(t, x, E) = 1$ 及 Колмогоров-Chapman 方程成立.

以 L 表如下函数 f 的集:

α. 对任意固定 $t \geqslant 0$, $\int_E p(t, x, dy) f(y)$ 是 x 的 $\mathcal{B}$ 可测函数;

β. 对任意固定 $s, t \geqslant 0$, $x \in E$

$$\int_E \left[p(s, x, dy) \int_E p(t, y, dz) f(z) \right] = \int_E p(s + t, x, dz) f(z).$$

又令 $\mathcal{L} = B$ (有界可测函数集), 则 L 是一 $\mathcal{L}$- 系. 由 $T_t(t \geqslant 0)$ 的性质知 $L \supset C$, 由附篇引理 8, $L = B$. 令 $f(x) = \chi_\Gamma(x)$, 即得证 $p(t, x, \Gamma)$ 对 x 为 $\mathcal{B}$ 可测且满足上述方程. 由 d 及

上节 (25) $T_tI-I=\int_0^t T_sAI\,ds=0$, 得 $p(t,x,E)=1$. 故得证 $p(t,x,\Gamma)$ 是齐次转移函数，它由 (33) 所产生的半群保留 C 不变，故是 Feller 函数，它的无穷小算子在 C 中的压缩显然是 A.

既然 $C\subset B_0$, 由上节定理 1, $p(t,x,\Gamma)$ 随机连续. □

§4.5 补充与习题

1. 试证马氏性等价于下列任一条件：

(A) 对任意 $s\leqslant t\leqslant u,\ s,t,u\in T,\ A\in\mathcal{B}$

$$P(x_u\in A|\,\mathcal{N}_t^s)=P(x_u\in A|\,x_t)\ \ \text{(a.s.)}.$$

(B) 对任意 $t\in T$, 如 $\xi(\omega)$ 为 $\mathcal{N}_t$ 可测，$\eta(\omega)$ 为 $\mathcal{N}^t$ 可测，$E|\xi|<\infty, E|\eta|<\infty, E|\xi\eta|<\infty$, 则

$$E(\xi\eta|\,x_t)=E(\xi|\,x_t)E(\eta|\,x_t)\ \ \text{(a.s.)}.$$

提示：利用条件期望的性质 F 与 H 等. 例如，由马氏性可得

$$\begin{aligned}E(\xi|\,x_t)E(\eta|\,x_t)&=E[\xi E(\eta|\,x_t)]=E[\xi E(\eta|\,\mathcal{N}_t)|\,x_t]\\&=E[E(\xi\eta|\,\mathcal{N}_t)|\,x_t]=E(\xi\eta|\,x_t)\ \ \text{(a.s.)}.\end{aligned}$$

2. 称四元函数 $p(s,x;t,A)$ 为 **广转移函数**($s\leqslant t,s,t\in T,A\in\mathcal{B}$), 如果它满足转移函数定义中的条件 B,D 及下列

A$'$. 对固定的 s,x,t, 它关于 A 是 $\mathcal{B}$ 上的测度，而且 $p(s,x;t,,E)\leqslant 1$,

C$'$. $p(s,x;s,E-\{x\})=0$.

广转移函数经扩大相空间 $(E,\mathcal{B})$ 后，可化为转移函数. 为此，任取一不属于 E 的点 a, 令 $\widetilde{E}=E\cup\{a\}$. 定义 $\widetilde{E}$ 中 σ 代数 $\widetilde{\mathcal{B}}$: 对 $\widetilde{E}$ 中子集 A, 如 $AE\in\mathcal{B}$, 则令 $A\in\widetilde{\mathcal{B}}$. 于是得一扩大的可测空间 $(\widetilde{E},\widetilde{\mathcal{B}})$. 其中定义函数

$$\widetilde{p}(s,x;t,\Gamma)=\begin{cases}p(s,x;t,\Gamma E)+\chi_\Gamma(a)[1-p(s,x;t,E)], & \text{如}x\neq a,\\ \chi_\Gamma(a), & \text{如}x=a.\end{cases}$$

易见 $\widetilde{p}(s,x;t,\Gamma)$ 满足 A–D, 因而是 $(\widetilde{E},\widetilde{\mathcal{B}})$ 上的转移函数. 如 $T=[0,\infty)$, 则必存在以 $\widetilde{p}(s,x;t,\Gamma)$ 为转移概率的马氏过程 $x(t,\omega),t\geqslant 0$.

广转移函数可直观地如下解释：对任意的 $x\in E,A\in\mathcal{B}$, $p(s,x;t,A)$ 为沿上述 $x(t,\omega)(t\geqslant 0)$ 的轨道而运动的质点，于 s 时位于 x 的条件下，直到时刻 t 以前未到过 a, 并于 t 时位于 A 中的概率. 如质点一旦到达 a, 则以后永远停留于 a. 因此，初次到达 a 的时刻 $\zeta(\omega)$ 可看成为随机运动的停止时间.

考虑到运动的一般停止时间，同时将 “过去” 的概念一般化 (即将 σ 代数 $\mathcal{N}_t$) 换为满足某些条件的 σ 代数 $\mathcal{M}_t$), 便产生一般的规则马氏过程的定义. 详见 Е. Б. Дынкин 的书 [5], 第二章.

3. 正文中用到下列 Laplace 变换的唯一性定理.

定理 设 $\varphi(t)(t\geqslant 0)$ 为有界连续函数，而且对一切 $\lambda>0$, 有

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(t)\,dt=0.$$

于是 $\varphi(t) \equiv 0$, 一切 $t \geqslant 0$.

证 由上式得 $\int_0^\infty e^{-nt}\varphi(t)\,dt = 0$, $n = 1, 2, \cdots$. 令 $z = e^{-t}$ 得

$$\int_0^1 z^{n-1}\psi(z)\,dz = 0, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{1}$$

其中 $\psi(z) = \varphi(-\ln z)$ $(0 < z \leqslant 1)$. 函数

$$\psi_n(z) = \begin{cases} \psi(z), & \text{如} 1 \geqslant z \geqslant \dfrac{1}{n}, \\ \psi\Big(\dfrac{1}{n}\Big), & \text{如} \dfrac{1}{n} \geqslant z \geqslant 0 \end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上连续. 按 Weierstrass 定理，存在多项式 $p_n(z)$, 使 $\sup\limits_{0\leqslant z\leqslant 1} |p_n(z) - \psi_n(z)| < \frac{1}{n}$. 易见当 $n \to \infty$ 时, $p_n(z) \to \psi(z)$ $(z \in (0,1])$, 而且一切 $p_n(z)$ 在 $[0,1]$ 上均匀有界. 由 (1), $\int_0^1 p_n(z)\psi(z)\,dz = 0$. 令 $n \to \infty$, 即得 $\int_0^1 \psi(z)^2 dz = 0$. 故对一切 $z \in (0,1]$, $\psi(z) = 0$, 于是对一切 t, $0 \leqslant t < \infty$, $\varphi(t) \equiv 0$. □

4. 试证齐次马氏过程 $\{x_t(\omega), t \in T\}$ 的参数集 T 如果是可列集，则它是强马氏过程.

提示：此时不依赖于将来的随机变量最多只能取可列个不同的值，故证明与 §4.2(40) 之证完全类似.

5. 设 τ 是不依赖于将来的随机变量. 如 $\tau' \geqslant \tau$ 而且 $\tau'(\omega) = f(\tau(\omega))$, $f(x)$ 是某 Borel 可测函数，则 τ' 也不依赖于将来.

提示: $(\omega : f(\tau(\omega)) \leqslant s) = (\omega : \tau(\omega) \leqslant s, f(\tau(\omega)) \leqslant s) = (\omega : \tau(\omega) \in f^{-1}(s) \cap [0, s])$, 其中 $f^{-1}(s) = (x : f(x) \leqslant s) \in \mathcal{B}_1$. 故 $(\omega : f(\tau(\omega)) \leqslant s) \in \mathcal{N}_s$.

6. 设 $E = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$ 为只含 $n+1$ 个点之集, $\mathcal{B}$ 为 E 中一切子集所成 σ 代数, $\rho(i,j) = 0$, $i = j$; $= 1$, $i \neq j$, 因而每一集都是开集. 设 $\{p_{ij}(t)\}$ 为 E 上的转移函数，而且满足条件

$$p_{ij}(t) \to p_{ij}(0) = \delta_{ij} \quad (t \to 0+). \tag{2}$$

在条件 (2) 下，以后可以证明 [1]，存在极限

$$q_{ij} = \lim_{t\to 0+} \frac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t}, \tag{3}$$

而且

$$q_{ij} \geqslant 0 \ (i \neq j); \quad \sum_{j=0}^{n} q_{ij} = 0. \tag{4}$$

在上述条件下，试证：

1° $B = C$, $B = \{f\}$, $f = (f_0, \cdots, f_n)$ 为 $n+1$ 维实矢量；因而转移函数是 Feller 的；

2° $D_A = C$, 而且 A 重合于矩阵算子 $Q = (q_{ij})$.

3° 此半群为 A 唯一决定；又 $A = \widetilde{A}$.

4° 反之，设已给矩阵 Q, 满足 (4), 则它必是某个随机连续的转移函数的无穷小算子.

[1] 见 §6.1 定理 1 及定理 2.

提示： $1^\circ--3^\circ$ 均易证明．为证 4° 要用 §4.4 定理 2. 那里的条件 a,d 显然满足．为证 c, 设矢量 f 的最大分量为 f_{i_0}, 则

$$Af(i_0) = q_{i_0i_0}f_{i_0} + \sum_{j\neq i_0} q_{i_0j}f_j \leqslant q_{i_0i_0}f_{i_0} + f_{i_0}\sum_{j\neq i_0} q_{i_0j} = 0.$$

为证 b, 利用其下的注．当 $\lambda > \|Q\|$, 解为

$$f = \lambda^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{Q}{\lambda}\right)^n\right]g.$$

7. 重复上题 6 中的叙述到 (3) 式，只是 E 改为 $\{0,1,2,\cdots\}$. 此外我们还假定

$$\sum_{i\neq j} q_{ij} = -q_{ii} < \infty; \tag{5}$$

但

$$q_{ij} \geqslant 0 \ \ (i\neq j) \tag{6}$$

则是必然的．这时由于空间缺乏紧性而使问题复杂化．一般地 $D_A = B$ 不成立．试证如 $f\in D_A$, 则 $Af = Qf$; 对 $f \in D_{\widetilde{A}}$ 亦如此．

提示：以 F 表只有有穷多个分量不为 0 的矢量 f 的集，则 $F\subset D_{\widetilde{A}}$. 特别考虑 j- 单位矢量 $f^{(j)}$, 它的第 j 个分量为 1, 其它分量为 0, $j=0,1,2,\cdots$.

8. 如果转移函数具有形状

$$p(t,x,A) = \int_A \widetilde{p}(t,x,y)\mu(dy), \tag{7}$$

其中 $\widetilde{p}(t,x,y)$ 是 (x,y) 的 $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ 可测函数，而 $\mu(A)$ 是 $\mathcal{B}$ 上的有穷测度，又设 $p(t,x,A)$ 对 (t,x) 可测，则对 $g\in B_0$, 有

$$R_\lambda g(x) = \int_E q_\lambda(x,y)g(y)\mu(dy), \tag{8}$$

其中

$$q_\lambda(x,y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\widetilde{p}(t,x,y)\,dt. \tag{9}$$

提示：利用 $R_\lambda g(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\int_E p(t,x,dy)g(y)\right]dt$, 改变积分次序．

9. 对 Wiener 转移函数

$$p(t,x,A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_A e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}\,dy, \tag{10}$$

试证： 1° $B_0\subseteq C$; 2° $Af(x) = \frac{1}{2}f''(x)$, $D_A = (f: f\in C^0, f''\in C^0)$, 其中 C^0 表全体有界均匀连续函数的集． 3° $p(t,x,A)$ 是 Feller 转移函数； $\widetilde{A}_C f = \frac{1}{2}f''$, 而且 $D_{\widetilde{A}_C} = \{f: f\in C, f''\in C\}$.

解:

$$q_\lambda(x,y)=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-(x-y)^2/(2t)}e^{-\lambda t}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}e^{-|y-x|\sqrt{2\lambda}},$$

$$R_\lambda g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\left\{e^{-x\sqrt{2\lambda}}\int_{-\infty}^{x} e^{y\sqrt{2\lambda}}g(y)\,dy+e^{x\sqrt{2\lambda}}\int_x^\infty e^{-y\sqrt{2\lambda}}g(y)\,dy\right\},\tag{11}$$

由此知 $R_\lambda B\subset C$, $D_A=R_\lambda B_0\subset C$. 由 §4.3 引理 1(iii) 及 C 的闭性知 $B_0\subseteq C$. 如 $g\in C$, 由计算可知函数 $f=R_\lambda g$ 二次可导而且

$$f'(x)=-e^{-x\sqrt{2\lambda}}\int_{-\infty}^{x} e^{y\sqrt{2\lambda}}g(y)\,dy+e^{x\sqrt{2\lambda}}\int_x^\infty e^{-y\sqrt{2\lambda}}g(y)\,dy.\tag{12}$$

$$\frac{1}{2}f''(x)=\lambda f(x)-g(x),\tag{13}$$

由此及 §4.3 定理 2 知如 $f\in D_A$, 则

$$Af(x)=\frac{1}{2}f''(x).\tag{14}$$

由 (12) 知如 $f\in D_A$, 则 $f'(x)\in C$, 故 $f\in C^0$. 根据 §4.3 引理 1(iii) $B_0\subset C^0$, 再由此引理 (iv),$Af\in B_0\subset C^0$. 于是由 (14) 知 $f''\in C^0$. 反之, 如 $f\in C^0, f''\in C^0$, 则

$$\begin{aligned}&\frac{T_tf(x)-f(x)}{t}-\frac{1}{2}f''(x)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-z^2/(2t)}\left[f(z+x)-f(x)-zf'(x)-\frac{1}{2}z^2f''(x)\right]\frac{dz}{t}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t\sqrt{2\pi t}}[f''(x+\theta z)-f''(x)]\frac{z^2}{2}e^{-z^2/(2t)}dz\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^2}{2\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}[f''(x+\theta u\sqrt{t})-f''(x)]du\ \ \left(u=\frac{z}{\sqrt{t}}\right).\end{aligned}\tag{15}$$

从而 $\lim\limits_{t\to0+}\left\|\dfrac{T_tf-f}{t}-\dfrac{1}{2}f''\right\|=0$. 此得证 2°.

记 $K_t(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-x^2/2t}$, 对 $x_0\in R_1$ 及 $f\in C$

$$\begin{aligned}&\int_E f(y)K_t(y-x)\,dy=\int_E f(y+x)K_t(y)\,dy\\&\to\int_E f(y+x_0)K_t(y)\,dy=\int_E f(y)K_t(y-x_0)\,dy\ (x\to x_0).\end{aligned}$$

故得证 Feller 性. 试求 $\widetilde{A}_C$ 及 $D_{\widetilde{A}_C}$. 由 §4.3 定理 9, $C=\widetilde{C}_0$, 故 $D_{\widetilde{A}_C}=\widetilde{R}_\lambda C$. 由上述可知此集中任一函数 $f=\widetilde{R}_\lambda g(g\in C)$ 二次可导而且导数由 (13) 给出. 将 (13) 与 $\widetilde{A}f=\lambda f-g$ 对比, 知如 $f\in D_{\widetilde{A}_C}$, 则 $\widetilde{A}_Cf=\frac{1}{2}f''$, 故 $f''\in C$. 反之, 如 $f\in C$, $f''\in C$, 由 (15) 易见 $f\in D_{\widetilde{A}_C}$. □

10. 对 Poisson 转移函数

$$p_{ij}(t)=\begin{cases}e^{-\lambda t}(\lambda t)^{j-i}/(j-i)! & (j\geqslant i),\\ 0, & (j<i),\end{cases}\tag{16}$$

试证 $D_A=B$, $\widetilde{A}=A$. 又 $A=Q=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda & & 0\\ & -\lambda & \lambda & \\ 0 & & \ddots & \ddots\end{pmatrix}$.

提示：参看题 7 并利用 (16).

11. 试证如随机过程 $\{x_t(\omega),t\geqslant 0\}$ 满足

$$P(x(t,\omega)=vt)=1\quad(t\in[0,\infty),v\geqslant 0),\tag{17}$$

则它是齐次马氏过程. 求出它的转移函数， $A,\widetilde{A}$ 的表达式及 $D_A,D_{\widetilde{A}}$.

解: 造转移函数

$$p(s,x;t,A)=\chi_A(x+(t-s)v).$$

显然这是齐次转移函数，令 $p(t,x,A)=\chi_A(x+vt)$, 则

$$\begin{aligned}&P(x_{t_1}=vt_1,\cdots,x_{t_n}=vt_n)\\&\quad=p(t_1,0,\{vt_1\})\cdot p((t_2-t_1),vt_1,\{vt_2\})\cdots p((t_n-t_{n-1}),vt_{n-1},\{vt_n\}).\end{aligned}$$

由此即知 $\{x_t(\omega),t\geqslant 0\}$ 是齐次马氏过程. 直观上说，它描写速度为 v 的决定性运动.

由于 $T_tg(x)=g(x+vt)$, 如 $v=0$, 则 $T_tg(x)=g(x)$ 而问题是平凡的. 故以下设 $v>0$, 易得

$$R_\lambda g(x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_tg(x)\,dt=\frac{1}{v}e^{\frac{\lambda}{v}x}\int_x^\infty g(y)e^{-\frac{\lambda}{v}y}\,dy.\tag{18}$$

由此可证 $Af(x)=vf'(x)$; $D_A=(f:f\in C^0,\ f'\in C^0)$, C^0 表全体有界均匀连续函数集.

实际上，由 (18) 知 $R_\lambda(B)\subset C$, 故 $D_A=R_\lambda(B_0)\subset C$, 由 D_A 在 B_0 之稠性得 $B_0\subset C$. 其次，如 $g\in C$, 由 (18) 知函数 $f(x)=R_\lambda g(x)$ 可导而且

$$vf'(x)=\lambda f(x)-g(x)\in C.\tag{19}$$

故如 $f\in D_A$, 则

$$Af=\lambda f-g=vf'.\tag{20}$$

为求 D_A, 由 (19),(20) 已知当 $f\in D_A$ 时， $f'\in C$, 故 $f\in C^0$ 从而由 D_A 在 B_0 之稠性 $B_0\subset C^0$. 于是 $Af\in B_0\subset C^0$, 由 (20) 得 $f'\in C^0$. 今设 $f\in C^0$, $f'\in C^0$. 于是

$$\begin{aligned}\frac{T_tf-f}{t}-vf'&=\frac{f(x+vt)-f(x)}{t}-vf'(x)\\&=vf'(x+\theta vt)-vf'(x),\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.\end{aligned}$$

从而

$$\left\|\frac{T_tf-f}{t}-vf'\right\|\leqslant\sup_{0\leqslant h\leqslant vt}v|f'(x+h)-f'(x)|\to 0.$$

类似可证

$$\widetilde{A}f(x)=vf^+(x)\quad(f\in D_{\widetilde{A}}).$$

$$D_{\widetilde{A}}=(f:f\in C,\ f\text{有有界的右连续的右导数}).$$

实际上，由 $T_tg(x)=g(x+vt)$ 易见 $\widetilde{B}_0=C'\equiv(f:\ f$ 有界右连续). 由 (18), 如 $g\in C'$, 则 $f=R_\lambda g$ 有右导数而且

$$vf^+(x)=\lambda f(x)-g(x)\ \ (f^+\text{表右导数}).$$

故 $\widetilde{A}f(x)=vf^+(x)\ (f\in D_{\widetilde{A}})$. 如 $f\in D_{\widetilde{A}}$, 则由 $D_{\widetilde{A}}\subset B_0$ 得 $f\in C$. 再者 $\widetilde{A}f\in\widetilde{B}_0$, 故由上式 $f^+\in C'$. 反之，如 $f\in C, f^+\in C'$, 则

$$\frac{T_tf(x)-f(x)}{t}=\frac{f(x+vt)-f(x)}{t}\to vf^+(x),$$

利用下列事实：如函数 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 连续，而且右导数 $F^+(t)$ 存在并界于二常数 c_1,c_2 之间，则

$$c_1\leqslant\frac{F(b)-F(a)}{b-a}\leqslant c_2.$$

由此知当 $t\downarrow 0$ 时，$\left\|\frac{T_tf-f}{t}\right\|$ 有界，因而

$$\frac{T_tf-f}{t}\xrightarrow{w}vf^+.\ \square$$

12. §4.1 例 2,3 的一般化如下：

设 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 为随机过程，相空间为 $(E,\mathcal{B})$. 如对任一对 $s,t\in T$, $s<t$, 有

$$x_t(\omega)=f(x_s(\omega),Y(\omega)),$$

其中 f 为 $\mathcal{B}\times\mathcal{B}-\mathcal{B}$ 可测函数，$Y(\omega)$ (与 s,t 有关) 为与 $\{x_u(\omega),u\in T,u\leqslant s\}$ 独立的随机变量. 于是 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 是马氏过程.

证 任取 $s_1<s_2<\cdots<s_n<s$, $s_i\in T$, 只要证

$$P(f(x_s,Y)\in A,B)=\int_B P(f(x_s,Y)\in A|\,x_s)P(d\omega), \tag{21}$$

对任意 $A\in\mathcal{B}$ 及 $B\in\mathcal{F}\{x_{s_1},\cdots,x_{s_n},x_s\}$ 成立. 因 $f^{-1}(A)\equiv\{(x,y):f(x,y)\in A\}\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}$, 故只要证对任意 $\Pi\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}$, 有

$$P((x_s,Y)\in\Pi,B)=\int_B P((x_s,Y)\in\Pi|\,x_s)P(d\omega). \tag{22}$$

先考虑形为 $A_1\times A_2$ 的 Π, 利用 Y 对 x_s 的独立性，上式化为

$$P(x_s\in A_1,Y\in A_2,B)=\int_B P(Y\in A_2)\chi_{(x_s\in A_1)}P(d\omega), \tag{23}$$

如 $B=(x_{s_1}\in C_1,\cdots,x_{s_n}\in C_n,x_s\in C)$, 由假设中 Y 的独立性，知 (22) 的确成立，利用 λ-系方法，即知 (22) 对一切 $B\in\mathcal{F}\{x_{s_1},\cdots,x_{s_n},x_s\}$ 成立. 再用一次 λ- 系方法，便得证 (21) (利用此题，容易重新证明 §4.1 例 2 与例 3). $\square$

注 此题还可如下一般化：如对任一对 $s,t\in T$, $s<t$, 有

$$x_t(\omega)=f(x_s(\omega),y_1(\omega),y_2(\omega),\cdots),$$

其中 f 为 $\mathcal{B}^\infty-\mathcal{B}$ 可测函数，$y_i(\omega)(i=1,2,\cdots)$ 是与 $\{x_u(\omega),u\in T,u\leqslant s\}$ 独立的随机变量，则 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 是马氏过程.

证明除记号上的改变外，其它完全一样.

13. 设对 $t\geqslant 0$, 函数 $F(t)$ 连续而且有连续的右导数 $\frac{d^+F(t)}{dt}$, 则导数 $\frac{dF(t)}{dt}$ 存在，又 $\frac{dF(t)}{dt}=\frac{d^+F(t)}{dt}$.

实际上，令 $h(t)=\int_0^t\frac{d^+F(s)}{ds}ds$, 则 $\frac{dh(t)}{dt}=\frac{d^+F(t)}{dt}$, 于是结论由下列事实推出：连续函数 $F(t)-h(t)$ 的右导数如为 0, 则它必是常数因而有恒等于 0 的导数. 此事实的证明可仿 §5.2 引理 8.

14. 设 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 是定义在 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上而取值于可测空间 $(E,\mathcal{B})$ 中的随机过程，试证它是规则马氏过程的充要条件是：存在 $(E,\mathcal{B})$ 中的转移函数 $p(s,x;t,\Gamma)$, 使对任意 $s\in T,t\in T,s<t$, 任意 $\Gamma\in\mathcal{B}$, 有

$$P(x_t\in\Gamma|\,\mathcal{N}_s)=p(s,x_s;t,\Gamma),\quad (P-\text{a.s.}). \tag{24}$$

证 需要证明 (24) 与 §4.2(9) 等价. 设 §4.2(9) 成立，由 §4.2 中 (10),(12) 易得上面的 (24). 反之，设 (24) 正确，因而对任意 $A\in\mathcal{N}_s$, 有

$$P(A,x_t\in\Gamma)=\int_A p(s,x_s;t,\Gamma)P(d\omega). \tag{25}$$

今取 $s=t_0,t=t_1,A=(x_{t_0}\in\Gamma_0),\Gamma=\Gamma_1$, 由 (25) 及积分变换定理，得

$$\begin{aligned}P(x_{t_0}\in\Gamma_0,x_{t_1}\in\Gamma_1)&=\int_{(x_{t_0}\in\Gamma_0)}p(t_0,x_{t_0};t_1,\Gamma_1)P(d\omega)\\&=\int_{\Gamma_0}p(t_0,\xi_0;t_1,\Gamma_1)P_{t_0}(d\xi_0),\end{aligned}$$

其中 $P_{t_0}(\Gamma)=P(x_{t_0}\in\Gamma)$, 故 (9) 式当 $n=1$ 成立. 今设 (9) 式对正整数 n 成立，在 (25) 中取 $A=(x_{t_0}\in\Gamma_0,\cdots,x_{t_n}\in\Gamma_n)$, $s=t_n,t=t_{n+1},\Gamma=\Gamma_{n+1}$, 得

$$\begin{aligned}&P(x_{t_0}\in\Gamma_0,\cdots,x_{t_n}\in\Gamma_n,x_{t_{n+1}}\in\Gamma_{n+1})\\&=\int_{(x_{t_0}\in\Gamma_0,\cdots,x_{t_n}\in\Gamma_n)}p(t_n,x_{t_n};t_{n+1},\Gamma_{n+1})P(d\omega)\\&=\int_{\Gamma_n}p(t_n,\xi_n;t_{n+1},\Gamma_{n+1})P_{t_n}(d\xi_n),\end{aligned} \tag{26}$$

其中

$$P_{t_n}(\Gamma)=P(x_{t_0}\in\Gamma_0,\cdots,x_{t_n}\in\Gamma).$$

利用归纳法前题：(9) 式对 n 成立，得

$$P_{t_n}(\Gamma)=\int_{\Gamma_0}P_{t_0}(d\xi_0)\int_{\Gamma_1}p(t_0,\xi_0;t_1,d\xi_1)\cdots\int_{\Gamma}p(t_{n-1},\xi_{n-1};t_n,d\xi_n),$$

以此代入 (26), 并用附篇引理 9 改变积分次序后，即得证 (9) 式对 $n+1$ 成立. □

附记. 马氏过程有许多种不同的定义，其中重要的三种分别见 [16],[3],[5]. 本书 §4.1,§4.2 把这三种定义联系起来，以便于了解其间关系和阅读专著，得到了 "马氏过程","规则马氏过程","标准马氏过程" 三个概念，它们分别相当于 [16],[3],[5] 中的三种 "马氏过程" 的定义 (参看 §4.5 第 14 题).§4.2 中强马氏过程的定义属于 Дынкин 与 Юшкевич 叙述的方式采自 [3], 一般的 (未必齐次) 马氏过程的强马氏性的研究见 [5] 第五章及其所引文献. 马氏过程与半群理论的更一般叙述见 [21] 及 [6]. 对于标准马氏过程，重要的是测度 $P_{s,x}$ 而非原来的测度 P, 因而有些作者的马氏过程定义中 (例如 [5]), 干脆不引进 P 而直接从给定的 $P_{s,x}$ 出发. 当今一重要研究方向是多参数马氏过程，其中 "时间" t 是多维的，例如多参数布朗运动与多参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程，参见 [9-12].

参 考 文 献

[1] 王梓坤，马尔科夫过程的零一律，数学学报， **15**: 3 (1965), 342-353.

[2] 邓永录，一类拓朴可测空间，中山大学学报 (自然科学), **1–2** (1963), 21–27.

[3] 司徒荣， $\check{C}^J, \widehat{C}^J$ 函数类与强马氏过程，中山大学学报 (自然科学), **2** (1964), 137–152.

[4] 郑曾同，测度的弱收敛与强马氏过程，数学学报， **11**: 2 (1961), 126–132.

[5] 梁之舜， Об условных марковских процессах, Теория Вероятностей и её применения, **5**: 2(1960), 227–228.

[6] 梁之舜， Инвариантность строго марковского свойства при преобразовахия Дынкина, Теория вероятностей и её применения, 6: 2 (1961), 228–231.

[7] 梁之舜， Интегральное представление одного класса эксцессивных случайных величин, Вестник московского университета, Серии 1 (1961), 36-37.

[8] 戴永隆，关于马氏过程定义的几点注记，中山大学学报 (自然科学), **1–2** (1963), 12–20.

[9] 施仁杰，多指标随机过程，西安电子科技大学学报， 15 卷 3 期， (1988), 112–120.

[10] 王梓坤，二参数正态过程的马尔科夫性，科学通报， 15, (1992), 1345–1347.

[11] Wang Zikun (王梓坤),Two-parameter Ornstein-Uhlenbeck processes, Acta Mathematica Scientia, 4:1,(1984), 1–12.

[12] Wang Zikun (王梓坤), Transition probabilities and predication for two-parameter Ornstein-Uhlenbeck processes, Kexue Tongbao (科学通报), 33:1 (1988), 5–9.

第五章　连续型马尔科夫过程

§5.1　右连续 Feller 过程的广无穷小算子

上章中已证明右连续 Feller 过程是强马氏过程．试进一步研究这类过程．从方法上看，§5.1 与 §5.2 中所用的是 §4.3 中所述二种方法的联合运用．本节中设相空间 $(E,\mathcal{B})$ 为距离可测空间，$T=[0,\infty)$, 过程是齐次的，并简写 $P_{0,x}$ 及 $E_{0,x}$ 为 P_x 及 E_x.

(一) 先研究右连续马氏过程.

引理 1　右连续马氏过程 $\{x(t,\omega),t\geqslant 0\}$ 的转移函数是随机连续的.

证　任取 $x\in E$ 及含 x 的开集 G, 设 $h_n>0,h_n\to 0$, 由右连续性有

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\{x(0,\omega)=x,\ \ x(h_n,\omega)\in\overline{G}\}=\phi,$$

$$\begin{aligned}p(h_m,x,\overline{G})&=P_x(x(0,\omega)=x,\ \ x(h_m,\omega)\overline{\in}G)\\&\leqslant P_x\left(\bigcup_{n=m}^{\infty}[x(0,\omega)=x,\ \ x(h_n,\omega)\overline{\in}G]\right)\to 0\ \ (m\to\infty),\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{h\to 0}\ p(h,x,G)=1\ \square$$

由 §4.3 定理 8, 已知右连续马氏过程的转移概率既为其强也为其弱无穷小算子 A 与 $\widetilde{A}$ 所唯一决定．回忆如 $f\in D_{\widetilde{A}}$ 则

$$\begin{aligned}\widetilde{A}f(x)&=w\lim_{t\to 0}\ \frac{T_tf(x)-f(x)}{t}=w\lim_{t\to 0}\ \frac{1}{t}\left[\int_E p(t,x,dy)f(y)-f(x)\right]\\&=w\lim_{t\to 0}\ \frac{E_xf(x(t))-f(x)}{t}\ \ (t>0).\end{aligned}$$

下面证明，对右连续强马氏过程，上式中的 t 可换为不依赖于将来的随机变量 (也称这类变量为 **马氏时间**)τ_U,(详见下面的定理 2), 在某些情形下，常常有利于计算 $\widetilde{A}f(x)$. 为此，先证定理 1, 它类似于微积分学中的基本定理，也是沟通上述两种方法的桥梁.

定理 1　设 $\{x(t,\omega),t\geqslant 0\}$ 是强马氏过程，$\tau(\omega)$ 为马氏时间，$E_x\tau<\infty$, 则对 $f\in D_{\widetilde{A}}$, 有

$$E_xf[x(\tau)]-f(x)=E_x\int_0^{\tau}\widetilde{A}f(x(t))dt. \tag{1}$$

证　令 $h_\lambda=\lambda f-\widetilde{A}f,\lambda>0$. 由 §4.3 定理 5, 在 $\widetilde{B_0}$ 上，$\widetilde{R_\lambda}$ 重合于 $(\lambda 1-\widetilde{A})^{-1}$, 因 $h_\lambda\in\widetilde{B_0}$, 故

$$f=(\lambda 1-\widetilde{A})^{-1}h_\lambda=\widetilde{R_\lambda}h_\lambda,$$

亦即

$$f(x)=\int_0^\infty\int_\Omega e^{-\lambda t}h_\lambda(x(t,\omega))P_x(d\omega)dt=\int_\Omega\int_0^\infty e^{-\lambda t}h_\lambda(x(t,\omega))dtP_x(d\omega)$$
$$=E_x\int_0^\infty e^{-\lambda t}h_\lambda(x(t))dt. \tag{2}$$

这里积分可改变次序是因为被积函数可测，而且绝对可积 (注意 $\{x(t,\omega),t\geqslant 0\}$ 强可测；又 $h_\lambda\in\widetilde{B_0}\subset B$, 故有界). 因此

$$f(x)=E_x\int_0^\tau e^{-\lambda t}h_\lambda(x(t))dt+E_x\int_\tau^\infty e^{-\lambda t}h_\lambda(x(t))dt. \tag{3}$$

但后一积分经改变自变量后得

$$E_x\int_\tau^\infty e^{-\lambda t}h_\lambda(x(t))dt=E_xe^{-\lambda\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda s}h_\lambda(x(s+\tau))ds$$
$$=E_x\Big\{E_x\Big[e^{-\lambda\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda s}h_\lambda(x(s+\tau))ds|\mathcal{N}_\tau\Big]\Big\}, \tag{4}$$

因 $e^{-\lambda\tau}$ 关于 $\mathcal{N}_\tau^0$ 可测，并由强马氏性得上式

$$=E_x\Big\{e^{-\lambda\tau}E_x\Big[\int_0^\infty e^{-\lambda s}h_\lambda(x(s+\tau))ds|\mathcal{N}_\tau\Big]\Big\}$$
$$=E_x\Big\{e^{-\lambda\tau}E_{x(\tau)}\int_0^\infty e^{-\lambda s}h_\lambda(x(s))ds\Big\}=E_xe^{-\lambda\tau}f(x(\tau)). \tag{5}$$

综合 (3)-(5) 得

$$E_xe^{-\lambda\tau}f(x(\tau))-f(x)=-E_x\int_0^\tau e^{-\lambda t}h_\lambda(x(t))dt. \tag{6}$$

令 $\lambda\to 0+$, 由 f 的有界性

$$E_xe^{-\lambda\tau}f(x(\tau))\to E_xf(x(\tau)),$$

又因

$$E_x\int_0^\tau e^{-\lambda t}h_\lambda(x(t))dt=E_x\int_0^\tau e^{-\lambda t}\lambda f(x(t))dt-E_x\int_0^\tau e^{-\lambda t}\widetilde{A}f(x(t))dt;$$

因 $\widetilde{A}f(x)$ 有界，右方后一项趋于 $E_x\int_0^\tau\widetilde{A}f(x(t))dt$, 而前一项的绝对值则不超过 $cE_x(1-e^{-\lambda\tau})\leqslant c\lambda E_x\tau\to 0$, 这里 $c=\|f\|$. 故由 (6), 得

$$E_xf(x(\tau))-f(x)=E_x\int_0^\tau\widetilde{A}f(x(t))dt.\quad\square$$

今设 U 为 E 中任一开集，以 $\rho(x,y)$ 表点 $x,y\in E$ 间的距离， $X_v^u(\omega)$ 表 E 中子集 $(x(s,\omega),u\leqslant s\leqslant v)$, 此集与 ω 有关，当 $\omega\in\Omega$ 固定时，它是样本函数自 u 到 v 所经的状态. 定义

$$\tau_U(\omega)=\inf(t:\rho(X_t^0(\omega),E\backslash U)=0). \tag{7}$$

如右方括号中集为空集，则令 $\tau_U(\omega)=\infty$.

试证 $\tau_U(\omega)$ 为马氏时间，令

$$U_n = \left(x : x \in E, \rho(x, E\backslash U) < \frac{1}{n}\right),$$

则 $U_n \downarrow E\backslash U$, 以 r 表有理数，由过程的右连续性有 [1]

$$(\tau_U(\omega) \leqslant t) = \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{r<t} (x(r, \omega) \in U_n)\right] \cup (x(t, \omega) \in E \setminus U) \in \mathcal{N}_t.$$

注意，如过程连续而且 $0 < \tau_U < \infty$, 则 τ_U 是初次到达 $E\backslash U$ 的时刻，而且

$$x(\tau_U) \in \overline{U} \cap (E\backslash U),$$

即 $x(\tau_U)$ 在 U 的边界上 ($\overline{U}$ 表 U 的闭包).

实际上，由 (7) 可见：对固定的 ω, 取 ε, 使 $\tau_U \geqslant \varepsilon > 0$, 有

$$\rho(X^0_{\tau_U - \varepsilon}, E\backslash U) > 0,$$

故 $x(\tau_U - \varepsilon) \overline{\in} E\backslash U$, 或 $x(\tau_U - \varepsilon) \in U$, 令 $\varepsilon \to 0$ 并由过程的连续性得 $x(\tau_U) \in \overline{U}$.

另方面，由于二集间的距离随着集的扩大而不增加，故对任意 $\varepsilon > 0$, 有 $\rho(X^0_{\tau_U + \varepsilon}, E\backslash U) = 0$. 于是存在 ε_n, 使

$$\rho(x(\tau_U + \varepsilon_n), E\backslash U) < \frac{1}{n}, \tag{8}$$

而且可选 ε_n 使 $\varepsilon_n < \frac{1}{n}$. 不妨设 $\varepsilon_n \to a (\leqslant 0)$,(否则取 $\{\varepsilon_n\}$ 的某子列), 如果说 $a < 0$, 则由 (8) 及过程的连续性得 $\rho(x(\tau_U + a), E\backslash U) = 0$, 这与 τ_U 的定义 (7) 矛盾，故 $a = 0$ 而有 $\rho(x(\tau_U), E\backslash U) = 0$. 由于 $E\backslash U$ 是闭集，故 $x(\tau_U) \in E\backslash U$.

综合上述，得 $x(\tau_U) \in \overline{U} \cap (E\backslash U)$.

定理 2 设 $\widetilde{A}$ 为右连续强马氏过程 $\{x(t, \omega), t \geqslant 0\}$ 的弱无穷小算子. 如 $\widetilde{A}f(x)$ 在点 x 连续并且对 x 的某一邻域 U_0, 有 $E_x\tau_{U_0} < \infty$, 则

$$\widetilde{A}f(x) = \lim_{d(U) \to 0} \frac{E_x f(x(\tau_U)) - f(x)}{E_x \tau_U}, \tag{9}$$

这里 $d(U)$ 表 U 的直径，即 $d(U) = \sup_{x,y \in U} \rho(x, y)$.

证 如 $U \subseteq U_0$, 则 $\tau_U \leqslant \tau_{U_0}, E_x\tau_U \leqslant E_x\tau_{U_0} < \infty$. 既然 τ_U 为马氏时间，故对 τ_U 可用定理 1. 设 $g(x) = \widetilde{A}f(x)$ 在点 x 连续，于是对每 $\varepsilon > 0$, 存在 x 的邻域 $U \subset U_0$, 使

$$|g(y) - g(x)| < \varepsilon \quad (\text{一切} y \in U),$$

---

[1] 先证左方集含右方集：如 $x_t \in E\backslash U$, 则 $\rho(x_t, E\backslash U) = 0$, 故 $\rho(X^0_t, E\backslash U) = 0$ 而 $\tau_U(\omega) \leqslant t$. 如 $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{r<t} (x_r \in U_n)$, 则对每 n, 存在 $r_n < t$, 使 $x(r_n) \in U_n$, 令 $s = \sup r_n \leqslant t$, 则 $\rho(X^0_s, E\backslash U) \leqslant \rho(X^0_{r_n}, E\backslash U) \leqslant \rho(X_{r_n}, E\backslash U) < \frac{1}{n}$, 故 $\rho(X^0_s, E\backslash U) = 0$, $\tau_U \leqslant s \leqslant t$. 次证右方集含左方集：注意如 $\tau_U(\omega) < \infty$, 则必存在 t_n(可能都相等) $\to \tau_U$, 使 $\rho(x_{t_n} E\backslash U) \to 0, n \to \infty$. 故如 $\tau_U < t$, 则必存在 $t_n < t$, 使 $x_{t_n} \in U_n$. 由右连续性及 U_n 的开性，可取有理数 $r_n < t$, 使 $x_{r_n} \in U_n, n = 1, 2, \cdots$, 故此 $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{r<t} (x(r, \omega) \in U_n) \subset$ 右方集. 如 $\tau_U(\omega) = t$, 则或 $x_t \in E\backslash U$; 或 $x_t \in U$, 此时由于 x_t 对 t 右连续，U 又开，必存在 $a > 0$, 使 $x_{t+\varepsilon} \in U$ 对一切 $0 \leqslant \varepsilon < a$ 成立. 故由上述注意，对此 ω, 存在有理数 $r_n < t$, 使 $\rho(x_{r_n}(\omega), E\backslash U) < \frac{1}{n}$, $x_{r_n}(\omega) \in U_n, n = 1, 2, \cdots$.

故对一切 $t < \tau_U$ 有

$$|g(x(t)) - g(x)| < \varepsilon.$$

从而 (1) 中右方项 $E_x \int_0^{\tau_U} g(x(t))dt$ 与 $g(x)E_x\tau_U$ 的差的绝对值

$$\left|E_x \int_0^{\tau_U} [g(x(t)) - g(x)]dt\right| < \varepsilon E_x\tau_U,$$

或

$$\left|E_x \int_0^{\tau_U} g(x(t))dt - g(x)E_x\tau_U\right| < \varepsilon E_x\tau_U.$$

由 (1) 即得

$$\left|\frac{E_x f(x(\tau_U)) - f(x)}{E_x\tau_U} - \widetilde{A}f(x)\right| < \varepsilon. \quad \square$$

称过程 $X_T = \{x_t(\omega), t \geqslant 0\}$ 的 $s(\geqslant 0)$**推移**的过程 $X_{s+T} = \{x_{s+t}(\omega), t \geqslant 0\}$; 如 g 为某定义在 $E^{[0,\infty)}$ 上的 $\mathcal{B}^{[0,\infty)}$ 可测函数，$\xi(\omega) = g(X_T)$, 称随机变量 $\xi(\omega)$ 的 s 推移为 $\theta_s\xi(\omega) = g(X_{s+T})$; 如 $B \in \mathcal{F}\{x_t(\omega), t \geqslant 0\}$, 则称集 B 的 s 推移为集 θ_sB, θ_sB 由下式定义， $\chi_{\theta_sB} = \theta_s\chi_B$. 在这些定义中， $s(\geqslant 0)$ 可以是固定的数，也可以是任意非负的随机变量. 在后一情形 $\theta_s\xi(\omega)$ 只定义在 $\Omega_s = (\omega : s(\omega) < \infty)$ 上.

系 1 在定理 2 的条件下，有

$$\begin{aligned}\widetilde{A}f(x) &= -\lim_{d(U)\to 0} \frac{E_x f(x(\tau_U)) - f(x)}{E_x m(x(\tau_U)) - m(x)} \\ &= -\lim_{d(U)\to 0} \frac{\int_E [f(y) - f(x)]\pi_U(x, dy)}{\int_E [m(y) - m(x)]\pi_U(x, dy)}.\end{aligned} \tag{10}$$

这里

$$m(x) = E_x\tau_{U_0}, \ \pi_U(x,\Gamma) = P_x(x(\tau_U) \in \Gamma).$$

证 如 $U \subset U_0$ 则由强马氏性

$$\begin{aligned}m(x) &= E_x(\tau_U + \tau_{U_0} - \tau_U) = E_x\tau_U + E_x(\tau_{U_0} - \tau_U) \\ &= E_x\tau_U + E_x\theta_{\tau_U}(\tau_{U_0}) \\ &= E_x\tau_U + E_x\{E_x[\theta_{\tau_U}(\tau_{U_0})|\mathcal{N}_U^{\tau_U}]\} = E_x\tau_U + E_xE_{x(\tau_U)}\tau_{U_0} \\ &= E_x\tau_U + E_x m(x(\tau_U)),\end{aligned} \tag{10$_1$}$$

以此代入 (9) 即得 (10) 中前一等式. 再利用积分变换便得后一等式. $\square$

(二) 右连续 Feller 过程.

为使等式 (9) 成立，先决条件是 $E_x\tau_{U_0} < \infty$, 试问何时此条件满足？解决此问题后，我们对右连续 Feller 过程定义广无穷小算子 $\mathfrak{A}$.

引理 2 设 $\{x(t,\omega)(t \geqslant 0)\}$ 为 Feller 过程，又设对某 $x \in E, t > 0$ 及某开集 V, 有 $P_x(x(t) \in V) = \alpha > 0$, 则存在点 x 的邻域 U, 使 $P_y(x(t) \in V) > \frac{\alpha}{2}(y \in U)$.

证 令 $V_n = \left(x : x \in E, \rho(x, E\backslash V) \geqslant \frac{1}{n}\right)$. 于是 $V_n \uparrow V$. 故 $P_x(x(t) \in V_n) \uparrow P_x(x(t) \in V) = \alpha$. 取 n_0, 使 $P_x(x(t) \in V_{n_0}) > \frac{3}{4}\alpha$. 定义有界连续函数

$$f(y) = \begin{cases} n_0\rho(y, E\backslash V), & \text{如 } y \overline{\in} V_{n_0}, \\ 1, & \text{如 } y \in V_{n_0}, \end{cases}$$

由 Feller 性, 函数 $g(y) = E_y f(x(t))$ 连续, 故存在点 x 的邻域 U, 使对 $y \in U$, 有 $g(y) > g(x) - \frac{\alpha}{4}$. 又因

$$g(y) \int_{E\backslash V} p(t, y, dz) f(z) + \int_V p(t, y, dz) f(z) \leqslant p(t, y, V) = P_y(x(t) \in V),$$

$$g(x) \geqslant \int_{V_{n_0}} f(z) p(t, x, dz) = P_x(x(t) \in V_{n_0}) > \frac{3}{4}\alpha,$$

故

$$P_y(x(t) \in V) \geqslant g(y) > g(x) - \frac{\alpha}{4} > \frac{3}{4}\alpha - \frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha}{2}. \quad \square$$

称点 $x \in E$ 为过程的 **套点**, 如对任一 $t \geqslant 0$, 有 $P_x(x(t) = x) = 1$. 如过程可分 (特别, 如过程右连续), 则由

$$P_x(x(r) = x, \text{一切可分集中的} r) = 1$$

得

$$P_x(x(t) = x, \text{一切} t \geqslant 0) = 1. \tag{11}$$

注意在套点 x 上

$$T_t f(x) = E_x f(x(t)) = f(x), \tag{12}$$

故对任意 $f \in D_{\widetilde{A}}$, 有

$$\widetilde{A} f(x) = 0. \tag{13}$$

如 x 不是套点, 则有

引理 3 设 x 不是右连续 Feller 过程 $\{x(t, \omega), t \geqslant 0\}$ 的套点, 则存在 x 的邻域 U, 使

$$m(y) = E_y \tau_U < \infty \ (\text{一切} y \in U).$$

证 因 x 不是套点, 故存在开集 V, 使 $\rho(x, V) > 0$, 而且对某 $t, P_x(x(t) \in V) = \alpha > 0$. 由引理 2, 存在点 x 的邻域 U, 使对一切 $y \in U$, 有 $P_y(x(t) \in V) > \frac{\alpha}{2}$.

选 U 使 $U \cap V = \phi$, 则对一切 $y \in U$, 有

$$P_y(\tau_U > t) < P_y(x(t) \overline{\in} V) < 1 - \frac{\alpha}{2},$$

由此可证, 对一切 $y \in U$, 有 $E_y \tau_U < \infty$.

实际上, 令 $A_s = \{\tau_U > s\} \in \mathcal{N}_s$, 则

$$\begin{aligned} P_y(A_{s+t}) = P_y(A_s \theta_s A_t) &= \int_{A_s} P_y(\theta_s A_t | \mathcal{N}_s) P_y(d\omega) \\ &= \int_{A_s} P_{x(s)}(A_t) P_y(d\omega). \end{aligned} \tag{14}$$

但当 $\omega \in A_s$ 时， $x(s) \in U$, 故由上述

$$P_{x(s)}(A_t) = P_{x(s)}(\tau_U > t) < 1 - \frac{\alpha}{2},$$

代入 (14) 即得

$$P_y(A_{s+t}) < \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) P_y(A_s).$$

由此立得 $P_y(A_{nt}) < \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^n$ 而有

$$\begin{aligned} E_y\tau_U &= \int_0^\infty P_y(\tau_U > s)ds = \sum_{n=0}^\infty \int_{nt}^{(n+1)t} P_y(\tau_U > s)ds < t\sum_{n=0}^\infty P_y(\tau_U > nt) \\ &= t\sum_{n=0}^\infty P_y(A_{nt}) < t\sum_{n=0}^\infty \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^n = \frac{2t}{\alpha}. \quad \square \end{aligned} \tag{15}$$

由引理 3 及 (9), 对右连续 Feller 过程 $\{x(t,\omega), t \geqslant 0\}$, 如下定义它的 **广无穷小算子** $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A}f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{d(U)\to 0} \dfrac{E_x f(x(\tau_U)) - f(x)}{E_x\tau_U}, & \text{如 } x \text{ 非套点;} \\ 0, & \text{如 } x \text{ 是套点,} \end{cases} \tag{16}$$

其定义域为

$$D_{\mathfrak{A}} = (f : f \in C, \ \text{存在极限}\mathfrak{A}f \in C), \tag{17}$$

这里 C 为 E 上全体有界连续函数.

如 §4.3 所述，对 Feller 过程自然只在 C 中考虑它的弱及强无穷小算子 $\widetilde{A}_C$ 及 A_C. 为简单计，以下简写 $\widetilde{A}_C, A_C$ 为 $\widetilde{A}$ 及 A.

定理 3 对右连续 Feller 过程，有

$$A \subseteq \widetilde{A} \subseteq \mathfrak{A};$$

如果相空间 E 是紧距离空间，则

$$A = \widetilde{A} = \mathfrak{A}.$$

证 由 §4.3 $A \subseteq \widetilde{A}$. 试证 $\widetilde{A} \subseteq \mathfrak{A}$. 设 $f \in D_{\widetilde{A}}$, 如 x 是套点，由 (16),(13), $\mathfrak{A}f(x) = \widetilde{A}f(x) = 0$. 如 x 不是套点，由引理 3, 存在 x 的邻域 U_0, 使 $E_x\tau_{U_0} < \infty$. 根据定理 2, $\mathfrak{A}f(x) = \widetilde{A}f(x)$.

今设 E 为紧距离空间，按 §4.3 定理 10,$\widetilde{A} = A, \widetilde{C}_0 = C_0 = C$. 既然刚才证明了 $\widetilde{A} \subseteq \mathfrak{A}$, 故只要证 $D_{\mathfrak{A}} \subseteq D_{\widetilde{A}}$.

取 $f \in D_{\mathfrak{A}}$, 令 $h = f - \mathfrak{A}f$. 由 (17),$h \in C = \widetilde{C}_0$, 故存在 $\widetilde{f} \in D_{\widetilde{A}}$, 使 $\widetilde{f} - \widetilde{A}\widetilde{f} = h$, 而且

$$\widetilde{f} = R_1 h = \int_0^\infty e^{-t} T_t h dt$$

(见 §4.3 定理 5). 因为 $\widetilde{A} \subseteq \mathfrak{A}$, 得 $\widetilde{f} - \mathfrak{A}\widetilde{f} = h$, 因而 $\varphi = f - \widetilde{f}$ 应满足方程

$$\mathfrak{A}\varphi = \varphi. \tag{18}$$

由于 E 的紧性及 φ 的连续性，$\varphi(x)$ 在某一点 $x_0 \in E$ 上取极大值. 由 (16) 可见 $\mathfrak{A}\varphi(x_0) \leqslant 0$. 由 (18), $\varphi(x_0) \leqslant 0$. 这表示对一切 $x \in E, \varphi(x) \leqslant 0$. 同样，$\varphi$ 在某点 $x' \in E$ 上取极小值，$\varphi(x') = \mathfrak{A}\varphi(x') \geqslant 0, \varphi(x) \geqslant 0 (x \in E)$. 综合上述可见 $\varphi(x) \equiv 0$. 于是 $f = \widetilde{f} \in D_{\widetilde{A}}$. □.

一种重要的右连续 Feller 的过程是连续 Feller 过程 $x(t,\omega), t \geqslant 0$. 这时对任一 $x \in U$, 以 P_x 一概率 1, $x(\tau_U)$ 属于 U 的边界 $U' = \overline{U} \cap (E \backslash U)$, 因此，(10) 中的积分区域 E 可换为 U'. 设 x 不是过程的套点，改写 (16) 中前一式为

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{d(U)\to 0} \frac{\int_{U'}[f(y) - f(x)]\Pi_U(x, dy)}{C_U(x)}, \tag{19}$$

其中 $\Pi_U(x, \Gamma) = P_x(x(\tau_U) \in \Gamma), C_U(x) = E_x\tau_U$. 由系 1, 上式可改写为

$$\mathfrak{A}f(x) = -\lim_{d(U)\to 0} \frac{\int_{U'}[f(y) - f(x)]\Pi_U(x, dy)}{\int_{U'}[m(y) - m(x)]\Pi_U(x, dy)}. \tag{20}$$

由 (20) 及 (16) 后一式可见对连续 Feller 过程，广无穷小算子 $\mathfrak{A}$ 有下列性质：

1) 局部性：如在某点 x_0 的邻域中，$f_1(x) = f_2(x)$, 则 $\mathfrak{A}f_1(x_0) = \mathfrak{A}f_2(x_0)$; 换言之，$\mathfrak{A}f(x_0)$ 的值只依赖于 $f(x)$ 在 x_0 的任一邻域中的值.

2) 线性：对实数 α, β, 有

$$\mathfrak{A}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha\mathfrak{A}f(x) + \beta\mathfrak{A}g(x).$$

3) 非负定性：如 $f(X)$ 在 x_0 达到相对极小，即对 x_0 的某一邻域 U, 有 $f(x) \geqslant f(x_0), x \in U$, 则

$$\mathfrak{A}f(x_0) \geqslant 0.$$

4) 椭圆性：根据下列定理，可认为 $\mathfrak{A}$ 是广义二级椭圆型微分算子的一般化：

定理 4 设连续 Feller 过程的广无穷小算子 $\mathfrak{A}$ 在点 x_0 的某邻域对连续函数 $\varphi_i(i = 1, \cdots, n)$ 及 $\varphi_i\varphi_j(i, j = 1, \cdots, n)$ 有定义，又设 $F(y_1, \cdots, y_n)$ 为任一 n 元函数，在点 $(\varphi_1(x_0), \cdots, \varphi_n(x_0))$ 的某邻域中二次连续可微. 于是在点 x_0 上，$\mathfrak{A}$ 对函数 $F(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ 有定义，并且

$$\mathfrak{A}F(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j}, \tag{21}$$

这里 $a_i = \mathfrak{A}(\varphi_i - \varphi_i^{(0)}), b_{ij} = \mathfrak{A}(\varphi_i - \varphi_i^{(0)})(\varphi_j - \varphi_j^{(0)})[\varphi_i = \varphi_i(x), \varphi_i^{(0)} = \varphi_i(x_0)]$, 而

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_i} = \left.\dfrac{\partial F}{\partial y_i}\right|_{y_i=\varphi_i(x_0)} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} = \left.\dfrac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}\right|_{\substack{y_i=\varphi_i(x_0)\\ y_j=\varphi_j(x_0)}} \end{array}\right\} (i = 1, \cdots, n).$$

又 (b_{ij}) 是一非负定矩阵.

证 由泰勒展式有

$$\begin{aligned} &F(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) - F(\varphi_1^{(0)}, \cdots, \varphi_n^{(0)}) \\ &= \sum \frac{\partial F}{\partial \varphi_i}\Delta_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j}(1 + \varepsilon_{ij})\Delta_i\Delta_j, \end{aligned} \tag{22}$$

其中 $\Delta_i = \varphi_i - \varphi_i^{(0)}$, 导数均如上述, 取于点 $(\varphi_1^{(0)}, \cdots, \varphi_n^{(0)})$ 上, 并且当 $\varphi_i \to \varphi_i^{(0)}$(因而当 $x \to x_0$ 时), $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \to 0$. 以此代入 (19), 得

$$\mathfrak{A}F(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) = \lim_{d(U)\to 0} \left\{ \sum_i \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} \frac{\int_{U'} \Delta_i \Pi_U(x_0, dx)}{C_U(x_0)} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \frac{\int_{U'} \Delta_i \Delta_j \Pi_U(x_0, dx)}{C_U(x_0)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \frac{\int_{U'} \varepsilon_{ij} \Delta_i \Delta_j \Pi_U(x_0, dx)}{C_U(x_0)} \right\}.$$

根据定理条件, 第一、二项分别趋于 $\sum\limits_i \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} a_i$ 及 $\frac{1}{2} \sum\limits_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} b_{ij}$; 第三项则趋于 0. 事实上

$$\left| \frac{1}{C_U(x_0)} \int_{U'} \varepsilon_{ij} \Delta_i \Delta_j \Pi_U(x_0, dx) \right|$$
$$\leqslant \sup_{x \in U'} |\varepsilon_{ij}| \sqrt{\frac{1}{C_U(x_0)} \int_{U'} \Delta_i^2 \Pi_U(x_0, dx)} \times \sqrt{\frac{1}{C_U(x_0)} \int_{U'} \Delta_j^2 \Pi_U(x_0, dx)},$$

右方第一项趋于 0, 而后二项由于假设是有界的.

最后 $\sum_{i,j} b_{ij} \lambda_i \lambda_j = \mathfrak{A}h(x_0)$, 其中

$$h(x) = \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i (\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)) \right]^2.$$

既然 $h(x)$ 在 x_0 达到相对极小, 故由性质 3) 即得

$$\sum_{i,j} b_{ij} \lambda_i \lambda_j \geqslant 0. \quad \square$$

§5.2 一维连续 Feller 过程

(一) 设集 E 为 R_1 中某区间 (闭或开、有界或无界),$\{x(t, \omega), t \geqslant 0\}$ 是以 E 为相空间的连续 Feller 过程. 关于此过程, 点 $x_0 \in E$ 称为**向右**(或**向左**) 点, 如对某 $t > 0$, $P_{x_0}(x(t) > x_0) > 0$(或 $P_{x_0}(x(t) < x_0) > 0$.E 中的点可分成四类:

纯向右点: 向右而不向左;

纯向左点: 向左而不向右;

正则点: 既向右又向左;

套点: 既不向右又不向左.

我们的目的是研究 $\mathfrak{A}f$ 在各类点上的表现.

如 x 是套点, 则如上节所述

$$\mathfrak{A}f(x) = 0. \tag{1}$$

如 x_0 不是套点, 那么根据上节引理 3, 存在 x_0 的邻域 U_0, 使 $m(x) = E_x \tau_{U_0} < \infty (x \in U_0)$. 由于 E 的一维性及上节 (20), 得知

$$\mathfrak{A}f(x) = -\lim_{\substack{x_1 \uparrow x \\ x_2 \downarrow x}} \frac{p_2[f(x_2) - f(x)] + p_1[f(x_1) - f(x)]}{p_2[m(x_2) - m(x)] + p_1[m(x_1) - m(x)]} \tag{2}$$

对 $x \in U_0$ 成立，其中

$$p_i = P_x(x(\tau_U) = x_i) = \Pi_U(x, x_i),\ i = 1, 2,$$

$$x \in U = (x_1, x_2).$$

因此，如 x 为纯向右点，则 $p_1 = 0, p_2 = 1$,(2) 化为

$$\mathfrak{A}f(x) = -\lim_{x_2 \downarrow x} \frac{f(x_2) - f(x)}{m(x_2) - m(x)} = -D_m^+ f(x); \tag{3}$$

同样，如 x 为纯向左点，则 $p_1 = 1, p_2 = 0$,(2) 化为

$$\mathfrak{A}f(x) = -\lim_{x_1 \uparrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{m(x_1) - m(x)} = -D_m^- f(x). \tag{4}$$

换言之，在纯向右 (左) 点上，$\mathfrak{A}f(x)$ 是 f 关于 m 的一级右 (左) 导数的负数.

(二) 剩下来只要求出 $\mathfrak{A}f$ 在正则点 x 上的表现. 为此要作相当多的准备工作，这些工作也有独立的意义.

定义函数

$$\tau_a(\omega) = \begin{cases} \inf(t : x(t, \omega) = a), & \text{如右方集不空,} \\ \infty, & \text{其它情况,} \end{cases} \tag{5}$$

试证它是一随机变量. 因为，只要注意

$$\tau_a(\omega) = \begin{cases} \tau_{(-\infty, a)}(\omega), & \text{如 } x(0, \omega) < a, \\ \tau_{(a, \infty)}(\omega), & \text{如 } x(0, \omega) > a, \\ 0, & \text{如 } x(0, \omega) = a. \end{cases}$$

即得

$$(\tau_a \leqslant c) = (x(0) < a, \tau_{(-\infty, a)} \leqslant c) \cup (x(0) > a, \tau_{(a, \infty)} \leqslant c) \cup W_a, \tag{6}$$

其中 $W_a = (x(0) = a)$ 或空集，视 $0 \leqslant c$ 或 $0 > c$ 而定，故 $(\tau_a \leqslant c)$ 可测.

再令

$$\left.\begin{aligned} p(x, a) &= P_x(\tau_a < \infty), \\ p(x, a, b) &= P_x(\tau_a < \tau_b), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

因此 $p(x, a)$ 是自 x 出发，终于要到达 a 的概率，而 $p(x, a, b)$ 是自 x 出发，在到达 b 以前先到达 a 的概率.

引理 1 如 $a < x < y < b$ 或 $a > x > y > b$, 则

$$p(y, a) = p(y, x) p(x, a), \tag{8}$$

$$p(y, a, b) = p(y, x, b) p(x, a, b). \tag{9}$$

证 由 $(x(0) = y, \tau_a < \infty) = (x(0) = y, \tau_x < \infty) \cap \theta_{\tau_x}(\tau_a < \infty)$, 得

$$\begin{aligned} p_y(\tau_a < \infty) = P_y(x(0) = y, \tau_a < \infty) &= P_y(\tau_x < \infty, \theta_{\tau_x}(\tau_a < \infty)) \\ &= \int_{(\tau_x < \infty)} P_y(\theta_{\tau_x}(\tau_a < \infty) | \mathcal{N}_{\tau_x}) P_y(d\omega) \\ &= \int_{(\tau_x < \infty)} P_{x(\tau_x)}(\tau_a < \infty) P_y(d\omega), \end{aligned}$$

但因 $x(\tau_x)=x$, 故右方化为 $P_y(\tau_x<\infty)\cdot P_x(\tau_a<\infty)$, 得证 (8).

同样，由

$$\{x(0)=y,\tau_a<\tau_b\}=\{x(0)=y,\tau_x<\tau_b\}\cap\theta_{\tau_x}(\tau_a<\tau_b)$$

仿上对 τ_x 用强马氏性便得证 (9), 这时会碰到的新问题只是要证 $(\tau_x<\tau_b)\in\mathcal{N}_{\tau_x}$, 此事实由

$$(\tau_x<\tau_b)(\tau_x\leqslant c)=(\text{ 存在}u\leqslant c,\text{ 使}x(u)=x;\text{ 并对一切}v<u\text{ 有}x(v)\neq b)\in\mathcal{N}_c$$

可见是正确的. □

引理 2 如 $p(a,b)>0$, 则对一切 $x\in(a,b)$, 有 $E_x\tau_{(a,b)}<\infty$.

证 由 $(x(0)=a,\tau_b\leqslant t)\subseteq(x(0)=a,\tau_x\leqslant t,\theta_{\tau_x}\tau_b\leqslant t)$ 得

$$\begin{aligned}P_a(\tau_b\leqslant t)\leqslant P_a(\tau_x\leqslant t,\theta_{\tau_x}\tau_b\leqslant t)&=\int_{(\tau_x\leqslant t)}P_a(\theta_{\tau_x}\tau_b\leqslant t|\mathcal{N}_{\tau_x})P_a(d\omega)\\&=P_x(\tau_b\leqslant t)P_a(\tau_x\leqslant t),\end{aligned}$$

故

$$P_a(\tau_b\leqslant t)\leqslant P_x(\tau_b\leqslant t),$$

即

$$P_a(\tau_b>t)\geqslant P_x(\tau_b>t).$$

既然在 $x(0,\omega)=x\in(a,b)$ 时， $\tau_{(a,b)}=\min(\tau_a,\tau_b)\leqslant\tau_b$, 故

$$P_x(\tau_{(a,b)}>t)\leqslant P_x(\tau_b>t)\leqslant P_a(\tau_b>t).$$

由假设得

$$\lim_{t\to\infty}P_a(\tau_b>t)=P_a(\tau_b=\infty)=1-p(a,b)<1,$$

因此必有某 t 使 $P_a(\tau_b>t)=1-\alpha<1$, 从而对一切 $x\in(a,b)$ 有 $P_x(\tau_{(a,b)}>t)\leqslant 1-\alpha$. 然后仿上节引理 3 之证即得

$$E_x\tau_{(a,b)}\leqslant\frac{t}{\alpha}<\infty,x\in(a,b).\quad\square$$

引理 3 如 $a<x<b$ 或 $a>x>b$, 而且 $p(x,a,b)=0$, 则 $p(x,a)=0$.

证 为确定计，设 $a<x<b$. 令

$$\Gamma_1=\left(z:z<a+\frac{x-a}{3}\right),\ \Gamma_2=\left(z:z>b-\frac{b-x}{3}\right).$$

称轨道 $x(t)$ 在 T 以前从 Γ_2 到达 Γ_1 n 次，如存在 $2n$ 个点 $0\leqslant s_1<t_1<s_2<t_2<\cdots<s_n<t_n\leqslant T$, 使

$$x(s_i)\in\Gamma_2,\quad x(t_i)\in\Gamma_1\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

但不存在 $2(n+1)$ 个如是的点. 令

$$A=(\omega:x(0,\omega)=x,\ \tau_a(\omega)<\infty),$$

$$A_n=(\omega:\omega\in A,\text{ 在}\tau_a(\omega)\text{ 以前},x(t,\omega)\text{ 从}\Gamma_2\text{ 到达}\Gamma_1\ n\text{ 次}),$$

$$\begin{aligned}\tau^{(n)}(\omega)=\inf(T: & x(T,\omega)=x, \text{在 } T \text{ 以前，存在 } 2n-1 \text{ 个点}\\ & 0\leqslant s_1<t_1<s_2<t_2<\cdots<s_n,\ \text{使 } x(s_i)\in\Gamma_2,\ x(t_i)\in\Gamma_1,\\ & \text{但不存在更多的如是的点})\end{aligned}$$

(如上式右方集空，则令 $\tau^{(n)}(\omega)=\infty$). 注意

$$A=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n,\quad A_n\subset\theta_{\tau^{(n)}}A_0.$$

易见 $\tau^{(n)}(\omega)$ 是不依赖于将来的随机变量，又 $x(\tau^{(n)})=x$, 故回忆 $\Omega_\tau=(\tau<\infty)$, 便得

$$\begin{aligned}P_x(\theta_{\tau^{(n)}}A_0)=P_x(\Omega_{\tau^{(n)}}\theta_{\tau^{(n)}}A_0&=\int_{\Omega_{\tau^{(n)}}}P_x(\theta_{\tau^{(n)}}A_0|\mathcal{N}_{\tau^{(n)}})P_x(d\omega)\\ &=P_x(A_0)P_x(\Omega_{\tau^{(n)}}).\end{aligned}$$

但根据假设 $p(x,a,b)=0$, 故 $P_x(A_0)=0$, 于是

$$P(A_n)\leqslant P_x(\theta_{\tau^{(n)}}A_0)=0,$$

$$P(A)=\sum_n P(A_n)=0.\quad\square$$

引理 4 设 $p(a,b)>0$. 如 $a<b$, 则 $\lim\limits_{x\to b-0}p(x,b,a)=1$; 如 $a>b$, 则 $\lim\limits_{x\to b+0}p(x,b,a)=1$.

证 为确定计，设 $a<b$, 又 $a<x<x_1<x_2<\cdots<b$, $x_n\to b$. 如 $x(0,\omega)=x$, 则

$$\tau_{x_1}<\tau_{x_2}<\cdots<\tau_{x_n}<\tau_b. \tag{10}$$

设 $A=(\tau_b<\tau_a), A_n=(\tau_{x_n}<\tau_a)$. 显然 $A\subseteq\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 今设 $\omega\in\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)\Big\backslash A$, 则 $x(t,\omega)\neq a$ 对一切 $t\leqslant\tau_{x_n}(\omega)(n\geqslant 1)$ 成立，因 $x(\tau_{x_n})=x_n$, 故 $x(t,\omega)\neq a$ 对一切 $t\leqslant\tau(\omega)=\lim\limits_{n\to\infty}\tau_{x_n}(\omega)$ 也成立. 如说 $\tau(\omega)<\infty$, 则由过程的连续性及 $x(\tau_{x_n})=x_n$, 将有 $x(\tau)=b$, 此表 $\omega\in A$ 而与 $\omega\bar{\in}A$ 矛盾. 从而 $\tau(\omega)=\infty$. 由于 $\omega\in A_n$ (一切 n), 故 $\tau_a(\omega)\geqslant\tau(\omega)=\infty$, 并且由 (10) 还有 $\tau_b(\omega)=\infty$. 由此得

$$\tau_{(a,b)}(\omega)=min(\tau_a,\tau_b)=\infty.$$

然而由引理 2,$P_x(\tau_{(a,b)}(\omega)=\infty)=0$, 结合上述便得 $P_x\left(\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)\backslash A\right)=0$, 或 $P_x(A)=\lim\limits_{n\to\infty}P_x(A_n)$, 亦即

$$p(x,x_n,a)\to p(x,b,a). \tag{11}$$

由 (9)

$$p(x,b,a)=p(x,x_n,a)p(x_n,b,a). \tag{11_1}$$

既然由引理 3 可得 $p(x,b,a)>0$(否则 $p(x,b)=0$, 于是 $p(a,b)=p(a,x)p(x,b)=0$). 由此及 (11), (11_1) 得 $p(x_n,b,a)\to 1$. □

引理 5 设 $a<b$. 如 $p(a,b)>0$, 则 $[a,b)$ 中一切点都是向右点；反之，如 $[a,b]$ 中一切点都是向右点，则 $p(a,b)>0$.

证 先证一简单事实：x_0 不是向右点的充分与必要条件是：对一切 $x > x_0, p(x_0, x) = 0$.

实际上，如 x_0 不是向右点，则对任一固定的 $t \geqslant 0, P_{x_0}(x(t) > x_0) = 0$. 由过程的连续性，对任一 $x > x_0$, 取 $\varepsilon = \frac{x-x_0}{2}$, 得

$$p(x_0, x) \leqslant P_{x_0}(\text{存在有理数}r, \text{使}x(r) > x_0 + \varepsilon) \leqslant \sum_r P_{x_0}(x(r) > x_0) = 0.$$

反之，如对某 $t > 0$, 有 $P_{x_0}(x(t) > x_0) > 0$, 则因 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{x_0}\left(x(t) > x_0 + \frac{1}{n}\right) = P_{x_0}(x(t) > x_0) > 0$, 故存在 n_0, 使 $P_{x_0}\left(x(t) > x_0 + \frac{1}{n_0}\right) > 0$. 令 $x = x_0 + \frac{1}{n_0}$, 即得

$$p(x_0, x) \geqslant P_{x_0}\left(x(t) > x_0 + \frac{1}{n_0}\right) > 0.$$

今证引理第一部分. 如说不然，存在 $x_0 \in [a, b)$, x_0 不是向右点. 于是 $p(a, b) = p(a, x_0) \times p(x_0, b) = 0$, 与假设矛盾.

下证第二部分，先注意如 x_0 为向右点，则存在 $x_1 < x_0 < x_2$, 使 $p(x_1, x_2) > 0$. 实际上，由定义存在某 t, 使 $P_{x_0}(x(t) > x_0) > 0$. 故如上证，存在点 $x_2 > x_0$, 使 $P_{x_0}(x(t) > x_2) > 0$. 由上节引理 2, 存在 $\varepsilon > 0$, 使对一切 $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, 有 $P_x(x(t) > x_2) > 0$. 今任选点 $x_1 \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$, 得 $p(x_1, x_2) > 0$.

如 $[a, b]$ 中一切点都向右，则对每一 $x_0 \in [a, b]$, 存在 (x_1, x_2) 包含 x_0, 而且 $p(x_1, x_2) > 0$. 由这些区间中可挑选有穷多个 $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})(i = 1, \cdots, n)$ 掩盖 $[a, b]$. 既然 $p(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) > 0$, 故由 (8) 即得所欲证. □

我们说 **过程 $x(t, \omega)$ 在 $[a, b]$ 上是正则的**，如果 $p(a, b) > 0, p(b, a) > 0$. 由引理 5, 为此必须 (a, b) 中一切点都是正则点；只需 $[a, b]$ 中一切点都是正则点.

引理 6 如连续 Feller 过程在 $[a, b]$ 上是正则的，则函数 $p(x) = p(x, b, a)$ 连续，单调上升，而且

$$\lim_{x\to a+0} p(x) = 0, \quad \lim_{x\to b-0} p(x) = 1; \tag{12}$$

又对于任意 $a < x_1 < x < x_2 < b$, 有

$$p(x, x_1, x_2) = \frac{p(x_2) - p(x)}{p(x_2) - p(x_1)}. \tag{13}$$

证 设 $a < x < y < b$. 由 (9)

$$p(x, b, a) = p(x, y, a)p(y, b, a), \tag{14}$$

即

$$p(x) = p(x, y, a)p(y), \tag{15}$$

故 $p(x) \leqslant p(y)$. 今证 $p(x) < p(y)$. 否则如说 $p(x) = p(y)$, 则必须或者 $p(x, y, a) = 1$, 或者 $p(x) = p(x, b, a) = 0$. 在前一情形，由引理 2 得 $p(x, a, y) = 1 - p(x, y, a) = 0$, 由引理 3 得 $p(x, a) = 0$, 故 $p(b, a) = p(b, x)p(x, a) = 0$, 与假设矛盾. 在后一情形，仍由引理 3 得 $p(x, b) = 0$, 故 $p(a, b) = p(a, x)p(x, b) = 0$, 也与假设矛盾.

(12) 则由引理 4 推出 (为证 (12) 中第一式，只要对 $p(x, a, b) = 1 - p(x, b, a)$ 用引理 4).

其次，再由引理 4, $\lim_{x\to y-0} p(x,y,a)=1\ (a<x<y)$. 由 (15) 得 $\lim_{x\to y-0} p(x)=p(y)$, 从而得证 $p(x)$ 的左连续性，类似地，令 $a<x<y<b$, 由

$$p(y,a,b)=p(y,x,b)p(x,a,b),$$

得 $\lim_{y\to x+0} p(y,a,b)=p(x,a,b)=1-p(x)$, 故 $1-p(x)$, 因之 $p(x)$ 是右连续函数. 这样便证明了 $p(x)$ 的连续性.

最后，根据 (9)

$$p(x,x_1,x_2)=\frac{p(x,a,x_2)}{p(x_1,a,x_2)}=\frac{1-p(x,x_2,a)}{1-p(x_1,x_2,a)}; \tag{16}$$

另方面由 (15)

$$p(x,x_2,a)=\frac{p(x)}{p(x_2)},\ p(x_1,x_2,a)=\frac{p(x_1)}{p(x_2)}, \tag{17}$$

由 (16),(17) 即得 (13). □

现在已可求出 $\mathfrak{A}$ 在正则线段 $[a,b]$ 的内点 x 上的表达式. 取 $x\in(x_1,x_2)\subset[a,b]$, 用 $p(x,x_1,x_2)$ 及 $1-p(x,x_1,x_2)$ 代替 (2) 中的 p_1,p_2, 并利用 (13), 即得

$$\mathfrak{A}f(x)=-\lim_{\substack{x_1\to x-0\\ x_2\to x+0}}\frac{\frac{f(x_2)-f(x)}{p(x_2)-p(x)}-\frac{f(x_1)-f(x)}{p(x_1)-p(x)}}{\frac{m(x_2)-m(x)}{p(x_2)-p(x)}-\frac{m(x_1)-m(x)}{p(x_1)-p(x)}}. \tag{18}$$

(18) 右方可以简化. 下面证明，右方极限是 f 关于二单调函数的广义二级导数. 为此需要下面的.

引理 7 设 $x(t)$ 为连续 Feller 过程，在 $[a,b]$ 正则，并设 $p(x)=p(x,b,a), m(x)=E_x\tau_{(a,b)}$. 于是 $m(x)$ 在 (a,b) 上连续，右导数

$$D_p^+m(x)=\lim_{y\to x+0}\frac{m(y)-m(x)}{p(y)-p(x)}$$

对任意 $x\in(a,b)$ 存在，右连续而且单调下降；左导数

$$D_p^-m(x)=\lim_{y\to x-0}\frac{m(y)-m(x)}{p(y)-p(x)}$$

对任意 $x\in(a,b)$ 存在，左连续而且单调下降.

对每 $x\in(a,b)$, 如至少有一函数 $D_p^+m(x)$ 或 $D_p^-m(x)$ 连续，则 $D_p^+m(x)=D_p^-m(x)$.

证 由引理 6, $p(x)$ 有反函数为 $q(z)$, 即方程 $z=p(x)$ 有唯一解为 $x=q(z)$. 令 $\widetilde{m}(z)=-m[q(z)]$. 取 $0\leqslant z_1<z<z_2\leqslant 1$, 并令 $x_1=q(z_1), x=q(z), x_2=q(z_2)$. 于是 $a\leqslant x_1<x<x_2\leqslant b$. 根据上节，$(10_1)$, 得

$$m(x)-p(x,x_1,x_2)m(x_1)-p(x,x_2,x_1)m(x_2)=E_x\tau_{(x_1,x_2)}>0, \tag{18_1}$$

由 (13) 得

$$m(x)>\frac{p(x_2)-p(x)}{p(x_2)-p(x_1)}m(x_1)+\frac{p(x)-p(x_1)}{p(x_2)-p(x_1)}m(x_2).$$

以上述 x_1, x, x_2 的值代入，得

$$\widetilde{m}(z) < \frac{z_2 - z}{z_2 - z_1}\widetilde{m}(z_1) + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\widetilde{m}(z_2).$$

因而函数 $\widetilde{m}(z)$ 在 $[0,1]$ 上为凸函数，非正 (见上面 $\widetilde{m}(z)$ 的定义), 故有上界. 由不等式论知 [1]，这样的函数在 $(0,1)$ 连续，左、右导数处处存在，它们是单调上升函数；而且只要有一个导数在点 x 连续，那么二导数便在此 x 上相等；此外，$D_z^-\widetilde{m}(z)$ 左连续而 $D_z^+\widetilde{m}(z)$ 右连续.

为了完成引理的证明，只要把反函数还原，得 $m(x) = -\widetilde{m}[p(x)]$, 并注意

$$D_p^+ m(x) = -D_z^+\widetilde{m}(z),\ D_p^- m(x) = -D_z^-\widetilde{m}(z)$$

即可. □

现在可得到最后的结果.

定理 1 设 $x(t)$ 为连续 Feller 过程，在 $[a,b]$ 正则. 令

$$p(x) = p(x,b,a),\ m(x) = E_x\tau_{(a,b)},$$

$$n_+(x) = -D_p^+ m(x),\ n_-(x) = -D_p^- m(x).$$

如 $f \in D_{\mathfrak{A}}$, 则对任意 $x \in (a,b), D_p^+ f(x)$ 存在而且右连续，$D_p^- f(x)$ 存在而且左连续；此外，如在点 x 上有 $n_+(x) = n_-(x)$, 则 $D_p^+ f(x) = D_p^- f(x)$. 在 (a,b) 中

$$\mathfrak{A}f(x) = D_{n_-}^+ D_p^- f(x) = D_{n_+}^- D_p^+ f(x). \tag{19}$$

证 由 (18) 及引理 7

$$\lim_{\substack{x_1 \to x-0 \\ x_2 \to x+0}} \left[\frac{f(x_2) - f(x)}{p(x_2) - p(x)} - \frac{f(x_1) - f(x)}{p(x_1) - p(x)}\right] = [n_+(x) - n_-(x)]\mathfrak{A}f(x), \tag{20}$$

故 $\lim\limits_{x_2 \to x+0} \frac{f(x_2)-f(x)}{p(x_2)-p(x)}$ 及 $\lim\limits_{x_1 \to x-0} \frac{f(x_1)-f(x)}{p(x_1)-p(x)}$ 存在，分别记为 $D_p^+ f(x)$ 及 $D_P^- f(x)$, 它们在 $x \in (y: n_+(y) = n_-(y))$ 上相等. 造二连续函数

$$\left.\begin{aligned} F(y) &= f(y) - f(x) - D_p^- f(x)[p(y) - p(x)], \\ G(y) &= -m(y) + m(x) - n_-(x)[p(y) - p(x)]. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

显然 $G(x) = 0$. 又对 $y > x$, 由引理 7 得

$$\left.\begin{aligned} D_p^- G(y) &= n_-(y) - n_-(x) > 0, \\ D_p^+ G(y) &= n_+(y) - n_-(x) > 0, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

故 $G(y) > 0$.

在 (18) 中，令 $x_1 \to x - 0$ 得

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{y \to x+0} \frac{F(y)}{G(y)}. \tag{23}$$

---

[1] 见 Hardy, Littlewood,Pólya,Inequalities,1934,§3.18.

如果对上式能用罗比塔求极限的方法，即如能证

$$\lim_{y\to x+0}\frac{D_p^+F(y)}{D_p^+G(y)}=\lim_{y\to x+0}\frac{F(y)}{G(y)}=\lim_{y\to x+0}\frac{D_p^-F(y)}{D_p^-G(y)}, \tag{24}$$

则由 (23),(21) 得

$$\mathfrak{A}f(x)=\lim_{y\to x+0}\frac{D_p^+f(y)-D_p^-f(x)}{n_+(y)-n_-(x)}=\lim_{y\to x+0}\frac{D_p^-f(y)-D_p^-f(x)}{n_-(y)-n_-(x)}, \tag{25}$$

于是得到 (19) 中前一等式．其次，由于 n_+ 的右连续性，由 (25) 得

$$D_p^+f(x+0)-D_p^-f(x)=[n_+(x)-n_-(x)]\mathfrak{A}f(x).$$

将此式与 (20) 比较，得 $D_p^+f(x+0)=D_p^+f(x)$, 故知 $D_p^+f(x)$ 右连续．

为证 (24), 设 $\lim\limits_{y\to x+0}\frac{D_p^+F(y)}{D_p^+G(y)}$ 不存在而有

$$\varliminf_{y\to x+0}\frac{D_p^+F(y)}{D_p^+G(y)}<c<\varlimsup_{y\to x+0}\frac{D_p^+F(y)}{D_p^+G(y)}. \tag{26}$$

令 $\varphi(y)=F(y)-cG(y)$, 由 (18) 可见

$$\mathfrak{A}p(x)=0,\ \mathfrak{A}m(x)=-1,\ \mathfrak{A}K=0 \tag{27}$$

(K 表恒等于常数 K 的函数), 故由 (21) 得

$$\mathfrak{A}\varphi=\mathfrak{A}f+c.$$

其次，根据 (26), 可见对任意 $x_2>x$, 函数 $D_p^+\varphi=D_p^+F-cD_p^+G$ 在 (x,x_2) 中要改变符号．故存在 $y_n\to x+0, y_n'\to x+0$, 使在 y_n 上， $\varphi(y)$ 达到相对极大，而在 y_n' 上 $\varphi(y)$ 达到相对极小．由上节所述非负定性得 $\mathfrak{A}\varphi(y_n)\leqslant 0$, $\mathfrak{A}\varphi(y_n')\geqslant 0$, 从而 $\mathfrak{A}f(y_n)\leqslant -c, \mathfrak{A}f(y_n')\geqslant -c$, 故 $\mathfrak{A}f(x)=-c$. 最后一式应对任一满足 (26) 的 c 成立，这显然不可能．于是得证极限

$$\lim_{y\to x+0}\frac{D_p^+F(y)}{D_p^+G(y)}=\lim_{y\to x+0}\frac{D_p^+f(y)-D_p^-f(x)}{n_+(y)-n_-(x)} \tag{28}$$

存在；类似地可证极限

$$\lim_{y\to x+0}\frac{D_p^-F(y)}{D_p^-G(y)}=\lim_{y\to x+0}\frac{D_p^-f(y)-D_p^-f(x)}{n_-(y)-n_-(x)} \tag{29}$$

存在．以 N 表 $n_+(x)$ 的连续点 x 的集，既然在处处稠密集 N 上，$D_p^-f(y)=D_p^+f(y), n_+(y)=n_-(y)$, 故自 N 中取一列 $y_n\to x+0$, 即知极限 (28) 与 (29) 相等．为求出此公共极限值，令

$$\psi(y)=F(y)G(x_2)-G(y)F(x_2)\ (x\leqslant y\leqslant x_2).$$

由 (21),$\psi(x)=\psi(x_2)=0$, 故 $\psi(y)$ 在 $[x,x_2]$ 的某一内点 y' 上实现极大或极小．在第一种情况下， $D_p^-\psi(y')\geqslant 0\geqslant D_p^+\psi(y')$, 从而由 (22)

$$\frac{D_p^+F(y')}{D_p^+G(y')}\leqslant\frac{F(x_2)}{G(x_2)}\leqslant\frac{D_p^-F(y')}{D_p^-G(y')}.$$

在第二种情况下，不等式反向. 但上面已证明上式二端当 $x_2 \to x+0$ 因而 $y' \to x+0$ 时趋于同一极限，而中间项则因 (23) 而趋于 $\mathfrak{A}f(x)$, 由此及 (21) 即得证 (24).

于是 (19) 前一等式及 $D_p^+ f(x)$ 的右连续性完全得以证明.

类似地，代替 (21) 而引进

$$\overline{F}(y) = f(y) - f(x) - D_p^+ f(x)[p(y) - p(x)],$$

$$\overline{G}(y) = -m(y) + m(x) - n_+(x)[p(y) - p(x)],$$

同样可证明 (19) 后一等式及 $D_p^- f(x)$ 的左连续性. □

表达式 (19) 可以改进，为此，我们先证明两个引理.

引理 8 设在区间 (a_1, a_2) 中，函数 $F(x)$ 右连续， $v(x)$ 上升而且右连续. 如对一切 $x \in (a_1, a_2), D_v^- F(x) \geqslant 0$, 则 $F(x)$ 在 (a_1, a_2) 中不下降. 如对一切 $x \in (a_1, a_2)$ 有 $D_v^- F(x) = 0$, 则在 (a_1, a_2) 上， $F(x)$ 取常数值.

证 先设对一切 $x \in (a_1, a_2)$, 有 $D_v^- F(x) > 0$. 取 $a_1 < a < b < a_2$, 并令

$$c = \inf(x : a < x < b; F(x) \leqslant F(b)).$$

如果说 $c > a$, 则由 F 的右连续性有 $F(c) \leqslant F(b)$. 但当 $y \uparrow c$ 时， $\frac{F(y)-F(c)}{v(y)-v(c)} \to D_v^- F(c) > 0$. 由此及 v 的上升性，存在 $\delta > 0$, 使对一切 $y \in (c-\delta, c)$ 有 $F(y) < F(c) \leqslant F(b)$, 这与 c 的定义矛盾. 因此 $F(a) \leqslant F(b)$, 而 F 不下降.

今设对一切 $x \in (a_1, a_2), D_v^- F(x) \geqslant 0$. 对 $\varepsilon > 0$, 定义 $F_\varepsilon(x) = F(x) + \varepsilon v(x)$, 于是 $D_v^- F_\varepsilon(x) = D_v^- F(x) + \varepsilon > 0$. 如上所证， $F_\varepsilon(a) \leqslant F_\varepsilon(b)$. 令 $\varepsilon \to 0$, 得 $F(a) \leqslant F(b)$.

第二结论由第一结论推出. □

引理 9 在 (a_1, a_2) 中，设函数 $f(x)$ 连续， $v(x)$ 及 $F(x)$ 右连续，又设 $v(x)$ 上升，则以下三式

$$f(x) = D_v^- F(x) \quad \text{对一切} x \in (a_1, a_2), \tag{30}$$

$$f(x) = D_v F(x) \quad \text{对一切} x \in (a_1, a_2), \tag{31}$$

$$\int_{(a,b]} f(x) dv(x) = F(b) - F(a) \quad \text{对一切} a_1 < a < b < a_2 \tag{32}$$

相互等价

证 象普通数学分析中证法一样，由 (32) 可推出 (31), 从而 (30). 故只要证自 (30) 可得 (32). 取 $\alpha \in (a_1, a_2)$ 而令

$$G(x) = \int_{(\alpha, x]} f(y) dv(y) \quad (a_1 < x < a_2).$$

如刚才所证， $D_v^- G(x) = f(x) = D_v^- F(x)$ 对一切 $x \in (a_1, a_2)$ 成立，故 $D_v^- [G(x) - F(x)] = 0$. 显然 $G(x) - F(x)$ 右连续，故由引理 8, $G(x) - F(x)$ 等于常数，从而得证 (32). □

现在简写 (19) 中的 $n_+(x)$ 为 $n(x)$, 由引理 9 得

$$\mathfrak{A} f(x) = D_n D_p^+ f(x). \tag{33}$$

如果注意除在 $n(x)$ 的断点 (其数可列) 上外, $D_p^+f(x)=D_pf(x)$, 则 (33) 还可写为

$$\mathfrak{A}f(x)=D_nD_pf(x), \tag{34}$$

其中如 x 是 $n(x)$ 的断点, $D_pf(x)$ 由右连续性补定义.

(三) 定理 1 中考虑的是闭区间, 现在来研究开区间情形. 由正则点的定义, 可见全体正则点集是开集. 根据开集的构造理论, 此集可分解为互不相交的区间的和, 称它们为**正则区间**. 我们的目的是在这些区间上来研究过程.

为此先注意分析数学中的一结果: 设在区间 (a_1,a_2) 中, 函数 $F(x)$ 连续, $v(x)$ 连续而且上升, 又 $f(x)$ 右连续而且有界. 于是二关系式

$$f(x)=D_v^+F(x) \quad 对一切 x\in(a_1,a_2), \tag{35}$$

$$\int_{a_1}^{a_2}f(x)dv(x)=F(\alpha_2)-F(\alpha_1) \quad 对一切 a_1<\alpha_1<\alpha_2<a_2 \tag{36}$$

是等价的. 事实上, 由 (36) 显然得 (35); 而自 (35) 推出 (36) 则只要利用 Lebesgue 定理.

定理 2 设 (a_1,a_2) 是正则区间. 则必存在上升函数 $u(x)$ 与 $v(x)$, 使

(i) $u(x)$ 连续; $v(x)$ 右连续;

(ii) 对任意 $a_1<x_1<x_2<a_2$, 有

$$p(x,x_2,x_1)=\frac{u(x)-u(x_1)}{u(x_2)-u(x_1)}, \tag{37}$$

$$m(x,x_1,x_2)=\frac{u(x)-u(x_1)}{u(x_2)-u(x_1)}[\omega(x_1)-\omega(x_2)]-[\omega(x_1)-\omega(x)], \tag{38}$$

其中 $m(x,x_1,x_2)=E_x\tau_{(x_1,x_2)}$ 而

$$\omega(x)=\int_\alpha^x v(y)du(y) \quad (a_1<\alpha<a_2); \tag{39}$$

(iii) 对任意函数 $f\in D_{\mathfrak{A}}$, 有

$$\mathfrak{A}f(x)=D_vD_uf(x), \tag{40}$$

这里 $D_uf(x)$ 在无定义的点上按右连续性补定义.

证 考虑二点列 $\alpha_n\downarrow a_1,\beta_n\uparrow a_2$. 记

$$\Delta_k=(\alpha_k,\beta_k),\ p_k(x)=p(x,\beta_k,\alpha_k),$$

$$m_k(x)=m(x,\alpha_k,\beta_k),\ n_k(x)=-D_{p_k}m_k(x).$$

由 (13) 及 (18_1) 得

$$p_k(x)=\frac{p_{k+1}(x)-p_{k+1}(\alpha_k)}{p_{k+1}(\beta_k)-p_{k+1}(\alpha_k)}, \tag{41}$$

$$m_k(x)=m_{k+1}(x)-p_k(x)m_{k+1}(\beta_k)-[1-p_k(x)]m_{k+1}(\alpha_k). \tag{42}$$

由此二式立得

$$p_{k+1}(x) = c_k p_k(x) + d_k, \tag{43}$$

$$n_{k+1}(x) = \frac{1}{c_k} n_k(x) + e_k, \tag{44}$$

其中

$$c_k = p_{k+1}(\beta_k) - p_{k+1}(\alpha_k) > 0,\ d_k = p_{k+1}(\alpha_k),$$

$$e_k = \frac{m_{k+1}(\beta_k) - m_{k+1}(\alpha_k)}{p_{k+1}(\beta_k) - p_{k+1}(\alpha_k)}.$$

对 $x \in \Delta_k$, 令

$$u(x) = \frac{p_k(x) - p_k(\alpha_1)}{p_k(\beta_1) - p_k(\alpha_1)}, \tag{45}$$

$$v(x) = [n_k(x) - n_k(\alpha_1)][p_k(\beta_1) - p_k(\alpha_1)]. \tag{46}$$

由 (41) 可见 $u(x)$ 不依赖于 k; 再由 (44) 及 (41) 知 $v(x)$ 也不依赖于 k. 显然, $u(x)$ 及 $v(x)$ 都上升而且满足 (i),(iii). 剩下要验证 (ii). 根据定理前的注意事项，并利用 (46), 得

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \int_{\alpha_1}^{x} v(y)du(y) = \int_{\alpha_1}^{x} [n_k(y) - n_k(\alpha_1)]dp_k(x) \\ &= m_k(x) - m_k(\alpha_1) - n_k(\alpha_1)[p_k(x) - p_k(\alpha_1)].\end{aligned} \tag{47}$$

对任意 $a_1 < x_1 < x_2 < a_2$, 可找到 $\Delta_k \supset (x_1, x_2)$. 类似于 (41),(42), 得

$$p(x, x_2, x_1) = cp_k(x) + d, \tag{48}$$

$$m(x, x_1, x_2) = m_k(x) + qp_k(x) + l, \tag{49}$$

其中 c, d, q, l 为常数. 比较 (48),(45) 及 (49),(45),(47), 即得

$$p(x, x_2, x_1) = c'u(x) + d',$$

$$m(x, x_1, x_2) = \omega(x) + k'u(x) + l'.$$

根据条件 $p(x_1, x_2, x_1) = 0, p(x_2, x_2, x_1) = 1$ 及 $m(x_1, x_1, x_2) = 0$, $m(x_2, x_1, x_2) = 0$ 以定出常数 c', d', k', l' 后，即得 (37),(38). □

注 不难验证，如 $\widetilde{u}(x), \widetilde{v}(x)$ 为另一对满足定理中条件的函数，则必 $\widetilde{u}(x) = cu(x) + d$, $\widetilde{v}(x) = \frac{1}{c}v(x) + e$. 其中 c, d, e 为某些常数.

实际上，由 (37) 得

$$\frac{u(x) - u(x_1)}{u(x_2) - u(x_1)} = \frac{\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(x_1)}{\widetilde{u}(x_2) - \widetilde{u}(x_1)},$$

故 $\widetilde{u}(x) = cu(x) + d, c > 0$. 其次，固定一如此的 $\widetilde{u}(x)$ 而设 $\widetilde{\omega}(x)$ 满足 (38), 则得

$$\begin{aligned}&\frac{u(x) - u(x_1)}{u(x_2) - u(x_1)}[\omega(x_1) - \omega(x_2)] - [\omega(x_1) - \omega(x)] \\ &= \frac{\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(x_1)}{\widetilde{u}(x_2) - \widetilde{u}(x_1)}[\widetilde{\omega}(x_1) - \widetilde{\omega}(x_2)] - [\widetilde{\omega}(x_1) - \widetilde{\omega}(x)],\end{aligned}$$

利用 $u(x),\widetilde{u}(x)$ 间的线性关系，化简此式即得

$$\widetilde{\omega}(x)=\omega(x)+fu(x)+g,$$

f,g 为常数．以 (39) 及 $\widetilde{\omega}(x)=\int_\beta^x \widetilde{v}(y)d\widetilde{u}(y)$ 代入上式，即得 $\widetilde{v}(x)=\frac{1}{c}v(x)+e$.

§5.3　样本函数的连续性条件

（一）在 §3.2 中，对一般过程叙述了保证样本函数以概率 1 连续的充分条件．对马氏过程，属于这一类的结果有下列 Дынкин-Kinney 定理，它不能自 §3.2 中的定理推出．这里条件加在转移概率上．

设相空间为 $(E,\mathcal{B}_1)$, E 为 R_1 中某 Borel 集，$\mathcal{B}_1$ 为 E 中 Borel 子集全体，为符号简单计，只考虑 $E=R_1$. 其余情况类似．对每 $x\in E$, 引入记号

$$U_\varepsilon(x)=(x-\varepsilon,x+\varepsilon),\quad V_\varepsilon(x)=E\backslash U_\varepsilon(x).$$

设 $p(s,x:t,A)$ 为马氏过程 (不必限定齐次)$\{x_t(\omega),t\in T\}$ 的转移概率，这里 T 是任一有界或无界区间．此转移概率在 $\mathcal{N}^s$ 上产生的概率测度仍如前记为 $P_{s,x}(A),A\in\mathcal{N}^s$. 对任意 $\varepsilon>0,h>0$, 令

$$\varphi_\varepsilon(h)=\sup_{\substack{x\in E;s\in T,s+\Delta s\in T;\\0\leqslant\Delta s\leqslant h}}p(s,x;s+\Delta s,V_\varepsilon(x)).\tag{1}$$

粗略地说，"$\varphi_\varepsilon(h)$ 甚小" 表示：在甚短 ($\leqslant h$) 的时间中，质点位移很大 ($\geqslant\varepsilon$) 的概率关于 x 及 s 均匀地小．

自然想到，当 $\varphi_\varepsilon(h)$ 小到足够的程度时，样本函数由于在短时间内不可能有很大振幅而成为连续函数．这思想的精确化是下面的．

定理 1 (Дынкин-Kinney)　设马氏过程 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 可分，而且对任意 $\varepsilon>0$

$$\lim_{h\to0}\frac{\varphi_\varepsilon(h)}{h}=0,\tag{2}$$

则样本函数在 T 上以概率 1 连续．

证　如 §3.2 所述，只要对有界的 $T=[a,b]$ 证明．注意，如 (2) 对 T 成立，则对 $\widetilde{T}\subset T$ 也成立．以下以 R 表可分集．

对正数 ε, 以 A_ε 表事件：

$$A_\varepsilon=(\omega:\text{对任意}\delta>0,\ \text{存在}\ p\in R,q\in R,$$
$$\text{使}|p-q|<\delta,|x_p(\omega)-x_q(\omega)|>\varepsilon).$$

显然 $A_{1/n}\subset A_{1/(n+1)}$, 而且事件 $\bigcup\limits_n A_{1/n}$ 重合于事件

$$D=(\omega:x_t(\omega)\ \text{在}\ R\ \text{上非均匀连续}).$$

因此，只要证对任意固定的 $\varepsilon>0$

$$P(A_\varepsilon)=0\tag{3}$$

(参看 §3.2(7) 及其下一段话).

引进下列随机变量：对有穷或可列集 $M\subset T$, 定义

$$W(M)=\sup_{s\in M,t\in M}|x_s-x_t|; \tag{4}$$

对任意的区间 $\Delta\subset T$, 令

$$W_M(\Delta)=W(M\cap\Delta);$$

对任意的定数 $\delta>0$, 定义

$$W_M(\delta)=\sup_{\substack{\Delta\subset T\\|\Delta|<\delta}}W_M(\Delta), \tag{5}$$

其中 $|\Delta|$ 表 Δ 之长. 注意，(5) 式右方参与取上确界的随机变量不多于可列多个，故 $W_M(\delta)$ 也是一随机变量. 显然，事件 $\{W_M(\delta)>\varepsilon\}$ 重合于事件“存在 $p\in M,q\in M$, 使 $|p-q|<\delta$ 而且 $|x_p(\omega)-x_q(\omega)|>\varepsilon$”. 故

$$A_\varepsilon=\bigcap_\delta\{W_R(\delta)>\varepsilon\}. \tag{6}$$

注意，右方括号中事件随 $\delta\downarrow0$ 而下降，故右方诸事件之交确是一事件. 如果能证明

$$P(W_R(\delta)\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{2|T|}{\delta}\varphi_{\varepsilon/4}(2\delta), \tag{7}$$

则由 (6) 及 (2)

$$P(A_\varepsilon)\leqslant P(W_R(\delta)\geqslant\varepsilon)\to0\quad(\delta\to0),$$

即 $P(A_\varepsilon)=0$ 而定理得证. 因之问题归结为证明 (7).

分成三步：

(A) 先证不等式：对任何有穷集 $\Gamma\subset T$ 及任一区间 $\Delta\subset T$, 有

$$P(W_\Gamma(\Delta)\geqslant\varepsilon)\leqslant2\varphi_{\varepsilon/4}(|\Delta|). \tag{8}$$

把集 $\Gamma\cap\Delta$ 的点排成上升列 $t_0<t_1<\cdots<t_n$. 显然有

$$\begin{aligned}&\left\{|x_{t_i}-x_{t_0}|<\frac{\varepsilon}{2},i=1,\cdots,n\right\}\\&\qquad\subset\{|x_{t_i}-x_{t_j}|<\varepsilon,i,j=0,\cdots,n\}=\{W_\Gamma(\Delta)<\varepsilon\};\end{aligned}$$

$$P\left(|x_{t_i}-x_{t_0}|<\frac{\varepsilon}{2},i=1,\cdots,n\right)\leqslant P(W_\Gamma(\Delta)<\varepsilon). \tag{9}$$

令 $P_{t_0}(A)=P(x_{t_0}\in A)$ $(A\in\mathcal{B}_1)$. 如能证明对任意 $x\in R_1$, 有

$$f(x)=P_{t_0,x}\left(|x_{t_i}-x|<\frac{\varepsilon}{2},i=1,\cdots,n\right)\geqslant1-2\varphi_{\varepsilon/4}(|\Delta|), \tag{10}$$

则由 (9),(10) 立得

$$P(W_\Gamma(\Delta)<\varepsilon)\geqslant\int_E f(x)P_{t_0}(dx)\geqslant1-2\varphi_{\varepsilon/4}(|\Delta|),$$

此即 (8). 故只要证 (10). 由于

$$\begin{aligned}\left\{|x_{t_n}-x|<\frac{\varepsilon}{4}\right\}\subset &\left\{|x_{t_i}-x|<\frac{\varepsilon}{2},\ i=1,\cdots,n\right\}\\ &\cup\bigcup_{r=1}^{n-1}\left\{|x_{t_i}-x|<\frac{\varepsilon}{2}, i=1,\cdots,r-1;\right.\\ &\left.|x_{t_r}-x|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}, |x_{t_n}-x|<\frac{\varepsilon}{4}\right\},\end{aligned} \tag{11}$$

故

$$\begin{aligned}P_{t_0,x}\left(x_{t_n}\in U_x\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right)&\leqslant f(x)+\sum_{r=1}^{n-1}P_{t_0,x}\left\{|x_{t_i}-x|<\frac{\varepsilon}{2},\right.\\ &\qquad\left. i=1,\cdots,r-1;\ |x_{t_r}-x|\geqslant\frac{\varepsilon}{2},\ |x_{t_n}-x|<\frac{\varepsilon}{4}\right\}\\ &=f(x)+\sum_{r=1}^{n-1}P_{t_0,x}(B_r,\Delta_{t_n}),\end{aligned} \tag{12}$$

其中 $B_r=\left\{|x_{t_i}-x|<\frac{\varepsilon}{2}, i=1,\cdots,r-1; |x_{t_r}-x|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}\in\mathcal{N}_{t_r}$, 而 $\Delta_{t_n}=\left\{x_{t_n}\in U_x\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right\}\in\mathcal{N}^{t_r}$. 由马氏性得

$$P_{t_0,x}(B_r,\Delta_{t_n})=\int_{B_r}P_{t_r,x_{t_r}}(\Delta_{t_n})P_{t_0,x}(d\omega). \tag{13}$$

注意对任意满足 $|x-y|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$ 的 $y\in E$, 由于 $U_x\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\cap U_y\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)=\phi$ 以及 $|t_r-t_n|\leqslant|\Delta|$, 有

$$P_{t_r,y}(\Delta_{t_n})\leqslant P_{t_r,y}\left(x_{t_n}\in V_y\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right)\leqslant\varphi_{\varepsilon/4}(|\Delta|).$$

代入上式得

$$P_{t_0,x}(B_r,\Delta_{t_n})\leqslant\varphi_{\varepsilon/4}(|\Delta|)P_{t_0,x}(B_r), \tag{14}$$

将此式与 (12) 结合，并注意诸 B_r 不相交，即得

$$P_{t_0,x}\left(x_{t_n}\in U_x\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right)\leqslant f(x)+\varphi_{\varepsilon/4}(|\Delta|).$$

另方面，因 $|t_0-t_n|\leqslant|\Delta|$, 由 $\varphi_{\varepsilon/4}(|\Delta|)$ 的定义应有

$$P_{t_0,x}\left(x_{t_n}\in U_x\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right)\geqslant 1-\varphi_{\varepsilon/4}(|\Delta|),$$

综合上二式即得 (10).

(B) 今由 (8) 以证对任一有穷集 Γ 及任意 $\delta>0$, 有

$$P(W_\Gamma(\delta)\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{2|T|}{\delta}\varphi_{\varepsilon/4}(2\delta). \tag{15}$$

在 $T=[a,b]$ 中, 选点 $s_0<s_1<\cdots<s_m$, 使 $s_0=a, s_{i+1}-s_i=\delta, b-s_m<\delta$, 则 $m\delta<|T|, m<\frac{|T|}{\delta}$. 令 $\Delta_i=[s_i,s_{i+2}], i=0,\cdots,m-2$, $\Delta_{m-1}=[s_{m-1},b]$, 则对任一区间 $\widetilde{\Delta}\subset T$, $|\widetilde{\Delta}|\leqslant\delta$, 总存在某 Δ_i, 使 $\widetilde{\Delta}\subset\Delta_i$, 故

$$W_\Gamma(\widetilde{\Delta})\leqslant W_\Gamma(\Delta_i)\leqslant\max_{j=1,\cdots,m-1}W_\Gamma(\Delta_j).$$

根据定义 (5) 得

$$W_\Gamma(\delta) \leqslant \max_{j=1,\cdots,m-1} W_\Gamma(\Delta_j).$$

由 (8) 得

$$P(W_\Gamma(\delta) \geqslant \varepsilon) \leqslant P(\max_{j=1,\cdots,m-1} W_\Gamma(\Delta_j) \geqslant \varepsilon)$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{m-1} P(W_\Gamma(\Delta_j) \geqslant \varepsilon) \leqslant 2m\varphi_{\varepsilon/4}(|\Delta_j|) \leqslant \frac{2|T|}{\delta}\varphi_{\varepsilon/4}(2\delta).$$

此即欲证的 (15).

(C) 今将可分集 R 的中的点编号, 以 Γ_n 记前 n 个点所成的集, 因

$$W_{\Gamma_n}(\delta) = \sup_{\substack{t\in\Gamma_n, s\in\Gamma_n,\\ |s-t|<\delta}} |x_s - x_t|,$$

故 $W_{\Gamma_n}(\delta) \uparrow W_R(\delta)$. 由 (15) 得

$$P(W_R(\delta) \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{2|T|}{\delta}\varphi_{\varepsilon/4}(2\delta)$$

此即 (7). □

这证明的方法也是典型的: 为了证明以概率 1 具有某性质 (C), 令 A 为具此性质的 ω 的集, 将 $\overline{A}$ 表为一列事件 A_n 的和或极限, 而 A_n 的概率容易算出或估计出来, 然后只要证 $P(A_n) = 0$ 或 $P(A_n) \to 0$.

(二) 以上定理给出样本函数以概率 1 连续的充分条件. 现在来看反面的问题: 如马氏过程的样本函数都是连续的, 它的转移概率会有什么性质? 下面只讨论齐次情况, 回答这问题的是 Ray 定理.

先把连续性条件如下弱化: 设 $V = (v_1, v_2) \subset E$, 称过程 $\{x_t(\omega), t \geqslant 0\}$ **在 V 中连续**, 如对任一 $x \in V$, 有

$$P_x(x_t(\omega)\ 对 t \in [0, \tau_V(\omega)]\ 连续) = 1, \tag{16}$$

这里 P_x 表测度 $P_{0,x}$, $\tau_V(\omega)$ 如 §5.1 定义. 显然, 如 $\{x_t(\omega), t \geq 0\}$ 是连续过程, 则它在任意 $V(\subset E)$ 中连续.

连续性条件如上弱化有时是很重要的, 因为可能存在这样的过程, 当它的样本函数未离开某 V 前是连续的, 但当它到达边界点 v_1 或 v_2 后, 连续性就被破坏.

自然想到, 如过程在 V 中连续, 则自 $x \in V$ 出发, 在很短时间内跑出 V 的概率应该很小. 这思想的精确化就是下面的

定理 2(Ray) 设 $\{x(t,\omega), t \geqslant 0\}$ 是右连续强马氏过程, 在 V 中连续, 则对任意 $x \in U = (u_1, u_2) \subset V$, 有

$$p(t, x, E\backslash U) = o(t). \tag{17}$$

证 如说不然, 必存在一列 $t_n \downarrow 0, c > 0$, 使

$$p(t_n, x, E\backslash U) > 2ct_n.$$

定义

$$\tau_1(\omega)=\begin{cases}\tau_U(\omega), & \text{如}x(\tau_U,\omega)=u_1,\\ \infty & \text{其他情形 (即}x(\tau_U,\omega)=u_2\text{ 或}\tau_U=\infty);\end{cases}$$

类似定义 $\tau_2(\omega)$. 于是 $\tau_1(\omega),\tau_2(\omega)$ 都是不依赖于将来的随机变量. 实际上，由于 τ_U 不依赖于将来以及 $(x(\tau_U)=u_1)\in\mathcal{N}_{\tau_U}$, 即得

$$(\tau_1(\omega)\leqslant s)=(\tau_U(\omega)\leqslant s)\cap(x(\tau_U)=u_1)\in\mathcal{N}_s.$$

其次，显然有

$$P_x(\tau_1\leqslant t_n)+P_x(\tau_2\leqslant t_n)\geqslant P_x(x(t_n)\in E\backslash U)>2ct_n,$$

故左方二项中至少有一项，例如第二项，对某一子列 $\{t'_n\}\downarrow 0$(仍记此子列为 $\{t_n\}$), 使

$$P_x(\tau_2\leqslant t_n)>ct_n\quad (c>0,t_n\downarrow 0). \tag{18}$$

下面将因此式而产生矛盾. 分三步:

首先，由过程的连续性及强马氏性，易见对任何 $y\in[x,u_2)$, 有

$$P_y(\tau_2\leqslant t_n)>ct_n\quad (c>0,t_n\downarrow 0). \tag{19}$$

此直观上由 (18) 而显然的结果可如下证明：象定义 τ_2 一样，用 (u_1,y) 代替上面的 U 后，可定义 $\tau_{2,y}$. 我们有

$$\begin{aligned}P_x(\tau_2\leqslant t_n)&\leqslant P_x(\theta_{\tau_{2,y}}(\tau_2\leqslant t_n),\tau_{2,y}\leqslant t_n\\&=\int_{(\tau_{2,y}\leqslant t_n)}P_x(\theta_{\tau_{2,y}}(\tau_2\leqslant t_n)|\,\mathcal{N}_{\tau_{2,y}})P_x(d\omega)\\&=\int_{(\tau_{2,y}\leqslant t_n)}P_y(\tau_2\leqslant t)P_x(d\omega)\leqslant P_y(\tau_2\leqslant t_n),\end{aligned} \tag{20}$$

其中倒数第二项中用了在 $(\tau_{2,y}\leqslant t_n)$ 上， $x(\tau_{2,y})=y$ 这一事实.

其次，定义新过程

$$y(t,\omega)=\begin{cases}x(t,\omega), & \text{如}t<\tau_U(\omega),\\ x(\tau_U,\omega), & \text{如}t\geqslant\tau_U(\omega),\end{cases}$$

换言之，将 u_1,u_2 变成吸引点后， $\{x(t,\omega),t\geqslant 0\}$ 便变成 $\{y(t,\omega),t\geqslant 0\}$. 显然 $y(t,\omega)$ 的样本函数以 P_x- 概率 $1(x\in U)$ 连续于 $t\geqslant 0$, 而且界于 $[u_1,u_2]$ 中. 令 $\varepsilon=\frac{u_2-x}{4}>0,a=x+2\varepsilon$, 则

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}P_a\Big(|y(t,\omega)-a|<\varepsilon,\ \text{一切}\ t\in\Big[0,\frac{1}{n}\Big]\Big)\\&=P_a\Big(\bigcup_n\Big\{|y(t,\omega)-a|<\varepsilon,\ \text{一切}\ t\in\Big[0,\frac{1}{n}\Big]\Big\}\Big)=1,\end{aligned}$$

故当 s 充分小时，有

$$P_a(a-\varepsilon<y(t,\omega)<a+\varepsilon,\ \text{一切}\ t\in[0,s])>\frac{1}{2}. \tag{21}$$

类似地，利用 $y(t,\omega)$ 在 $t\in[0.s]$ 中的概率 1 一致连续性，得

$$\alpha_n = P_a\Big(\text{ 对某一}k\leqslant\Big[\frac{s}{t_n}\Big], y\big((k-1)t_n\big) < a+\varepsilon,\\ y(kt_n)=u_2\Big)\to 0\ (n\to\infty). \tag{22}$$

第三，另方面，利用下式中涉及的诸事件的互不相交性及 α_n 的定义，易见

$$\begin{aligned}\alpha_n &\geqslant \sum_{k=1}^{[s/t_n]} P_a(a-\varepsilon<y(t)<a+\varepsilon\text{ 对一切 }t\in[0,(k-1)t_n]\text{ 成立,}\\ &\quad\text{而且 }y(kt_n)=u_2)\\ &=\sum_{k=1}^{[s/t_n]} P_a(a-\varepsilon<x(t)<a+\varepsilon\text{ 对一切 }t\in[0,(k-1)t_n]\text{ 成立,}\\ &\quad\text{而且存在}s\in[(k-1)t_n,kt_n],\text{ 使}x(s)=u_2).\end{aligned}$$

简记最后括号中前一事件为 $A_{(k-1)t_n}$，后一事件为 $B_{kt_n}^{(k-1)t_n}$，则上式右方项

$$\begin{aligned}&=\sum_{k=1}^{[s/t_n]}\int_{A_{(k-1)t_n}} P_a(B_{kt_n}^{(k-1)t_n}\mid\mathcal{N}_{(k-1)t_n})P_a(d\omega)\\ &=\sum_{k=1}^{[s/t_n]}\int_{A_{(k-1)t_n}} P_{x((k-1)t_n)}(B_{t_n}^0)P_a(d\omega).\end{aligned}$$

但当 $\omega\in A_{(k-1)t_n}$ 时， $x((k-1)t_n,\omega)\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subset(x,u_2)$，由 (19)，得被积函数

$$P_{x((k-1)t_n)}(B_{t_n}^0)=P_{x((k-1)t_n)}(\tau_2\leqslant t_n)>ct_n.$$

以之代入上式，并利用 (21) 即得

$$\alpha_n\geqslant\sum_{k=1}^{[s/t_n]} ct_nP_a(A_{(k-1)t_n})\geqslant\frac{1}{2}ct_n\Big[\frac{s}{t_n}\Big]\to\frac{1}{2}ct,$$

这与 (22) 矛盾. □

定理 2 的结果可以加强. 令

$$Q(t,x,E\backslash U)=P_x(\tau_U\leqslant t)=P_x(\text{ 存在}s\in[0,t],\text{ 使}x(s)\in E\backslash U).$$

系 1 在定理 2 条件下

$$Q(t,x,E\backslash U)=o(t). \tag{23}$$

证 由于定理 2 中的矛盾自 (18) 推出，故

$$P_x(\tau_2\leqslant t)=o(t).$$

对 τ_1 同样也有 $P_x(\tau_1\leqslant t)=o(t)$. 因此

$$Q(t,x,E\backslash U)=\sum_{i=1}^{2}P_x(\tau_i\leqslant t)=o(t).\quad\square$$

(三) 利用 Ray 定理，不难计算一类重要过程的无穷小算子. 设 $\{x(t,\omega),t\geqslant 0\}$ 是 $E=(a_1,a_2)$ 上的连续 Feller 过程. 由 Ray 定理，对任意 $\varepsilon>0$, 任意 $x\in E$, 有

$$P_x(|x(t,\omega)-x|>\varepsilon)=o(t). \tag{24}$$

如果这过程满足条件：对某 $\varepsilon>0$, 存在二极限

$$a(x)=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\int_{|x(t,\omega)-x|<\varepsilon}(x(t,\omega)-x)P_x(d\omega), \tag{25}$$

$$b(x)=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\int_{|x(t,\omega)-x|<\varepsilon}(x(t,\omega)-x)^2P_x(d\omega), \tag{26}$$

而且 $a(x),b(x)$ 是 E 上的连续函数时，就称此过程为 **古典连续过程**. 它是最早被研究的过程类中的一种.

首先注意，在条件 (24) 下，(25),(26) 中的极限值不依赖于 $\varepsilon>0$. 实际上，简记 $M_\varepsilon=(|x(t,\omega)-x|<\varepsilon)$, 对 $\varepsilon_2>\varepsilon_1$, 记 $M_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}=M_{\varepsilon_2}-M_{\varepsilon_1}=(\varepsilon_1\leqslant|x(t,\omega)-x|<\varepsilon_2)$, 则

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{t}\left[\int_{M_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}}(x(t,\omega)-x)P_x(d\omega)\right]\right|\\&\leqslant\frac{1}{t}\cdot\varepsilon_2\int_{\overline{M}_{\varepsilon_1}}P_x(d\omega)=P_x(|x(t,\omega)-x|\geqslant\varepsilon_1)\cdot\frac{\varepsilon_2}{t}\to 0\ \ (t\to 0+),\end{aligned}$$

故 $a(x)$ 与 $\varepsilon>0$ 无关；对 $b(x)$ 同样可证明此结论.

其次，利用转移概率，可把 (25),(26) 写为

$$a(x)=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\int_{|y-x|<\varepsilon}(y-x)p(t,x,dy), \tag{27}$$

$$b(x)=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\int_{|y-x|<\varepsilon}(y-x)^2p(t,x,dy). \tag{28}$$

条件 (25),(26) 的概率意义不很明显，然而，如果我们对过程补加一条件 (S):

(S): 对任意 $\varepsilon>0$,

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\int_{|x(t,\omega)-x|\geqslant\varepsilon}(x(t,\omega)-x)^2P_x(d\omega)=0, \tag{29}$$

那么 (25),(26) 的概率意义就很清楚，因为这时

$$a(x)=\lim_{t\to 0+}\frac{E_x[x(t,\omega)-x]}{t}, \tag{30}$$

$$b(x)=\lim_{t\to 0+}\frac{E_x[x(t,\omega)-x]^2}{t},. \tag{31}$$

实际上，利用 (29), 由 (26) 立得 (31). 又由 (29), 得

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{t}\int_{|x(t,\omega)-x|\geqslant\varepsilon}(x(t,\omega)-x)P_x(d\omega)\right|\\&\leqslant\frac{1}{t\varepsilon}\int_{|x(t,\omega)-x|\geqslant\varepsilon}(x(t,\omega)-x)^2P_x(d\omega)\to 0\ (t\to 0+),\end{aligned} \tag{32}$$

由此式及 (25) 立得 (30).

然而，以后无特别声明时，并不假定 (S) 成立.

定理 3 设 f 是有界二次连续可导函数，则 $f \in D_{\widetilde{A}}$ 而且

$$\widetilde{A}f(x) = \left[a(x)\frac{d}{dx} + \frac{b(x)}{2}\frac{d^2}{dx^2}\right]f(x) \quad (x \in E). \tag{33}$$

如点 $x \in (a_1, a_2)$, 又 $b(x) > 0$, 则在此点上

$$\widetilde{A}f(x) = D_v D_u f(x), \tag{34}$$

其中

$$v(x) = \int^x \frac{2}{b(y)} e^{B(y)} dy, \ u(x) = \int^x e^{-B(y)} dy,$$
$$B(y) = \int^y \frac{2a(z)}{b(z)} dz,$$

这些积分的下限可取为小于上限的任何常数[1].

证 令 $c = \sup_x |f(x)|$, 由 (24)

$$\left|\frac{1}{t}\int_{|y-x|\geqslant\varepsilon} f(y)p(t,x,dy)\right| \leqslant c \cdot P_x(|x(t,\omega) - x| \geqslant \varepsilon)/t \to 0,$$

故

$$\widetilde{A}f(x) = \lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\left[\int_{|y-x|<\varepsilon} f(y)p(t,x,dy) - f(x)\right]. \tag{35}$$

对固定的 x 及 $\delta > 0$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使 $|y - x| < \varepsilon$ 时有

$$f(y) - f(x) = f'(x)(y-x) + \frac{f''(x) \pm \delta_1}{2}(y-x)^2,$$

其中 $0 \leqslant \delta_1 = \delta_1(y) \leqslant \delta$. 因而

$$\begin{aligned}&\int_{|y-x|<\varepsilon} f(y)p(t,x,dy) - f(x) = \int_{|y-x|<\varepsilon}[f(y) - f(x)]p(t,x,dy) + o(t)\\ &\leqslant f'(x)\int_{|y-x|<\varepsilon}(y-x)p(t,x,dy) + \frac{f''(x)+\delta}{2}\int_{|y-x|<\varepsilon}(y-x)^2 p(t,x,dy) + o(t).\end{aligned} \tag{36}$$

以 t 除两边，令 $t \to 0+$, 并利用 (27),(28) 得

$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{1}{t}\left[\int_{|y-x|<\varepsilon} f(y)p(t,x,dy) - f(x)\right] \leqslant a(x)f'(x) + \frac{b(x)}{2}f''(x) + \frac{b(x)}{2}\delta. \tag{37}$$

因为上式左方值与 ε 无关，故右方的 δ 可任意小，从而上面的上极限不超过 $a(x)f'(x) + \frac{b(x)}{2}f''(x)$. 类似地取下极限并把 (36),(37) 中的 $\leqslant$ 换成 $\geqslant$, 把 δ 换成 $-\delta$, 可见下极限不小于 $a(x)f'(x) + \frac{b(x)}{2}f''(x)$. 故由 (35) 便得证 (33).

[1]当然，应使 $b(z)$ 在此积分区间中大于 0, 由 $b(x) > 0$ 及 $b(z)$ 的连续性总是可能选到这种区间的.

如 $x \in (a_1, a_2), b(x) > 0$, 由连续性, $b(y)$ 在 x 的某邻域中大于 0, 于是

$$a(x)f'(x) + \frac{b(x)}{2}f''(x) = \frac{b}{2}e^{-B}\left(e^B\frac{2a}{b}f' + e^Bf''\right)(x)$$
$$= \frac{b}{2}e^{-B}(e^Bf')'(x) = \frac{1}{\frac{2}{b}e^B}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{e^{-B}}\frac{d}{dx}\right)f(x) = \frac{d}{dv}\frac{d}{du}f(x),$$

这就得证 (34). □.

§5.4 补充与习题

1. 考虑过程 $\{x_t(\omega), t \geqslant 0\}$, 满足

$$P(x(t,\omega) = vt) = 1, \ \ v \text{ 为任意常数},$$

试证它是 Feller 过程，并且存在等价的连续过程. 故不妨设 $\{x_t(\omega), t \geqslant 0\}$ 是一维连续 Feller 过程. 试研究相空间中点的分类，并求 $\mathfrak{A}f(x)$, $f \in D_{\mathfrak{A}}$.

提示: $p(t,x,A) = \chi_A(x+vt)$. 一切点同类，是套点，纯向右或纯向左，视 $v=0, v>0$ 或 $v<0$ 而定.

2. 设 $\{x_t(\omega), t \geqslant 0\}$ 为一维连续 Feller 过程，$[b_1, b_2]$ 含于某正则区间而 $(a_1, a_2) \subset (b_1, b_2)$. 于是对 $x \in [a_1, a_2]$ 有 $p(x, b_2, b_1) = p(x, a_2, a_1)p(a_2, b_2, b_1) + p(x, a_1, a_2)p(a_1, b_2, b_1)$.

提示: 对 $\tau_{(a_1a_2)}$ 用强马氏性. 关于 $E\tau_{(a_1,a_2)}$ 也有类似公式，见 §5.2(18_1).

3. 试证对 Wiener 过程，一切点都是正则的. 对古典连续过程，如 $b(x) > 0$, 则 x 是正则点.

附记. §5.2 的结果属于 W. Feller 与 E. Б. Дынкин. 先是， W.Feller 于 1954-1955 年用纯分析的方法得到这些结果；后来 E. Б. Дынкин 于 1956 年主要依靠对样本函数性质的研究，重新得到它们，并说明了 D_vD_u 中 v, u 的概率意义. 这种方法对多维或一般空间也有一定效果，详见 §5.1. 进一步的研究见以下 Дынкин 论文 3 及此论文中所列的参考文献 [2],[23],[30],[70],[71],[76] 与 [77], 多维情况见 [3],[49]. 关于样本函数性质的进一步研究，例如何时以概率 1 无第二类断点等，可见那里的 [35],[82].

参考文献

[1] 王梓坤，扩散过程在随机时间替换下的不变性，南开大学学报 (自然科学), 5:5(1964), 1–8.

[2] 施仁杰，马尔科夫过程对于随机时间替换的不变性，南开大学学报 (自然科学), 5:5(1964), 199–204.

[3] Дынкин Е. Б., Марковский процессы и связанные с ними задачи анализа, Успехи Математических Наук, 15: 2 (92), 1960, 3–24.

[4] 王梓坤，张新生，李占柄，一致椭圆扩散的一个比较定理及其应用，中国科学， (A 辑), 23 卷 11 期, (1993), 1121-1129.

第六章 间断型马尔科夫过程

§6.1 转移概率的可微性

(一) 上章中我们主要研究的是连续型马氏过程，它们的样本函数是连续函数；本章中则研究另一类重要的马氏过程，它们的样本函数几乎都是不连续的. 象上章一样，我们仍然集中力量于齐次马氏过程.

本章中恒设 E 为某个一维 Borel 可测集 [1], $\mathcal{B}$ 是 E 中全体 Borel 子集所成 σ 代数， x 表 E 中的点， $\{x\}$ 为由一个点 x 所成的单点集， A 表 $\mathcal{B}$ 中的集. 概率空间为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$, 回忆一下，我们曾假定 P 为完全的概率测度.

设 $\{x(t,\omega),t\geqslant 0\}$ 为任意齐次可分马氏过程，相空间为 $(E,\mathcal{B})$. 相对于这过程，可将 E 中的点分成三类如下：

令

$$\tau(\omega)=\inf(t:x(t,\omega)\neq x(0,\omega)), \tag{1}$$

则 $\tau(\omega)(\leqslant\infty)$ 是一随机变量 (如 (1) 右方集是空的，就令 $\tau(\omega)=\infty$). 因为

$$(\omega:\tau(\omega)<c)\doteq\bigcup_{r_n<c}\{\omega:x(r_n,\omega)\neq x(0,\omega)\}\in\mathcal{N}_c\subset\mathcal{F},$$

这里 $r_n\in R$(可分集),$M\doteq N$ 表 M,N 的对称差是 0 测集，即表 $P(M\Delta N)=P(M\backslash N)+P(N\backslash M)=0$.

简记 $P_{0,x}$ 为 $P_x,P_x(\tau\geqslant t)$ 为 $p(t)$. 试证

$$p(t)=e^{-\lambda t}\ (t\in R_1,\lambda\in[0,\infty]\ 为常数). \tag{2}$$

实际上，记 $A_b^a=(\omega:x(u,\omega)\equiv x(0,\omega)$, 一切 $u\in[a,b])$. 显然 $(\tau\geqslant t)\supset A_t^0\supset(\tau>t)$. 令 $\widetilde{p}(t)=P_x(A_t^0)$, 由马氏性得

$$\begin{aligned}\widetilde{p}(t+s)&=P_x(A_{t+s}^0)=P_x(A_t^0A_{t+s}^t)=\int_{A_t^0}P_x(A_{t+s}^t|\mathcal{N})P_x(d\omega)\\&=\int_{A_t^0}P_{x(t,\omega)}(A_s^0)P_x(d\omega)=P_x(A_t^0)P_x(A_s^0)=\widetilde{p}(t)\widetilde{p}(s).\end{aligned} \tag{2_1}$$

因为 $0\leqslant\widetilde{p}(t)\leqslant 1$ 而且 $\widetilde{p}(t)$ 是 t 的不增函数，故 (2_1) 的唯一解是 [2] $\widetilde{p}(t)=e^{-\lambda t}$. 既然

$$p(t)=P_x(\tau\geqslant t)\geqslant\widetilde{p}(t)=e^{-\lambda t}\geqslant P_x(\tau>t),$$

可见在 $p(t)$ 的连续点上， $p(t)=e^{-\lambda t}$, 由于连续点集在 R_1 的稠性及 $p(t)$ 的左连续性即得证 (2).

---

[1] 在取过程的可分修正时，需要考虑 $E^*=E\cup\{E$ 的极限点$\}$ (极限点中可能有 $\pm\infty$). 但因 $P(t,x,E)=1$, 故 $E^*\backslash E$ 中的点在研究转移概率的分析性质时无关重要.

[2] 证见 §3.4 中 (7) 式的推导， $\lambda\geqslant 0$ 是一常数，但可能等于 ∞; 又 λ 依赖于 x, $\lambda=\lambda(x)$.

由 (2) 知 $E_x\tau = \frac{1}{\lambda}\left(\text{理解 } \frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0\right)$. 由 $E_x\tau$(或 (2)) 的概率意义，自然地称状态 x 为 **吸引的**，**逗留的** 或 **瞬时的**，视 $\lambda(= \lambda(x))$ 为 0, 正而有穷，或 ∞ 而定.

(二) 本章以下恒假设 $\{x(t,\omega), t \geqslant 0\}$ 的转移概率满足条件

(C): $\lim\limits_{t\to 0+} p(t,x,\{x\}) = 1$, (一切$x \in E$).

条件 (C) 等价于：对任意 $x \in E, A \in \mathcal{B}$

$$\lim_{t\to 0+} p(t,x,A) = \chi_A(x),$$

其中 χ_A 是 A 的示性函数.

实际上，由上式推出 (C) 是显然的. 反之，如 $x \in A$, 则由 $p(t,x,A) \geqslant p(t,x,\{x\}) \to 1$; 如 $x \overline{\in} A$, 则 $x \in \overline{A}$ 而 $p(t,x,A) = 1 - p(t,x,\overline{A}) \to 0$.

作为条件 (C) 的后果有

引理 1 如 (C) 成立，则

1° $p(t,x,A)$ 是 t 无均匀连续函数，甚至此均匀性关于 A 也成立；精确些，即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使对任意 $t \geqslant 0, s \geqslant 0, |t-s| < \delta$, 任意 $A \in \mathcal{B}$, 有

$$|p(s,x,A) - p(t,x,A)| < \varepsilon. \tag{3}$$

2° 对任意固定的 $t \geqslant 0$

$$\lim_{h\downarrow 0} P(x_{t+h}(\omega) \neq x_t(\omega)) = 0,$$

因而过程是右随机连续的.

证 1° 由 Колмогоров-Chapman 方程，对任意 $h \geqslant 0$, 有

$$p(t+h,x,A) - p(t,x,A) = \int_{y\neq x} p(h,x,dy)p(t,y,A) - p(t,x,A)[1 - p(h,x,\{x\})],$$

因右方二项都非负，而且都不超过 $1 - p(h,x,\{x\})$, 故

$$|p(t+h,x,A) - p(t,x,A)| \leqslant 1 - p(h,x,\{x\}),$$

因而

$$|p(s,x,A) - p(t,x,A)| \leqslant 1 - p(|s-t|,x,\{x\}),$$

由 (C) 即得 (3).

2° 对 $h \geqslant 0$, 由过程的齐次性及 (C) 得

$$P_{t,x}(x_t(\omega) \neq x_{t+h}(\omega)) = P_{0,x}(x_0(\omega) \neq x_h(\omega)) = p(h,x,\{\overline{x}\}) \to 0 \ (h \to 0), \tag{4}$$

令 $P_u(A) = P(x_u(\omega) \in A)$, 由控制收敛定理，得

$$P(x_t(\omega) \neq x_{t+h}(\omega)) = \int P_{t,x}(x_t(\omega) \neq x_{t+h}(\omega))P_t(dx) \to 0. \tag{5}$$

最后，因 $P(|x_t(\omega) - x_{t+h}(\omega)| > \varepsilon) \leqslant P(x_t(\omega) \neq x_{t+h}(\omega))$, 可见由 (C) 可推出过程的右随机连续性. □

(三) 关于转移概率在 0 点的可微性及导数的概率意义，我们的第一个结果为

定理 1 设 (C) 满足，则

1.1 对任意 $x \in E$, 存在极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-p(t,x,\{x\})}{t}=q(x), \tag{6}$$

而且 $q(x)$ 是 Borel 可测函数， $0 \leqslant q(x) \leqslant \infty$.

1.2 为使 $q(x)(x\in E)$ 有界，必要与充分条件是 (C) 在 E 上均匀成立；此时 (6) 关于 $x\in E$ 均匀成立.

1.3 设 $\{x_t(\omega),t\geqslant 0\}$ 是以 $p(t,x,A)$ 为转移概率的可分马氏过程，则

$$P_{s,x}(x_{s+u}(\omega)=x,0\leqslant u\leqslant t)=e^{-q(x)t}. \tag{7}$$

证 先证下列事实："设二维点集 $S\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ 的 x- 截口为 S_x, 则 $p(t,x,S_x)$ 是 x 的 Borel 可测函数". 事实上，以 Λ 表使此事实成立的全体 S 构成的集系，则 Λ 是一 λ- 系，此 λ- 系包含全体矩形 $B\times B'\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}$, 因为 $P(t,x(B\times B')_x)=\chi_B(x)P(t,x,B')$ 是 x 的 Borel 可测函数，而全体矩形成一 π- 系. 由 λ- 系方法即得证此事实.

应用此事实于对角线集 $S=\{(x,x),x\in E\}$, 即知 $p(t,x,\{x\})$ 是 x 的 Borel 可测函数. 因此，如能证 (6) 中极限 $q(x)$ 存在，则作为沿 $t=t_n\to 0$ 的极限， $q(x)$ 是 Borel 可测函数.

由 Колмогоров-Chapman 方程，有

$$p(t,x,\{x\})\geqslant\left[p\left(\frac{t}{n},x,\{x\}\right)\right]^n,$$

当 n 相当大时，由 (C), 右方大于 0, 故函数

$$f(t)=-\log p(t,x,\{x\}) \tag{8}$$

对一切 $t\geqslant 0$ 有意义，非负有穷，而且由于

$$P(t+s,x,\{x\})\geqslant p(t,x,\{x\})p(s,x,\{x\}),$$

得

$$f(t+s)\leqslant f(t)+f(s). \tag{9}$$

对 $t>0,h>0$, 取 n 使 $t=nh+\varepsilon,0\leqslant\varepsilon<h$, 由 (9)

$$\frac{f(t)}{t}\leqslant\frac{nf(h)}{t}+\frac{f(\varepsilon)}{t}=\frac{nh}{t}\frac{f(h)}{h}+\frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

令 $h\to 0$, 则 $\frac{nh}{t}\to 1,f(\varepsilon)=-\log p(\varepsilon,x,\{x\})\to 0$, 故

$$\frac{f(t)}{t}\leqslant\varliminf_{h\to 0}\frac{f(h)}{h},$$

$$\varlimsup_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\leqslant\sup_{t>0}\frac{f(t)}{t}\leqslant\varliminf_{h\to 0}\frac{f(h)}{h},$$

从而得知存在极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=q(x)=\sup_{t>0}\frac{f(t)}{t}. \tag{10}$$

由 (8),(10)

$$\frac{1-p(h,x,\{x\})}{h}=\frac{1-e^{-f(h)}}{h}=(1+o(1))\frac{f(h)}{h}\to q(x),$$

于是得证 (6). 其次，仍由 (8),(10) 有

$$p(t,x,\{x\})=e^{-\frac{f(t)}{t}t}\geqslant e^{-q(x)t}, \tag{11}$$

故如 $q(x)$ 在 E 上有上确界为 $d(\geqslant 0)$, 则

$$p(t,x,\{x\})\geqslant e^{-dt},$$

这表示 (C) 关于 x 在 E 上均匀成立，1.2 的必要性得以证明.

以下证 1.3. 由于过程右随机连续，$\{x_t(\omega),t\geqslant 0\}$ 如可分则完全可分. 对任意固定的 $t>0$, 取 $R=\left\{\frac{kt}{2^n}\right\}$ 为可分集. 既然过程是齐次的，只要对 $s=0$ 证明 (7). 由可分性得

$$P_x(x_u(\omega)=x,0\leqslant u\leqslant t)=\lim_{n\to\infty}P_x(x_{\frac{kt}{2^n}}(\omega)=x,0\leqslant k\leqslant 2^n). \tag{12}$$

由 §4.2(17) 与齐次性

$$P_x(x_s=x,x_{s+t}=x)=p(s,x,\{x\})p(t,x,\{x\}), \tag{13}$$

从而 (12) 左方值由 (10) 等于

$$\begin{aligned}P_x(x_u=x,0\leqslant u\leqslant t)&=\lim_{n\to\infty}\left[p\left(\frac{t}{2^n},x,\{x\}\right)\right]^{2^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{\log p\left(\frac{t}{2^n},x,\{x\}\right)}{\frac{t}{2^n}}\cdot\frac{t}{2^n}\cdot 2^n\right\}=e^{-q(x)t}.\end{aligned}$$

现在来证 1.2 中的充分性. 设 (C) 关于 $x\in E$ 均匀成立. 任取 $\varepsilon>0$, 选 $\alpha>0$, 使当 $s\leqslant\alpha$ 时，对一切 $x\in E$, 有

$$p(s,x,\{x\})\geqslant 1-\varepsilon.$$

对任意一组常数 $0=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_n=\alpha$, 定义

$$_vp(x,x)=\begin{cases}1, & v=0,\\ P_x(x_{\tau_j}=x,j=0,1,\cdots,v), & n\geqslant v\geqslant 1.\end{cases}$$

则由马氏性

$$\begin{aligned}1-\varepsilon\leqslant p(\alpha,x,\{x\})&={}_np(x,x)+\sum_{v=0}^{n-2}\int_{(\eta\neq x)}{}_vp(x,x)p(\alpha-\tau_{v+1},\eta,\{x\})p(\tau_{v+1}-\tau_v,x,d\eta)\\&\leqslant {}_np(x,x)+\varepsilon\sum_{v=0}^{n-2}\int_{\eta\neq x}{}_vp(x,x)p(\tau_{v+1}-\tau_v,x,d\eta)\\&\leqslant {}_np(x,x)+\varepsilon[1-{}_np(x,x)],\end{aligned}$$

因此

$$(1-\varepsilon)[1-{}_np(x,x)]\leqslant 1-p(\alpha,x,\{x\})\leqslant\varepsilon.$$

注意 1.2 中的结论只涉及转移概率，在具有此转移概率的过程中不妨选可分 (因而完全可分) 过程. 由于上式对 τ_j 的任意选择都成立，故由过程的完全可分性及 (7) 得

$$(1-\varepsilon)[1-e^{-q(x)\alpha}]\leqslant 1-p(\alpha,x,\{x\})\leqslant\varepsilon.$$

如取 $\varepsilon=\frac{1}{3}$, 则上式化为 $\frac{1}{2}\leqslant e^{-q(x)\alpha}$, 由此可见 $q(x)$ 在 E 上有界.

最后，当 α 充分小时，由上式及 (11) 知不等式

$$(1-\varepsilon)\frac{1-e^{-q(x)\alpha}}{\alpha}\leqslant\frac{1-p(\alpha,x,\{x\})}{\alpha}\leqslant\frac{1-e^{-q(x)\alpha}}{\alpha}$$

关于一切 x 成立，只要 $q(x)$ 在 E 上有界. 由此即可推出 1.2 中第二结论. 实际上，由上式得

$$\begin{aligned}\left|\frac{1-p(\alpha,x,\{x\})}{\alpha}-q(x)\right|&\leqslant\max\left(\left|\frac{1-e^{-q(x)\alpha}}{\alpha}-q(x)\right|,\left|\frac{1-e^{-q(x)\alpha}}{\alpha}(1-\varepsilon)-q(x)\right|\right)\\&\leqslant\left|\frac{1-e^{-q(x)\alpha}}{\alpha}-q(x)\right|+\varepsilon\left|\frac{1-e^{-q(x)\alpha}}{\alpha}\right|.\end{aligned}$$

因对任意常数 $q\geqslant 0,\alpha\geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}&|1-e^{-q\alpha}|=\left|q\int_0^\alpha e^{-qy}dy\right|\leqslant q\alpha,\\&|1-e^{-q\alpha}-q\alpha|=\left|q\int_0^\alpha(e^{-qy}-1)dy\right|\leqslant q\int_0^\alpha qydy=\frac{q^2\alpha^2}{2},\end{aligned}$$

故

$$\left|\frac{1-p(\alpha,x,\{x\})}{\alpha}-q(x)\right|\leqslant\frac{d^2\alpha}{2}+\varepsilon d,$$

$d=\sup q(x)$. 由 ε 的任意小性得

$$\left|\frac{1-p(\alpha,x,\{x\})}{\alpha}-q(x)\right|\leqslant\frac{d^2\alpha}{2}.\quad\square$$

注 1 由证明过程可见，如 $q(x)$ 在 E 的某 Borel 可测子集 A 上有界，同样可证 (C) 关于 $x\in A$ 均匀成立.

注 2 由 (7) 得

$$P_x(\tau\geqslant t)=e^{-q(x)t}.\tag{14}$$

由此立知 $E_x\tau=\frac{1}{q(x)}$. 换句话说，$q(x)$ 即 (一) 中末的 $\lambda(x)$.

(四) 今研究 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{p(t,x,A)}{t}$ 的存在性，其中 $x\overline{\in}A\in\mathcal{B}$.

称集 $U\in\mathcal{B}$ 为**匀集**, 如 (C) 对 $x\in U$ 均匀地成立. 全体匀集构成集系 R, 显然，如 $U_1\in R,U_2\in R$, 则 $U_1\cup U_2\in R,U_1-U_2\in R$, 故 R 是一环. $R\subset\mathcal{B}$.

引理 2 设 (C) 成立，则对 $U \in R, x \overline{\in} U$, 存在极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{p(t,x,U)}{t} = q(x,U) \leqslant q(x); \tag{15}$$

如对任一对 $x \in E, U \in R$, 定义 [1]

$$q(x,U) = q(x, U - \{x\}), \tag{15_1}$$

则 $q(x,U)$ 具有性质：对固定的 U 是 x 的 Borel 可测函数；对固定的 x 是 R 上的有穷测度.

证 如能证 (15) 中 $q(x,U)$ 存在，则因 $p(t,x,U-\{x\}) = p(t,x,U) - p(t,x,\{x\})\chi_U(x)$ 是 x 的 Borel 可测函数，故新定义后的 $q(x,U) = \lim\limits_{t_n\to 0}\frac{p(t_n,x,U-\{x\})}{t_n}$ 也是 Borel 可测的．而且当 $x \overline{\in} U$ 时，由于 $\overline{\{x\}} \supset U$, 故

$$0 \leqslant \frac{1-p(t,x,\{x\})}{t} - \frac{p(t,x,U)}{t} \to q(x) - q(x,U),$$

即 $q(x) \geqslant q(x,U)$.

以下证 (15) 中极限存在.

任取 $V \in R$ 使 $V \supset U + \{x\}, x \overline{\in} U$. 由假定对 ε, $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$, 存在 $\delta = \delta(V,\varepsilon) > 0$, 使 $t \leqslant \delta$ 时，对一切 $y \in V$, 有

$$p(t,y,\{y\}) > 1 - \varepsilon.$$

造函数列

$$p_U(h,x,A) = p(h,x,A),$$

$$p_U((j+1)h,x,A) = \int_{\overline{U}} p_U(jh,x,dy)p(h,y,A) \ (A \in \mathcal{B}).$$

于是 $p_U((j+1)h,x,A)$ 是自 x 出发，于 $h,\cdots,jh$ 时不在 U, 而于 $(j+1)h$ 时在 A 中的概率，亦即

$$P_x(x_{lh} \overline{\in} U,\ l = 1,\cdots,j,\ x_{(j+1)h} \in A).$$

因此

$$p(kh,x,A) = \sum_{j=1}^{k-1}\int_U p_U(jh,x,dy)p((k-j)h,y,A) + p_U(kh,x,A). \tag{16}$$

对已给的 h 及 $t(\leqslant \delta), h \leqslant t$, 取 $n = \left[\frac{t}{h}\right]$, 则由 (16) 可得以下二估计式：

$$p(nh,x,U) \geqslant \sum_{k=1}^{n} p_U((k-1)h,x,\{x\})(1-\varepsilon)p(h,x,U), \tag{17}$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_U(kh,x,U) \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \tag{18}$$

---

[1] 由定义 $q(x,\{x\}) = 0$. 又因当 $x \overline{\in} U$ 时， $U = U - \{x\}$, 可见这定义与 (15) 不矛盾.

实际上，在 (16) 中取 $A=U,k=n$, 得

$$p(nh,x,U)=\sum_{k=1}^{n}\int_U p_U(kh,x,dy)p((n-k)h,y,U), \tag{19}$$

既然 $p_U(kh,x,A)\geqslant p_U((k-1)h,x,\{x\})p(h,x,A)$, 故

$$\begin{aligned}p(nh,x,U)&\geqslant\sum_{k=1}^{n}p_U((k-1)h,x,\{x\})\times\int_U p(h,x,dy)p((n-k)h,y,U)\\&\geqslant\sum_{k=1}^{n}p_U((k-1)h,x,\{x\})(1-\varepsilon)p(h,x,U),\end{aligned}$$

此即 (17). 其次，再由 (19), 并注意 $nh\leqslant\delta,x\overline{\in}U$, 得

$$\varepsilon>p(nh,x,U)\geqslant(1-\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}p_U(kh,x,U),$$

此即 (18).

今在 (16) 中令 $A=\{x\},k\leqslant n$, 利用 (18) 即得

$$\begin{aligned}1-\varepsilon<p(kh,x,\{x\})&\leqslant\sum_{j=1}^{k-1}p_U(jh,x,U)+p_U(kh,x,\{x\})\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}+p_U(kh,x,\{x\}),\end{aligned}$$

因而

$$p_U(kh,x,\{x\})\geqslant\frac{1-3\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

以它代入 (17) 得

$$p(nh,x,U)\geqslant n(1-3\varepsilon)p(h,x,U)\quad\left(\varepsilon<\frac{1}{3}\right),$$

$$\frac{1}{1-3\varepsilon}\cdot\frac{p(nh,x,U)}{nh}\geqslant\frac{p(h,x,U)}{h}.$$

当 $h\to0$ 时， $nh\to t$, 由引理 1, 1°, 既然 $p(t,x,U)$ 关于 t 连续，故

$$\frac{1}{1-3\varepsilon}\frac{p(t,x,U)}{t}\geqslant\overline{\lim_{h\to0}}\frac{p(h,x,U)}{h}. \tag{20}$$

令 $t\to0$, 得

$$\frac{1}{1-3\varepsilon}\underline{\lim_{t\to0}}\frac{p(t,x,U)}{t}\geqslant\overline{\lim_{h\to0}}\frac{p(h,x,U)}{h},$$

再令 $\varepsilon\to0$, 即得证存在极限

$$q(x,U)=\lim_{h\to0}\frac{p(h,x,U)}{h}.$$

根据 (20), 对任何 $t<\delta(V,\varepsilon)$ 及任意 U 使 $U+\{x\}\subset V$, 有

$$\frac{1}{1-3\varepsilon}\frac{p(t,x,U)}{t}\geqslant q(x,U), \tag{21}$$

故 $0 \leqslant q(x,U) < \infty$. 剩下要证 $q(x,U)$ 在 R 上的完全可加性. 显然它是可加的，今如 $R \ni U_n \downarrow \phi$, 不妨设 $x \overline{\in} U_n$, 由 (21) 得

$$q(x,U_n) \leqslant \frac{1}{1-3\varepsilon}\frac{p(t,x,U_n)}{t} \to 0\ (n \to \infty),$$

这里 t 是任意小于 $\delta(U_0+\{x\},\varepsilon)$ 的正数. □

由引理 2 立得

系 1 设 $q(x)$ 有界 (或由定理 1 等价地，设 $E \in R$, 亦即设 R 为一代数), 则 $q(x,A)$ 对一切 $A \in \mathcal{B}$ 有定义，而且 $q(x,E) = q(x)$.

证 因此时 $R = \mathcal{B}$, 故得证第一结论. 注意

$$\frac{1-p(t,x,\{x\})}{t} - \frac{p(t,x,E\backslash\{x\})}{t} = 0,$$

令 $t \to 0$ 并回忆 (15_1), 即得 $q(x) = q(x,E)$. □

然而 $q(x)$ 一般并不有界，故需放宽系 1 中的条件如下：

称 E 为 **σ- 匀的**, 如存在匀集列 $\{E_j\} \subset R$, 使 $E = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$. 易见如 $q(x)$ 在 E 上有穷，或只存在可列多个 $x_j \in E$, 使 $q(x_j) = \infty$, 则 E 是 σ- 匀的. 实际上，令

$$E_j = (x : j-1 \leqslant q(x) < j) \cup \{x_j\},$$

由于 $q(x)$ 的 Borel 可测性及注 1, 即知 $E_j \in R$.

特别，如 E 是有穷集 (或可列集), 则 E 是匀集 (或 σ- 匀集).

其次，对每 $x \in E$, 引进

$$\overline{q}(x) = \sup_{U \in R} q(x,U), \tag{22}$$

由引理 2, $\overline{q}(x) \leqslant q(x)$. 根据上确界的定义，可以找到一列 $\{V_n\} \subset R, V_n \subset V_{n+1}$, 使 $q(x,V_n) \uparrow \overline{q}(x)$. 令

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n.$$

引理 3 (i) 如 (C) 成立，又 $\overline{q}(x) < \infty$, 则对此 x, 测度 $q(x,U)(U \in R)$ 可扩张为有穷测度 $q(x,A)(A \in \mathcal{B})$, 而且 $q(x,E) = \overline{q}(x)$;

(ii) 如 E 是 σ- 匀的，则对每 $x \in E$, 测度 $q(x,U)(U \in R)$ 可扩张为测度 $q(x,A)(A \in \mathcal{B})$, 此扩张唯一.

证 先证一简单事实：设 $\mathcal{B}$ 上一列不下降测度 $\{\mu_n\}$, 满足 $\mu_n(A) \uparrow \mu(A)(A \in \mathcal{B})$, 则 μ 也是 $\mathcal{B}$ 上的测度. 为此，显见只需证 μ 的完全可加性. 此因：如果 $A_j \in \mathcal{B}, A_iA_j = \phi(i \neq j)$, 则一方面

$$\mu\Big(\bigcup_j A_j\Big) \geqslant \mu_n\Big(\bigcup_j A_j\Big) \geqslant \sum_{j=1}^{m} \mu_n(A_j), \tag{23}$$

先令 $n \to \infty$ 再令 $m \to \infty$, 即得 $\mu\Big(\bigcup\limits_j A_j\Big) \geqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$; 另方面

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(A_j) = \mu_n\Big(\bigcup_j A_j\Big) \to \mu\Big(\bigcup_j A_j\Big)\ (n \to \infty).$$

今证 (i). 注意匀集的子集如属于 $\mathcal{B}$, 则必是匀集，又匀集全体成环，故根据上述 $\{V_n\}$ 的性质，得

$$q(x,U\overline{V})=q(x,U\overline{V}+V_n)-q(x,V_n)\leqslant \overline{q}(x)-q(x,V_n)\to 0,$$

故

$$q(x,U)=q(x,UV)+q(x,U\overline{V})=q(x,UV)=\lim_{n\to\infty}q(x,UV_n).$$

最后一式启示：对任意 $A\in\mathcal{B}$, 应定义

$$q(x,A)=\lim_{n\to\infty}q(x,AV_n). \tag{24}$$

这里的极限其实是单调上升极限.

在上述事实中取 $\mu_n(A)=q(x,AV_n)$, 即知 $q(x,A)$ 是 $\mathcal{B}$ 上一测度，而且是有穷的，因为

$$q(x,E)=\lim_{n\to\infty}q(x,V_n)=\overline{q}(x)<\infty. \tag{25}$$

下证 (ii). 设 $E=\bigcup_j E_j, E_j\in R$, 取 $V_n=\bigcup_{j=1}^{n}E_j\in R$, 则因 $V_n\uparrow E$, 得 $q(x,UV_n)\uparrow q(x,U)$. 据此，自然地应对 $A\in\mathcal{B}$, 定义

$$q(x,A)=\lim_{n\to\infty}q(x,AV_n).$$

然后仿上证明即知 $q(x,A)$ 是 $\mathcal{B}$ 上的测度. 最后，因 $\mathcal{B}$ 中任一集 $A\in\mathcal{B}$ 可表为 $A=\bigcup_n AV_n$, $AV_n\in R$, 故 $\mathcal{B}=\mathcal{F}\{R\}$, 即 $\mathcal{B}$ 为环 R 所产生的 σ 代数. 由 $q(x,U)$ 在 R 上的有穷性及测度的扩张定理可见此扩张是唯一的. □

定理 2 如果以下二条件之一满足:

(α) 条件 (C) 成立而且 $\overline{q}(x)=q(x)<\infty$;

(β) E 是 σ- 匀集，而且 $q(x,E)=q(x)<\infty$,

则对此 x 及任意 $A\in\mathcal{B}, x\overline{\in}A$, 存在极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{p(t,x,A)}{t}=q(x,A), \tag{26}$$

而且此收敛关于 A 均匀，这里 $q(x,A)$ 由引理 3 决定.

回忆对含 x 的 $A\in\mathcal{B}$, 有

$$q(x,A)=q(x,A\backslash\{x\}), \tag{27}$$

又 $q(x,A)$ 是 $A\in\mathcal{B}$ 的有穷测度.

定理 2 的证 先考虑 (α). 由引理 3(i), $q(x,U)(U\in R)$ 可扩张为有穷测度 $q(x,A), A\in\mathcal{B}$, 使

$$q(x,AV_n)\uparrow q(x,A),\quad V_n\uparrow V,\ V_n\in R. \tag{28}$$

又由 (25) 得

$$\lim_{n\to\infty}q(x,V_n)=q(x,E)=\overline{q}(x)=q(x)<\infty. \tag{29}$$

现在，根据不等式

$$\left|\frac{p(h,x,A)}{h}-q(x,A)\right| \leqslant \left|\frac{p(h,x,AV_n)}{h}-q(x,AV_n)\right| + \left|\frac{p(h,x,A\overline{V}_n)}{h}-q(x,A\overline{V}_n)\right|, \tag{30}$$

便可证明 (26) 关于 A 的均匀性. 为此，先考虑上式右方第二项，它不大于

$$\frac{p(h,x,\overline{V}_n\overline{\{x\}})}{h}+q(x,\overline{V}_n)=\frac{1-p(h,x,\{x\})}{h}-\frac{p(h,x,V_n\overline{\{x\}})}{h}+q(x,\overline{V}_n),$$

而右方各项都不依赖于 A, 并且当 $h\to 0$ 时，由 (15_1),(29) 趋于

$$\begin{aligned}&q(x)-q(x,V_n\overline{\{x\}})+q(x,\overline{V}_n)\\&=q(x)-q(x,V_n)+q(x)-q(x,V_n)\to 0\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

再考虑 (30) 右方第一项. 先证下列事实："设已给 $U\subset V\in R, x\in\overline{V}$, 则 $\frac{p(h,x,U)}{h}\to q(x,U)$ 对 $U\subset V$ 均匀成立." 根据 (21) 并采用那里的符号，如 $h\leqslant\delta(V+\{x\},\varepsilon)$, 则对任意 $U'\subset V$ 有

$$\frac{p(h,x,U')}{h}-q(x,U')\geqslant -3\varepsilon q(x,U')\geqslant -3\varepsilon q(x,V),$$

又

$$\begin{aligned}\frac{p(h,x,U)}{h}-q(x,U)&=\frac{p(h,x,V)}{h}-q(x,V)+q(x,V-U)-\frac{p(h,x,V-U)}{h}\\&\leqslant\frac{p(h,x,V)}{h}-q(x,V)+3\varepsilon q(x,V),\end{aligned}$$

从而

$$\sup_{U\subset V}\left|\frac{p(h,x,U)}{h}-q(x,U)\right|\leqslant 3\varepsilon q(x,V)+\left|\frac{p(h,x,V)}{h}-q(x,V)\right|,$$

而右方项当 $h\to 0,\varepsilon\to 0$ 时趋于 0, 故得证上述事实.

在此事实中取， $V=V_n-\{x\}$, 由 $x\overline{\in}A, AV_n=A(V_n-\{x\})$, 即知 (30) 右方第一项关于 $A\in\mathcal{B}$ 均匀地趋于 0.

其次考虑 (β). 仔细分析上面的证明，可见条件 (α) 的作用只是在于保证二件事: $q(x,U)(U\in R)$ 可扩张成为有穷测度 $q(x,A)$, $A\in\mathcal{B}$; (29) 中的 $q(x,E)=q(x)<\infty$. 而条件 (β) 亦足以保证这两个结论正确. 于是定理得以证明. □

由于 $p(0,x,A)=\chi_A(x)$, 可把 (6),(26) 综合地写成

$$\lim_{t\to 0}\frac{p(t,x,A)-p(0,x,A)}{t}=q(x,A)-q(x)\chi_A(x),$$

这表示 $p(t,x,A)$ 在 0 点的 (右) 导数 $p'(0,x,A)$ 存在，而且

$$p'(0,x,A)=q(x,A)-q(x)\chi_A(x). \tag{31}$$

(五) 现在研究 $p(t,x,A)$ 在任一点 $t\geqslant 0$ 上的导数. 作为 (31) 的一般化，我们有

定理 3 在定理 2 的条件 (α) 或 (β) 下，对条件中的 x 及 $A\in\mathcal{B}$, 存在关于 $t(\geqslant 0)$ 的有穷连续导数 $p'(t,x,A)=\frac{d}{dt}p(t,x,A)$(在 $t=0$ 处为右导数), 其值为

$$p'(t,x,A)=\int_{\overline{\{x\}}}q(x,dy)p(t,y,A)-q(x)p(t,x,A). \tag{32}$$

证 由 Колмогоров-Chapman 方程，对 $h>0$, 有

$$\frac{p(t+h,x,A)-p(t,x,A)}{h}=\int_{\overline{\{x\}}}\frac{1}{h}p(h,x,dy)p(t,y,A)-\frac{1-p(h,x,\{x\})}{h}p(t,x,A). \tag{33}$$

令 $h\to 0$, 根据附篇引理 11, 得右导数为

$$p'_+(t,x,A)=\int_{\overline{\{x\}}}q(x,dy)p(t,y,A)-q(x)p(t,x,A),$$

既然由控制收敛定理知右方是 t 的连续函数．再由 §4.5,13 即得所欲证． □

如果已知 $[q(x),q(x,A)]$ 而把 $p(t,x,A)$ 看成未知函数时，一般称为方程 (32) 为 **向后方程**, 它是微积方程．因而，为求 $p(t,x,A)$ 必须在开始条件

$$p(0,x,A)=\chi_A(x) \tag{34}$$

下解此方程，而且应该要求所得的解是一转移函数．通常这样的解不是唯一的，除非对 $[q(x),q(x,A)]$ 加相当强的条件．下节中，我们用考察样本函数 (即运动的轨道) 的方法来研究这个问题．

(六) **例 1** 设马氏过程 $\{x(t,\omega),t\geqslant 0\}$ 的转移概率为 $p_{ij}(t),i,j\in E=(0,1,\cdots,n)$. 条件 (C) 化为

$$\lim_{t\to 0}p_{ij}(t)=\delta_{ij}\quad(i,j\in E). \tag{35}$$

因 E 有穷，故是匀集．由定理 1, $q_i(=q(i))$ 存在而且有界．记 $q_{ij}=q(i,\{j\})$, 由系 1

$$\infty>q_i=q(i,E)=\sum_{j\neq i}q_{ij}=\overline{q}_i\ (\text{一切}i\in E). \tag{36}$$

定理 2 中二条件都满足． (32) 化为

$$p'_{ij}(t)=-q_ip_{ij}(t)+\sum_{k\neq i}q_{ik}p_{kj}(t)\quad(i,j\in E). \tag{37}$$

或者，记成矩阵的形式

$$P'(t)=QP(t), \tag{38}$$

其中 $P'(t)=(p'_{ij}(t)),P(t)=(p_{ij}(t)),Q=(q_{ij}),q_{ii}=-q_i$.

例 2 设马氏过程 $\{x_t(\omega),t\geqslant 0\}$ 的转移概率为 $p_{ij}(t),i,j\in E=(0,1,2,\cdots)$.(C) 化为

$$\lim_{t\to 0}p_{ij}(t)=\delta_{ij}\quad(i,j\in E). \tag{39}$$

此时 E 是 σ 匀集. 由定理 1, 存在 $q_i \leqslant \infty$. 由引理 2, 3, 相应于 (36) 的是

$$\infty \geqslant q_i \geqslant q(i,E) = \sum_{j\neq i} q_{ij} = \overline{q}_i \quad (\text{一切} i \in E) \tag{40}$$

如果除 (39) 外，还假定条件

$$\sum_{j\neq i} q_{ij} = q_i < \infty \quad (\text{一切} i \in E) \tag{41}$$

成立，则有

$$p'_{ij}(t) = -q_i p_{ij}(t) + \sum_{k\neq i} q_{ik} p_{kj}(t) \quad (i,j \in E) \tag{42}$$

或

$$P'(t) = QP(t), \tag{43}$$

而 (34) 则化为

$$P(0) = I, \tag{44}$$

I 为么矩阵，即 $I = (\delta_{ij})$.

§6.2. 样本函数的性质；最小解

(一) 本节中仍然假定 $\{x(t,\omega), t \geqslant 0\}$ 是齐次、完全可分的马氏过程，它的转移概率 $p(t,x,A)$ 满足 (C). 样本函数的一个性质已见于上节定理 1,1.3. 进一步有

定理 1 设对某 $x \in E, 0 < q(x) < \infty$, 又 α 是任意非负数. $x \overline{\in} U \in R, x \overline{\in} A \in \mathcal{B}, U$ 及 A 都不含瞬时状态. 于是 [1]

(i)$P_x(x(t,\omega)$ 在 $[0,\alpha)$ 中有第一个断点 $\tau(\omega)$; 而且它是跳跃点； $x(s,\omega) \equiv x, s < \tau(\omega)$; 又 $x(\tau+0,\omega) \in U) = (1-e^{-q(x)\alpha}) q(x,U)/q(x)$;

(ii)$P_x(x(t,\omega)$ 有第一个断点 $\tau(\omega)$; 它是跳跃点； $x(s,\omega) \equiv x, s < \tau(\omega)$; 又 $x(\tau+0,\omega) \in U) = q(x,U)/q(x)$;

(iii) 如上节定理 2 中条件 (α) 或 (β) 成立，则这里 (i),(ii) 中的 U 可换为 A.

证 任取正数 β. 定义下列 ω- 集

$$D_{n,\beta}\left(\begin{array}{l}\omega: \text{存在某整数} v, 2 \leqslant v \leqslant 2^n, \text{使} \\ x(t,\omega) = \begin{cases} x, & \text{如} 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{v-1}{2^n}\alpha, \\ \eta \in U, & \text{如} \dfrac{v\alpha}{2^n} \leqslant t \leqslant \dfrac{v\alpha}{2^n} + \beta. \end{cases}\end{array}\right);$$

$$D_\beta = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} D_{n,\beta} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} D_{n,\beta} = \lim_{n\to\infty} D_{n,\beta};$$

[1] 跳跃点及下面用到的阶梯函数的定义都见 §3.2. 这里记号 $x(\tau+0,\omega)$ 表 $\lim\limits_{t\downarrow\tau} x(t,\omega)$; $x(\tau-0,\omega)$ 表 $\lim\limits_{t\uparrow\tau} x(t,\omega)$.

上式中第二等号成立是因为如 $n_1 < n_2 < n_3$, 又 $\omega \in D_{n_1,\beta}$, $\omega \in \dot{D}_{n_3,\beta}$, 则 $\omega \in D_{n_2,\beta}$, 只要 n_1 相当大.

注意当 $\beta \downarrow 0$ 时, D_β 不下降. 定义

$$D \equiv \lim_{\beta \downarrow 0} D_\beta = \lim_{n\to\infty} D_{\frac{1}{n}} = \bigcup_{\beta>0} D_\beta.$$

如果 $\omega \in D$, 则存在某 $\tau \equiv \tau(\omega), 0 < \tau \leqslant \alpha$, 使在 $[0,\tau)$ 中, $x(t,\omega) \equiv x$, 而且在某一以 τ 为左端点的开区间中, $x(t,\omega)$ 恒等于 U 中某常数 η. 于是由可分性, $x(\tau,\omega)$ 必等于 $x(\tau+0,\omega)$ 或 $x(\tau-0,\omega)$. 按上节引理 2 及附篇引理 11, 得

$$\begin{aligned}
P_x(D_{n,\beta}) &= \sum_{v=2}^{2^n} \int_U e^{-q(x)\frac{v-1}{2^n}\alpha} p\left(\frac{\alpha}{2^n}, x, d\eta\right) e^{-q(\eta)\beta} \\
&= \frac{e^{-q(x)\alpha/2^n} - e^{-q(x)\alpha}}{\left(1-e^{-q(x)\alpha/2^n}\right)\Big/\frac{\alpha}{2^n}} \int_U \frac{p\left(\frac{\alpha}{2^n}, x, d\eta\right)}{\frac{\alpha}{2^n}} e^{-q(\eta)\beta} \\
&\to \frac{1-e^{-q(x)\alpha}}{q(x)} \int_U q(x,d\eta) e^{-q(\eta)\beta} \quad (n\to\infty) \\
&\to \frac{1-e^{-q(x)\alpha}}{q(x)} q(x,U) \quad (\beta \to 0),
\end{aligned}$$

从而

$$P_x(D) = \frac{1-e^{-q(x)\alpha}}{q(x)} q(x,U).$$

此得证 (i). 令 $\alpha\to\infty$, 即得 (ii). 为证 (iii), 只要以上节定理 2 代替上面引用的上节引理 2. □

系 1 在 §6.1 定理 2 的条件下, 如 $q(x) > 0$, 则以 P_x- 概率 1, $x(t,\omega)$ 有第一个断点 τ, 而且它是跳跃点.

证 在定理 1(ii) 中令 $U = E - \{x\}$, 得右方值为 1. 根据跳跃点的定义及 τ 的性质, 知 τ 是跳跃点. □

由过程的齐次性, 可见在定理 1 及系 1 中, 如以 $P_{t,x}$ 换 P_x, 以 $[t, t+\alpha)$ 换 $[0,\alpha)$, 结论仍然成立.

称函数 $f(t)$ 在 $[0,c)$ 中是跳跃函数, 如对任一 α, $0<\alpha<c$, $f(t)$ 在 $[0,\alpha)$ 中只有有穷多个断点 τ_i, 它们都是跳跃点, 而且在任一连续区间中, $f(t)$ 为常数, 又 $f(\tau_i) = f(\tau_i+0)$ 或 $f(\tau_i) = f(\tau_i - 0)$. 在 $[0,\infty)$ 中的跳跃函数 (简称为 **跳跃函数**) 与以前所定义的阶梯函数一致.

称二函数 $q(x), q(x,A) (x\in E, A\in\mathcal{B})$ 为 **标准对**, 如果它们都非负有穷, 关于 x 为 Borel 可测函数, 关于 $A, q(x,A)$ 是 $\mathcal{B}$ 上的测度, 满足

$$q(x,\{x\}) = 0, \quad q(x) = q(x,E).$$

如 $q(x)$ 有界, 因之 $q(x,A)$ 也有界, 则称此标准对是 **有界的**.

如果存在转移函数 $p(t,x,A)$, 使对一切 $x\in E, A\in\mathcal{B}$, 有

$$p'(0,x,A) = q(x,A) - q(x)\chi_A(x), \tag{1}$$

则说此标准对自 $p(t,x,A)$ 导出.

定理 2 (i) 设自某可分的马氏过程 $\{x(t,\omega),t\geqslant 0\}$ 的转移概率 $p(t,x,A)$ 导出的 $q(x)$, $q(x,a)$ 为一标准对，则以概率 1 存在一随机变量 $\eta(\omega)(\leqslant\infty)$, 它是跳跃点的极限点，而且在 $[0,\eta(\omega))$ 中，几乎一切样本函数都是跳跃函数. 特别，如果此标准对有界，则几乎一切样本函数是跳跃函数.

(ii) 反之，设已给一标准对 $q(x),q(x,A)$, 则至少存在一马氏过程 $\{x(t,\omega),t\geqslant 0\}$, 使此标准对自其转移概率 $p(t,x,A)$ 导出，并满足 (C). 只有两种可能性：或者这样的 $p(t,x,A)$ 只有一个，这时此 $p(t,x,A)$ 所对应的可分马氏过程 $\{x(t,\omega),t\geqslant 0\}$ 的样本函数以概率 1 是跳跃函数；或者这样的 $p(t,x,A)$ 有无穷多个，这时每一 $p(t,x,A)$ 所对应的可分马氏过程在某个 $[0,\eta(\omega))$ 中是跳跃函数，又 $P(\eta(\omega)<\infty)>0$.

证 (i) 设标准对 $q(x)$, $q(x,A)$ 自可分马氏过程 $\{x(t,\omega),t\geqslant 0\}$ 的转移概率 $p(t,x,A)$ 导出. 如 $x(0,\omega)=z_1(\omega)$, 而且 $q(z_1(\omega))=0$, 则 $x(t,\omega)\equiv z_1(\omega),t\geqslant 0$, 于是 (i) 中结论得证. 否则，如 $q(z_1(\omega))>0$, 则存在样本函数的第一个断点 (跳跃点)$\tau_1(\omega)$, 使 $x(t,\omega)=z_1(\omega),0\leqslant t<\tau_1(\omega),x(\tau_1(\omega)+0,\omega)=z_2(\omega)(\neq z_1(\omega))$. 如 $q(z_2(\omega))=0$, 则 $x(t,\omega)\equiv z_2(\omega)$, 对一切 $t>\tau_1(\omega)$ 成立，否则如 $q(z_2(\omega))>0$, 则存在第二个断点 (跳跃点)$\tau_2(\omega)$, 使 $x(t,\omega)=z_2(\omega),\tau_1(\omega)<t<\tau_2(\omega),x(\tau_2(\omega)+0,\omega)=z_3(\omega)(\neq z_2(\omega))$. 如此继续. 于是以概率 1

$$P(\tau_{n+1}-\tau_n>\alpha|\tau_1,\cdots,\tau_n,z_1,\cdots,z_{n+1})=e^{-q(z_{n+1})\alpha}(\alpha>0),\tag{2}$$

$$P(z_{n+1}(\omega)\in A|\tau_1,\cdots,\tau_n,z_1,\cdots,z_n)=\frac{q(z_n,A)}{q(z_n)}.\tag{3}$$

(如 $q(z_{n+1})=0$,(2) 仍有意义. 但如 $q(z_n)=0$, 则 (3) 无意义.) 因而对 $t<\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n(\omega)=\eta(\omega)$, 几乎一切样本函数在 $[0,\eta(\omega))$ 中是跳跃函数 [1].

如标准对有界，设 $q(x)$ 的上确界为 d, 并令 $P_t(A)=P(x(t,\omega)\in A)$, 则对 $s>0$, 有

$$\begin{aligned}P(x(t,\omega)\neq x(t+s,\omega))&=\int_E[1-p(s,x,\{x\})]p_t(dx)\\&\leqslant\sup_{x\in E}(1-P(s,x,\{x\}))\leqslant 1-e^{-ds}\leqslant ds,\end{aligned}$$

由此及 §3.2, 系 1 可见几乎一切样本函数是跳跃函数.

(ii) 反之，设已给标准对 $q(x),q(x,A)$, 选随机变量列 $z_1,\tau_1,z_2\tau_2,\cdots$, 使它们满足 (2),(3).[如 $q(z_n(\omega))=0$, 则取 $\tau_n(\omega)=\tau_{n+1}(\omega)=\cdots=\infty,z_{n+1}(\omega)=z_{n+2}(\omega)=\cdots=z_n(\omega)$], 并定义

$$x(t,\omega)=\begin{cases}z_1(\omega), & \text{如}0\leqslant t<\tau_1(\omega),\\ z_2(\omega), & \text{如}\tau_1(\omega)\leqslant t<\tau_2(\omega),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{cases}$$

因而 $x(t,\omega)$ 在 $t\in[0,\eta^{(1)}(\omega))$ 中有定义，这里 $\eta^{(1)}(\omega)=\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n(\omega)$. 若 $P(\eta^{(1)}(\omega)=\infty)=1$, 则几乎一切样本函数 $x(t,\omega)$ 对一切 $t\geqslant 0$ 有定义. 此情况当 $q(x)$ 有界时必然出现. 若 $P(\eta^{(1)}(\omega)=\infty)<1$, 则可用下法 (自然可能还有其它方法) 补定义 $x(t,\omega)$ 于 $t\geqslant\eta^{(1)}(\omega)$. 选

[1] $\eta(\omega)$ 称为过程的 **第一个飞跃点**.

随机变量 $z_1^{(1)}(\omega)$, 使它与一切 z_n,τ_n 独立而具有某分布 $\pi(A)$, 并视 $\eta^{(1)}(\omega)$ 如同 0, 视 $z_1^{(1)}(\omega)$ 如同 $x(0,\omega)$, 继续上面的造法：取 $\tau_1^{(1)}(\omega)$, 使

$$P(\tau_1^{(1)}(\omega)-\eta^{(1)}(\omega)\geqslant t|z_1,\tau_1,\cdots,\eta^{(1)},z_1^{(1)})=e^{-q(z_1^{(1)}(\omega))t},$$

并定义 $x(t,\omega)=z_1^{(1)}(\omega)$, 如 $\eta^{(1)}(\omega)\leqslant t<\tau_1^{(1)}(\omega),\cdots$, 如此继续，直到第二个极限点 $\eta^{(2)}(\omega)=\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n^{(1)}(\omega)$. 又视 $\eta^{(2)}(\omega)$ 如同 0, 选 $z_1^{(2)}(\omega)$ 使具有相同的分布 $\pi(A)$, 并与 $z_n,\tau_n,\cdots,\eta^{(1)},z_1^{(1)},\cdots,z_n^{(1)},\tau_n^{(1)},\cdots$ 独立. 这样下去，得 $\{\eta^{(n)}(\omega)\}$ 易见 $P(\eta^{(n)}(\omega)\to\infty)=1$[1]. 于是对每一个固定的 $t\geqslant 0,x(t,\omega)$ 以概率 1 有定义. 由于 $\pi(A)$ 有无穷多种取法，这样的过程也有无穷多个. 剩下要证 $x(t,\omega)(t\geqslant 0)$ 是齐次马氏过程，而且已给的 $q(x),q(x,A)$ 自它的转移概率导出.

为此注意下列事实：如随机变量 $y(\omega)$ 有指数分布，即如 $P(y(\omega)>t)=e^{-ct}(c>0)$, 则对任意 $s\geqslant 0,t\geqslant 0$, 有

$$P(y>s+t|y>s)=P(y>t)=e^{-ct}.$$

由此事实可见，如于时刻 s 中断上面的造法，因而 $x(t,\omega)$ 只定义于 $t\leqslant s$, 然后以 $x(s,\omega)$ 的分布为开始分布，视 s 如同 0, 并重新开始上面的构造而得 $y(u,\omega),u\geqslant 0$, 则过程

$$\widetilde{x}(t,\omega)=\begin{cases}x(t,\omega), & \text{如}t\leqslant s,\\ y(u,\omega), & \text{如}t=s+u\end{cases}$$

与 $x(t,\omega)(t\geqslant 0)$ 是同一过程. 这表示

a) $P(x(t)\in A|x(r),r\leqslant s)=P(x(t)\in A|x(s))$, 即过程的马氏性.

其次，上面造法与时间起点 (即 t 轴原点) 的选择无关，故

b) $p(s,x;t+s,A)=P_{s,x}(x(s+t)\in A)=P_{0,x}(x(t)\in A)=p(t,x,A)$.

最后，由于所造过程的转移函数 $p(t,x,A)$ 满足关系式

$$p(t,x,\{x\})\geqslant P_x(\tau_1>t)=e^{-q(x)t},$$

故条件 (C) 满足. 由定理 1 及上述过程的构造，可见 $q(x),q(x,A)$ 自 $p(t,x,A)$ 导出. □

以后称刚才所造出的齐次马氏过程为 **Doob过程**. 它由标准对 $q(x),q(x,A)$ 及分布 π 所决定.

(二) 为了讨论向后方程的解，先作一些准备. 对已给标准对 $q(x),q(x,A)$, 定义

$$\left.\begin{aligned}&{}_0p(t,x,A)=\chi_A(x)e^{-q(x)t},\\&{}_{n+1}p(t,x,A)=\int_0^t ds\int_{E\setminus\{x\}}e^{-q(x)s}{}_np(t-s,y,A)q(x,dy);\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

或

$$\left.\begin{aligned}&{}_0p(t,x,A)=\chi_A(x)e^{-q(x)t},\\&{}_{n+1}p(t,x,A)=\int_0^t ds\int_E {}_np(s,x,dy)\int_{A-A\{y\}}e^{-q(z)(t-s)}q(y,dz).\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

---

[1]利用 §1.5 题 13.

这里 $\chi_A(x)$ 是可测集 A 的示性函数. 令

$$\overline{p}(t,x,A)=\sum_{n=0}^{\infty}{}_np(t,x,A). \tag{6}$$

可以证明：这些数具有下列概率意义. 设 $p(t,x,A)$ 为任一转移函数，使 $q(x),q(x,A)$ 自它导出，又设 $\{x(t,\omega)\ (t\geqslant 0)\}$ 是以 $p(t,x,A)$ 为转移概率的可分马氏过程，则

$$\begin{aligned}&{}_0p(t,x,A)=P_x(\omega:x(t,\omega)\in A,\ \text{而且}x(u,\omega)\equiv x,\ 0\leqslant u\leqslant t),\\&{}_{n+1}p(t,x,A)=P_x(\omega:x(t,\omega)\in A,\ \text{在}[0,t]\ \text{中恰有}\ n+1\ \text{个跳跃点}\ \tau_i,\\&\qquad\text{而且在}\ [0,\tau_1),[\tau_1,\tau_2),\cdots,[\tau_{n+1},t]\ \text{中},\ x(u,\omega)\ \text{各为常数}).\end{aligned} \tag{7}$$

实际上，前一式由 §6.1 定理 1 推出. 为简单计，试对 ${}_1p(t,x,A)$ 详细证明，对其余各式的证明类似. 设 $x\neq y$, 取

$$M_n=\left(\omega:\ \text{存在某整数}v,0<v<2^n,\ \text{使}x(s,\omega)=\begin{cases}x, & 0\leqslant s<\dfrac{v}{2^n}t\\ y\in A, & \dfrac{v+1}{2^n}t<s\leqslant t\end{cases}\right), \tag{8}$$

$$M=\left(\omega:\ \text{存在某常数}\tau,0<\tau<t,\ \text{使}x(s,\omega)=\begin{cases}x, & 0\leqslant s<\tau\\ y\in A, & \tau<s\leqslant t\end{cases}\right), \tag{9}$$

则 $M=\lim\limits_{n\to\infty}M_n$, 而 M 是 (7) 右方括号中的事件 ($n=0$ 时). 因此

$$\begin{aligned}P_x(M)&=\lim_{n\to\infty}P_x(M_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{v=1}^{2^n-2}\int_{E\backslash\{x\}}e^{-q(x)\frac{v}{2^n}t}p\Big(\frac{t}{2^n},x,dy\Big){}_0p\Big(\frac{2^n-v-1}{2^n}t,y,A\Big)\\&=\int_0^t ds\int_{E\backslash\{x\}}e^{-q(x)s}{}_0p(t-s,y,A)q(x,dy).\end{aligned}$$

还可以给出 (7) 式的直观证明. 左方值可看成：自 x 出发，在 x 停留时间 s(概率为 $e^{-q(x)s}$), 于长为 ds 的时间内，发生第一次跳跃到 dy 中 (概率为 $q(x,dy)ds$), 再自 y 出发，经 n 次跳跃到 A(概率为 ${}_np(t-s,y,A)$), 将此各概率相乘，并对 ds 自 0 到 t 积分，对 dy 在 $E-\{x\}$ 上积分，所得即右方值. 由概率意义此值显然应等于 $P_x(M),M$ 是 (7) 右方括号中事件.

在以上论述中，利用了第一个跳跃点. 类似地，如果利用最后一个 (即第 $n+1$ 个) 跳跃点，便可证明 (5) 式.

因此，$\overline{p}(t,x,A)$ 是自 x 出发，经有穷多次跳跃后，于 t 时落于 A 的概率.

由此可见，如 $x(t,\omega)$ 以概率 1 是跳跃函数，则

$$p(t,x,A)=\overline{p}(t,x,A),$$

一般地则应是

$$p(t,x,A)\geqslant\overline{p}(t,x,A),$$

而

$$F_{x,A}(t)=p(t,x,A)-\overline{p}(t,x,A)=P_x(\eta(\omega)\leqslant t,x(t,\omega)\in A). \tag{10}$$

特别

$$F_{x,E}(t)=1-\overline{p}(t,x,E)=P_x(\eta(\omega)\leqslant t)=\lim_{n\to\infty}P_x(\tau_n(\omega)<t)$$

是第一个飞跃点 $\eta(\omega)$ 的分布函数.

与 (7) 的证明相似，可证 $p(t,x,A)$ 满足积分方程

$$p(t,x,A)=\int_0^t ds\int_{E\setminus\{x\}}e^{-q(x)s}p(t-s,y,A)q(x,dy)+e^{-q(x)t}\chi_A(x), \tag{11}$$

得证此式的关键仍在于"存在第一个断点是跳跃点"这一事实. 此事实所以正确是因为标准对的定义中包含条件 $q(x)=q(x,E)$ (参看定理 1 (ii)).

由 (11) 可再一次推出向后方程 (见 §6.1 定理 3). 实际上，在 (11) 中令 $t-s=u$ 即得

$$p(t,x,A)=\int_0^t du\int_{E\setminus\{x\}}e^{-q(x)(t-u)}p(u,y,A)q(x,dy)+e^{-q(x)t}\chi_A(x),$$

故

$$\begin{aligned}p'(t,x,A)=&\int_{E\setminus\{x\}}p(t,y,A)q(x,dy)\\&-\int_0^t du\int_{E-\{x\}}q(x)e^{-q(x)(t-u)}p(u,y,A)q(x,dy)-q(x)e^{-q(x)t}\chi_A(x)\\=&\int_{E\setminus\{x\}}p(t,y,A)q(x,dy)\\&-q(x)\times\left[\int_0^t du\int_{E\setminus\{x\}}e^{-q(x)(t-u)}p(u,y,A)q(x,dy)+e^{-q(x)t}\chi_A(x)\right],\end{aligned}$$

整理后即得向后方程

$$p'(t,x,A)=\int_{E\setminus\{x\}}p(t,y,A)q(x,dy)-q(x)p(t,x,A). \tag{12}$$

如果除假定 $q(x),q(x,A)$ 是标准对外，再补设几乎一切样本函数在任何固定的 $t\geqslant 0$ 的前面，有最后一个断点为跳跃点 (例如，当 $q(x)$ 有界或几乎一切样本函数是跳跃函数时，这条件满足), 于是利用最后一个跳跃点，由同样的考虑，对 $t_2>t_1$ 可得

$$\begin{aligned}p(t_2,x,A)=&\int_{t_1}^{t_2}ds\int_E p(s,x,dy)\int_{A-A\{y\}}e^{-q(z)(t_2-s)}q(y,dz)\\&+\int_A e^{-q(y)(t_2-t_1)}p(t_1,x,dy)\end{aligned} \tag{13}$$

两边同时减去 $\int_A e^{-q(y)(t_2-t_1)}p(t_1,x,dy)$, 除以 t_2-t_1, 并令 $t_1\to t,t_2\to t$, 如 $q(x)$ 在 A 上有界，则

$$\lim_{\substack{t_1\to t\\t_2\to t}}\frac{p(t_2,x,A)-\int_A e^{-q(y)(t_2-t_1)}p(t_1,x,dy)}{t_2-t_1}=\int_E p(t,x,dy)q(y,A-A\{y\}),$$

将 $e^{-q(y)(t_2-t_1)}$ 按 Taylor 展开，并注意 $q(y,A\{y\})=0$, 得

$$p'(t,x,A)=-\int_A q(y,E-A)p(t,x,dy)+\int_{E\setminus A} q(y,A)p(t,x,dy), \tag{14}$$

称方程 (14) 为 **向前方程**.

如果只假定 $q(x),q(x,A)$ 为标准对，自然无从保证 t 以前最后一个跳跃点以概率 1 存在，由于上述讨论中只用了各种可能的转移方法中的一种，(13),(14) 中的等号都应改为 "$\geqslant$" 号.

总结上述结果得

定理 3 设自 $p(t,x,A)$ 导出的 $q(x),q(x,A)$ 是一标准对，则向后方程 (12) 成立，而 (14) 中等号应换成 "$\geqslant$" 号，如补设以 $p(t,x,A)$ 为转移概率的可分马氏过程的几乎一切样本函数，在固定的 t 前，有最后一断点为跳跃点 [1] (例如 $q(x)$ 在 E 上有界或等价地 (C) 均匀成立时此条件满足), 而且 $q(x)$ 在 A 上有界，则向前方程 (14) 也成立.

在实际问题中，常常能由直观判断某一随机现象是马氏过程，而且根据观察资料可以求出 $q(x),q(x,A)$, 因为 $q(x)=1/E_x\tau$ 及 $p(t,x,A)=q(x,A)t+o(t),x\bar{\in}A$. 它们只需由短时间的观察就可近似地决定 (故有人称它们为过程的无穷小特征). 相反地，转移概率却一般很难由观察确定. 因此自然地问：能否以及如何根据 $q(x),q(x,A)$ 以求出 $p(t,x,A)$? 容易想到，方法之一是在开始条件

$$p(0,x,A)=\chi_A(x) \tag{15}$$

下解向后方程或向前方程. 当然，我们重视的只是这样的解 $p(t,x,A)$, 它是一个转移函数. 这时理论上会发生解的存在与唯一性问题.

如果 $q(X),q(x,A)$ 是一标准对，由上述已经知道：作为转移函数的解总是存在的，而且或者只有一个，或者有无穷多个. 如果 $q(x)$ 有界，解是唯一的.

为了具体地求出一解，考虑由 (6) 定义的函数 $\overline{p}(t,x,A)$, 它是自 x 出发，经有穷次跳跃后，于 t 时位于 A 中的概率. 由这概率意义，可见 $\overline{p}(t,x,A)$ 应是一广转移函数；就是说，它满足转移函数定义中的一切条件，只是 $\overline{p}(t,x,E)\leqslant 1$. 其次，分别将 (4),(5) 对一切可能的 n 求和，便得到 (11) 与 (13)(将其中的 $p(t,x,A)$ 换为 $\overline{p}(t,x,A)$). 微分后可见 $\overline{p}(t,x,A)$ 是二方程在上述开始条件下的一个解. 由于上述概率意义 (其中没有估计到可经无穷多次跳跃或其它可能的转移方式), 故如 $p(t,x,A)$ 是向后方程的任一转移函数解，$p(0,x,A)=\chi_A(x)$, 则必

$$p(t,x,A)\geqslant\overline{p}(t,x,A),$$

故称 $\overline{p}(t,x,A)$ 为 **最小解**. 如补设 $q(x)$ 有界，则由于以 $q(x),q(x,A)$ 为标准对的马氏过程的样本函数以概率 1 是跳跃函数，故在 $[0,t]$ 中只有有穷多个跳跃点，除有穷多次跳跃外别无其它转移方式，故

$$p(t,x,A)=\overline{p}(t,x,A),$$

而 $p(t,x,A)$ 是向后方程在 (15) 下的唯一转移函数解.

[1] 我们约定把 $\tau_0(\omega)\equiv 0$ 也看成一断点，因而，断点总存在.

§6.3 补充与习题

1. 设 $q(x)$ 在可测集 B 上有界，又 A 为 B 的可测子集，点 $x_1 \in B, x_1 \neq x \in B-A$. 试证对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\alpha > 0$, 使对 $m = \left[\frac{\alpha}{\delta}\right] + 1(\alpha \geqslant \delta > 0$ 任意), 有

$$p(m\delta, x, A) \geqslant (1-\varepsilon)\frac{1-p(\delta,x,\{x\})^m}{1-p(\delta,x,\{x\})}p(\delta,x,A);$$

$$p(m\delta, x_1, \{x\}) \geqslant (1-\varepsilon)p(\delta,x_1,\{x\})\frac{1-p(\delta,x,\{x\})^m}{1-p(\delta,x,\{x\})}.$$

提示：存在 $\alpha > 0$, 使

$$(1-\varepsilon)\alpha q(x) \leqslant 1 - e^{-q(x)\alpha} \leqslant \varepsilon, \quad x \in B.$$

故

$$p(m\delta, x, A) \geqslant \sum_{v=0}^{m-1} p(\delta, x, \{x\})^v \int_A e^{-q(y)(m-v-1)\delta} p(\delta, x, dy);$$

$$p(m\delta, x_1, \{x\}) \geqslant \sum_{v=0}^{m-1} p((m-v-1)\delta, x_1, \{x_1\}) \times p(\delta, x_1, \{x\}) p(\delta, x, \{x\})^v.$$

2. 设点 x 使 $q(x) = \infty, x\overline{\in} A, q(y)$ 在可测集 A 上有界，又 $x_1 \neq x$, 试证

$$\lim_{t\to 0}\frac{p(t,x,A)}{1-p(t,x,\{x\})} = \lim_{t\to 0}\frac{p(t,x_1,\{x\})}{1-p(t,x,\{x\})} = 0.$$

提示：利用上题结果.

3. 设在相空间 E 中引进距离 $\rho(x,y)=0$ 或 1, 视 $x=y$ 或 $x\neq y$ 而定. 又设右连续过程满足 §6.1(C), 考虑点 $x\in E$ 及单点集 $\{x\}$, 定义 $\tau_x(\omega) = \inf(t : x(t,\omega) \neq x)$, 并回忆 §5.1(7) 中的 $\tau_{\{x\}}(\omega)$, 试证

$$\tau_x = \tau_{\{x\}}.$$

提示：由 $(t : x(t) \neq x) \subset (t : \rho(X_t^0, E\backslash x) = 0)$, 故 $\tau_x = \inf(t : x(t) \neq x) \geqslant \inf(t : \rho(X_t^0, E\backslash x) = 0) = \tau_{\{x\}}$. 反之，由所引进距离的离散性及 $\tau_{\{x\}}$ 的定义，对 $\varepsilon > 0$, 有

$$\rho(X^0_{\tau_{\{x\}}-\varepsilon}, E\backslash x) = 1, \ \rho(X^0_{\tau_{\{x\}}+\varepsilon}, E\backslash x) = 0,$$

可见存在 ε' 使 $\varepsilon \geqslant \varepsilon' \geqslant 0$, 使

$$x(\tau_{\{x\}}+\varepsilon') \in E\backslash x, \text{ 或 } x(\tau_{\{x\}}+\varepsilon') \neq x.$$

既然 $\varepsilon(\varepsilon')$ 可任意小，故由 τ_x 的定义得 $\tau_{\{x\}} \geqslant \tau_x$.

4. 如上题假定，而且设 §6.1 定理 2 中条件 (α) 或 (β) 成立，试证对 $f \in D_{\mathfrak{A}}$, 有

$$\mathfrak{A}f(x) = \int_E f(y)q(x,dy) - q(x)f(x),$$

其中 $\mathfrak{A}$ 为广无穷小算子.

提示：此过程是 Feller 的，因为可设拓扑离散. 利用 §5.1(16). 当 $x \in U, d(U) \to 0$ 时

$$E_x(\tau_U) \to E_x(\tau_{\{x\}}) = 1/q(x),$$

$$x(\tau_U) \to x(\tau) \quad (\tau = \tau_x).$$

当 f 为有界连续时，$E_x f(x(\tau_U)) \to E_x f(x(\tau)) = \int_E f(y)\Pi(x, dy)$. 而 $\Pi(x, A) = \frac{q(x,A)}{q(x)}$ 或 $\chi_A(x)$, 视 $q(x) > 0$ 或 $q(x) = 0$ 而定. 注意，将本题结果与向后方程比较，形式上有 $p'(t, x, A) = \mathfrak{A}p(t, x, A)$. 但这并不表示 $p(t, x, A) \in D_{\mathfrak{A}}$.

5. 对 §6.1 例 1, 试证 $\mathfrak{A}f = Qf$, 而且

$$P(t) = e^{Qt}.$$

提示：由于 $\{q_i\}$ 是有穷集，故有界，它所对应的过程唯一而且可取为右连续的. 由上题 $\mathfrak{A}f(i) = Qf(i)$. 因定义在 $E = (0, 1, \cdots, n)$ 上的函数 f(即 $n+1$ 维矢量) 都是有界的，而且 $\mathfrak{A}f$ 也有界，由距离的离散性还都是连续的，故 $D_{\mathfrak{A}}$ 重合于 $n+1$ 维矢量空间. 特别 $p_{ij}(t)$ 作为 i 的函数也属于 $D_{\mathfrak{A}}$. 为了求出 $p_{ij}(t)$, 只要求下列二方程的唯一解： $P'(t) = QP(t), P(0) = 1$, 得 $P(t) = e^{Qt}$. 由于 E 的紧性，有 $A = \widetilde{A} = \mathfrak{A}$.

对 §6.1 例 2, 类似有 $\mathfrak{A}f(i) = Qf(i)$.

6. 设 $\{x(t, \omega), t \geqslant 0\}$ 满足 §6.1(C) 而且是 Borel 可测的，又 A 为相空间的可测子集，令 $S_A(\omega) = (t : x(t, \omega) \in A)$, 故 $L(S_A(\omega))$ 是停留在 A 中的总时间， L 表勒贝格测度. 试证 $E_x[L(S_A(\omega))] = \int_0^\infty p(t, x, A)dt$. 更一般地; $E_x[L([0, u] \cap S_A(\omega))] = \int_0^u p(t, x, A)dt$.

提示：由过程的 Borel 可测性及 Fubini 定理，几乎对一切 $\omega, S_A(\omega)$ 是 Borel 可测集，故 $L(S_A(\omega))$ 几乎对一切 ω 有意义. 对每一 t 定义 $y(t, \omega) = 1$ 或 0, 视 $t \in S_A(\omega)$ 或 $t \overline{\in} S_A(\omega)$ 而定. 则 $\int_0^\infty y(t, \omega)dt = L(S_A(\omega))$, 然后用 Fubini 定理.

7. 对生灭过程，令 $V(0) = 1, V(k) = 0 (k > 0)$, 用 §6.3(36) 定义 ξ, 则 ξ 是在第一个飞跃点以前总共在状态 0 的时间. 试证

$$P_0(\xi \leqslant x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\sum\limits_{i=0}^{\infty} g_i}, & \text{如} x \geqslant 0, \\ 0, & \text{如} x < 0, \end{cases}$$

其中 $g_0 = \frac{1}{b_0}, g_i = \frac{a_i a_{i-1} \cdots a_1}{b_i b_{i-1} \cdots b_1 b_0}$. 并求 $E_0\xi$.

提示：易求出

$$\varphi_{0\,n}(\lambda) = 1\Big/\Big(\lambda \sum_{i=0}^{n-1} g_i + 1\Big),$$

由 Laplace 变换得 $P_0(\xi^{(n)} \leqslant x) = 1 - e^{-x/\sum\limits_{i=0}^{n-1} g_i}$ 或 0, 视 $x \geqslant 0$ 或 $x < 0$ 而定. 又 $E_0\xi = \sum\limits_{i=0}^{\infty} g_i$.

8. 设 $E = [0, 1], \mathcal{B}$ 为区间 E 中全体 Borel 子集所成 σ 代数，以 $L(A)$ 表集 A 的勒贝格 (Lebesgue) 测度， $\chi_A(x)$ 表 A 的示性函数. 求证

$$p(t, x, A) = e^{-t}\chi_A(x) + (1 - e^{-t})L(A) \quad (t \geqslant 0)$$

是 $(E,\mathcal{B})$ 中齐次转移函数，且 $\lim\limits_{t\to 0}p(t,x,\{x\})=1$. 设 $\{x_t, t\geqslant 0\}$ 是以 $p(t,x,A)$ 为转移概率的可分马氏过程，试问它的样本函数是否几乎都是跳跃函数？

附记. 间断型马氏过程的进一步研究主要集中在满足 §6.1(C) 的具可列多个状态的过程上. 这类过程所以重要，一是作为一般间断型过程的前奏而出现，一是实际中常产生这类过程如生灭过程、分枝过程等. 研究的课题主要有：转移函数的分析性质、样本函数的性质、积分型泛函的极限定理以及求向后或向前方程的全部解等等. 关于生灭过程也积累了许多文献. 近年来，我国在间断型马氏过程方面作了许多工作，其中一部分详见本章文献.

§6.1 中许多结果对较一般的相空间 $(E,\mathcal{B})$(不必限 E 为一维 Borel 可测集) 及广转移函数 $p(t,x,A)$ 也正确，详见本章文献 [17].

参考文献

[1] 化工中的一个马尔科夫过程问题，复旦大学数学论文集， 1960, 124–128.

[2] 王梓坤， Классификация всех процессов размножения и гибели, Научные Доклады высшей школы, Физ.-Матем. наыки, 4, 1958, 19–25.

[3] 王梓坤，一个生灭过程，科学记录，新辑， 3:8 (1959), 266–268.

[4] 王梓坤， *On distributions of functionals of birth and death processes and their applications in the theory of queues*, Scientia Sinica (中国科学), X:2 (1961), 160–170.

[5] 王梓坤，生灭过程构造论，数学进展， 5:2 (1962), 137–179.

[6] 王梓坤，生灭过程的遍历性与零一律，南开大学学报 (自然科学), 5:5(1964), 89–94.

[7] 朱成熹，非齐次马尔科夫链的转移函数的分析性质，数学进展， 8:1 (1965), 34–54.

[8] 朱成熹，非齐次马尔科夫链样本函数的性质，南开大学学报 (自然科学), 5:5 (1964), 95–104.

[9] 李志阐，半群与马尔科夫过程齐次转移函数的微分性质，数学进展， 8:2 (1965), 153–160.

[10] 李漳南、吴荣，可列状态马尔科夫链可加泛函的某些极限定理，南开大学学报 (自然科学), 5:5 (1964), 121–140.

[11] 吴立德，关于一类随机游动中的逗留时间分布，复旦大学数学论文集， 29–32.

[12] 吴立德，齐次可数马尔科夫过程积分型泛函的分布，数学学报， 13:1 (1963), 86–93.

[13] 吴立德，可数马尔科夫过程状态的分类，数学学报， 15:1 (1965), 32–41.

[14] 吴立德、吴霭成，有限马尔科夫过程参量的估计，数学进展， 8:2 (1965), 168–172.

[15] 施仁杰，可列马尔科夫过程的随机时间替换，南开大学学报 (自然科学), 5: (1964), 51–88.

[16] 孙振祖，一类马氏过程的表达式，北京大学研究生毕业论文， 1959.

[17] 许宝騄，欧氏空间上纯间断的时齐马尔科夫过程的概率转移函数的可微性，北京大学学报， 3 (1958), 257–270.

[18] 杨超群，可列马氏过程的积分型泛函和双边生灭过程的边界性质，数学进展， 7:4 (1964), 397–424.

[19] 杨超群，一类生灭过程，数学学报， 15:1 (1965), 9–31.

[20] 杨超群，关于生灭过程构造论的注记，数学学报， 15:2 (1965), 174–187.

[21] 杨超群，双边生灭过程，南开大学学报 (自然科学), 5:5 (1964), 9–40.

[22] Feller W., *The birth and death processes as diffusion processes*, J. Math. Pures and Appl., (9) 38 (1959), 301–345.

[23] Karlin S., Mcgregor J., *The classification of birth and death processes*, Trans. Amer. Math. Soc., 86:2 (1957), 366–400.

第七章 平稳过程

§7.1 平稳过程与保测变换

(一) 为确定计，设 $T=[0,\infty)$. 考虑概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 及定义于其上的实值随机过程

$$X(\omega)=\{x(t,\omega),\ t\in T\},$$

称它为 **平稳过程**, 如对任意常数 $s\geqslant 0$, 任意正整数 n, 及任意 $t_i\in T, c_i\in R_1,\ i=1,\cdots,n$, 有

$$P(x(t_i)\leqslant c_i,\ i=1,\cdots,n)=P(x(s+t_i)\leqslant c_i,\ i=1,\cdots,n). \tag{1}$$

在平稳过程中，“推移”的观念非常重要. (1) 式表示，平稳过程的特征是，它的有穷维分布不随推移而变. 精确些说，定义过程

$$X_s(\omega)=\{x(s+t,\omega),\ t\in T\},$$

如果 $X(\omega)$ 及 $X_s(\omega)$ 有相同的有穷维分布，则 $X(\omega)$ 是平稳过程.

定理 1 为使 $X(\omega)$ 是平稳过程，必须且只需下列诸条件之一满足：

(i) 对任意 $s\geqslant 0, X(\omega)$ 与 $X_s(\omega)$ 有相同的分布；

(ii) 对任意 n 元实值 Borel 可测函数 $f(y_1,\cdots,y_n)$, 有

$$Ef(x(t_1),\cdots,x(t_n))=Ef(x(s+t_1),\cdots,x(s+t_n)). \tag{2}$$

(iii) 对任意定义于 R_1^T 上的实值 $\mathcal{B}_1^T$ 可测函数 $\varphi(e(\cdot))$, 有

$$E\{\varphi(X)\}=E\{\varphi(X_s)\}. \tag{3}$$

这里 (2),(3) 成立的意义是：式中如有一方存在，则他方存在，而且二者相等.

证 由于过程的分布由有穷维分布族唯一确定 (见附篇定理 4), 故由 (1) 立得 (i). 以 $P_{X_s}(B)=P(X_s\in B)$ 表 X_s 的分布， $B\in\mathcal{B}_1^T, P_{X_0}=P_X$. 则由 (i) 得

$$E\{\varphi(X_s)\}=\int_\Omega\varphi(X_s(\omega))P(d\omega)=\int_{R_1^T}\varphi(e)P_{X_s}(de)=\int_{R_1^T}\varphi(e)P_X(de)=E\{\varphi(X)\},$$

此即 (iii). 取 $\varphi=fC$, 其中 C 为 R_1^T 到 R_1^n 的变换

$$C(e(\cdot))=(e(t_1),\cdots,e(t_n)),$$

则 (iii) 化为 (ii). 在 (ii) 中取

$$f(y_1,\cdots,y_n)=\prod_{i=1}^n\chi_{(-\infty,C_i]}(y_i),$$

则 (ii) 化为 (1). □

注 1 如复值函数 $\psi=\psi_1+i\psi_2$, 其中实值函数 ψ_1 及 ψ_2 满足 (ii) 或 (iii) 中条件, 则 (ii) 或 (iii) 中结论也对 ψ 正确, 因为只要分别考虑 ψ_1,ψ_2.

以上考虑了 $T=[0,\infty)$ 的情形, 此外, 通常还考虑 $T=(-\infty,\infty), T=(0,1,2,\cdots)$ 或 $T=(\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots)$, 不难类似地下定义并证明定理 1 的相应结果仍成立, 差别只在于把 "$s\geqslant 0$" 分别改为 "实数 s","非负整数 s","整数 s".

对取抽象值的随机过程也可以定义平稳性. 设 T 为上述任何一参数集, 称取值于可测空间 $(E,\mathcal{B})$ 的随机过程 $\{x(t,\omega),t\in T\}$ 为 **平稳的**, 如对任意 $t_i\in T, s+t_i\in T$, $i=1,\cdots,n$, 有

$$P(x(t_i,\omega)\in B_i,\ i=1,\cdots,n)=P(x(s+t_i,\omega)\in B,\ i=1,\cdots,n), \tag{4}$$

其中 $B_i\in\mathcal{B}$ 任意.

特别, 当 $E=\{a(\cdot)\}$ 是 T 上全体复值函数的集, 而 $\mathcal{B}$ 为含一切如下型 $a(\cdot)$- 集的最小 σ 代数

$$(a(\cdot):\mathrm{Re}\,a(x)\leqslant c_1,\mathrm{Im}\,a(x)\leqslant c_2)$$

$(x\in T, c_1\in R_1, c_2\in R_1)$ 时, 满足 (4) 的过程称为 **复值平稳过程**. 这时 (4) 化为: 对任意 $c_{1,i}\in R_1, c_{2,i}\in R_1$, $i=1,\cdots,n$, 有

$$\begin{aligned}&P(\mathrm{Re}\,x(t_i)\leqslant c_{1,i},\ \mathrm{Im}\,x(t_i)\leqslant c_{2,i},\ i=1,\cdots,n)\\&\quad=P(\mathrm{Re}\,x(s+t_i)\leqslant c_{1,i},\ \mathrm{Im}\,x(s+t_i)\leqslant c_{2,i},\ i=1,\cdots,n).\end{aligned}$$

(二) 设参数集为 $(0,1,2,\cdots)$, 考虑实值平稳序列 $\{x_n(\omega),n\geqslant 0\}$. 于 (2) 中取 $t_i=i-1, s=1$, $f(y_1,\cdots,y_n)=\chi_{B_n}(y_1,\cdots,y_n)$, 其中 B_n 为 n 维 Borel 集, 则 (2) 化为

$$P([x_0(\omega),\cdots,x_{n-1}(\omega)]\in B_n)=P([x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega)]\in B_n). \tag{5}$$

(5) 式可如下理解: 在 $\mathcal{F}(x_n(\omega),n\geqslant 0)$ 的全体有穷维柱集 [1] 的集类 C 上定义一个到自身的一步推移变换 T, 满足条件

$$T([x_0(\omega),\cdots,x_{n-1}(\omega)]\in B_n)\doteq([x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega)]\in B_n), \tag{6}$$

这里 $A\doteq B$ 表 $P(A\Delta B)\equiv P(A\backslash B)+P(B\backslash A)=0$. (5) 式表示, 在 C 上 T 保持测度不变.

试研究下列问题:

(A) 既然 T 已在 C 上有定义, 能否合理地扩大它的定义域到全 $\mathcal{F}'\{x_n(\omega),n\geqslant 0\}$ 上?

(B) 平稳过程与保测变换有何关系?

我们先从保测变换的定义开始.

取 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数 $\mathfrak{S}$ 而考虑概率空间 $(\Omega,\mathfrak{S},P), P$ 为完全测度. 以下无特别声明时, 可测集与随机变量都是指 $\mathfrak{S}$ 可测集与 $\mathfrak{S}$ 可测函数. 设 T 为把 $\mathfrak{S}$ 中的集变到 $\mathfrak{S}$ 中的集变换, 如果它满足下列条件 [2], 就称 T 为 **保测集变换**.

---

[1] 这里有穷维柱集指形如 $[(x_{m_1}(\omega),\cdots,x_{m_n}(\omega))\in B_n]$ 之集, $B_n\in\mathcal{B}_n$.

[2] 下面 (7) 及 (9) 中 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 表有穷个或可列多个集 A_n 之和.

1° 设 A_1 是 A 的象，则 A_2 也是 A 的象的充分必要条件是 $P(A_1\Delta A_2)=0$;

2° $P(A)=P(TA)$;

3° $T\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)\doteq\bigcup_{n=1}^{\infty}TA_n$, (7)

$$T(\Omega\backslash A)\doteq\Omega\backslash TA. \tag{8}$$

由 3° 及集的对偶规则推出

$$T\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\Big)\doteq\bigcap_{n=1}^{\infty}TA_n, \tag{9}$$

$$T\Omega=T(A\cup(\Omega\backslash A))\doteq TA\cup T(\Omega\backslash A)\doteq\Omega, \tag{10}$$

$$T\phi\doteq\phi, \tag{11}$$

并且如 $A_1\subset A_2$, 则 $TA_1\subset TA_2$(除可能差一零测集外).

如果每一可测集 B 都是某可测集 A 在变换 T 下的象，则可定义逆变换 T^{-1},T^{-1} 也是保测集变换，此时称 T 为 **可逆** 保测集变换.

于是，保测集变换 T 将 σ 代数 $\mathfrak{S}$ 变为子 σ 代数 $T\mathfrak{S}$. 利用 T 可以定义保测集变换

$$T^k=T(T^{k-1})=T^{k-1}(T)\ (k>0,T^0=I),$$

如 T 可逆，则上式中的 k 可为任意整数.

T 以自然的方式派生 $\mathfrak{S}$ 中集的示性函数的变换：如 $A\to TA$, 则定义 $\chi_A\to\chi_{TA}$. 以下定理表示，此函数变换的定义域可唯一地 (在具有性质 1′-4′ 的条件下) 扩大到全体 $\mathfrak{S}$ 可测函数的集 F_σ 上.

定理 2 对每一保测集变换 T, 存在唯一的随机变量的变换 T_1,T_1 把 F_σ 变到 F_σ 中，而且具有下列性质：

1′. 如 x_1 是 x 的象，则 x_2 也是 x 的象的充分必要条件是 $P(x_1=x_2)=1$;

2′. 如 $x=\chi_A$, 则 $P(T_1x=\chi_{TA})=1$;

3′. T_1 是线性的：对任二常数 a,b,

$$T_1(ax+by)=aT_1x+bT_1y\ \text{(a.s.)};$$

4′. T_1 连续：如 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ (a.s.), 则

$$\lim_{n\to\infty}T_1x_n=T_1x\ \text{(a.s.)}.$$

证 唯一性：如 T_1 及 $\widetilde{T}_1$ 都有性质 1′-4′, 那么由 2′,3′, 它们在简单函数类上重合，因而根据 4′, 对任意 $x\in F_\sigma,T_1x=\widetilde{T}_1x$(a.s.).

存在性：对每个有理数 r, 记 $\omega-$ 集

$$A_r=T\{x(\omega)\leqslant r\}.$$

由于这个集有一零测集变动的自由，可以要求 A_r 对一切有理数具有下列单调性：

$$A_{r_1}\subseteq A_{r_2},\quad r_1\leqslant r_2,$$

为此只要从原来选定的诸 A_r 中适当除去一零测集并利用有理数集的可列性. 从这些 A_r 中加上或减去一零测集后，还可使

$$\bigcup_r A_r = \Omega, \quad \bigcap_r A_r = \phi.$$

现在证明：可以找到随机变量 $\widetilde{T}_1 x$, 使

$$([\widetilde{T}_1 x](\omega) \leqslant s) \doteq T\{x(\omega) \leqslant s\}, \tag{12}$$

其中 $s \in R_1$ 任意. 为此，我们倒过来想. 假设满足 (12) 的 $\widetilde{T}_1 x$ 已找到，看看它在指定的 ω 上应等于什么. 对任意有理数 r, 由 (12) 有

$$([\widetilde{T}_1 x](\omega) \leqslant r) = T\{x(\omega) \leqslant r\} = A_r.$$

因此，对 $s \in R_1$, 有

$$([\widetilde{T}_1 x](\omega) < s) = \bigcup_{r<s} A_r,$$

$$([\widetilde{T}_1 x](\omega) \leqslant s) = \bigcap_{r>s} A_r,$$

于是

$$([\widetilde{T}_1 x](\omega) = s) = \bigcap_{r>s} A_r - \bigcup_{r<s} A_r.$$

这式子表明：应用如下定义 $\widetilde{T}_1 x$:

$$[\widetilde{T}_1 x](\omega) = s, \quad \text{如果 } \omega \in \bigcap_{r>s} A_r - \bigcup_{r<s} A_r. \tag{13}$$

由于诸 A_r 的选择方法，可见 $\widetilde{T}_1 x$ 对每 ω 都是唯一确定的. 我们就用 (13) 来定义 $\widetilde{T}_1 x$. 由 (13) 及 (9) 可见

$$([\widetilde{T}_1 x](\omega) \leqslant s) = \bigcap_{r>s} A_r \doteq T\{x(\omega) \leqslant s\}. \tag{14}$$

由 (14) 及 $\pi-$ 系方法，可见对任意 $B \in \mathcal{B}_1$, 有

$$([\widetilde{T}_1 x](\omega) \in B) \doteq T\{x(\omega) \in B\}. \tag{15}$$

特别可见，$\widetilde{T}_1 x$ 是随机变量.

现在定义 x 在 T_1 下的象为任一与所选的 $\widetilde{T}_1 x$ 几乎处处相等的随机变量. 剩下要证明的是：所得的变换 T_1 的确具有性质 $1'$–$4'$.

$1'$. 由定义显然.

$2'$. 如 $x(\omega) = \chi_A(\omega)$, 由 (15)

$$(T_1 x = 1) \doteq T(x = 1) = TA,$$

$$(T_1 x = 0) \doteq T(x = 0) = T\overline{A} \doteq \overline{TA},$$

既然 $TA \cup \overline{TA} = \Omega$, 故 $T_1 x = \chi_{TA}$. (a.s.)

$3'$. 对正数 a, 有理数 r, 由 (15) 得下列诸式:

$$\begin{aligned}(T_1(-x) < s) &\doteq T(-x < s)\\ &= T(x > -s) \doteq (T_1 x > -s) = (-T_1 x < s);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(T_1(ax) < s) &\doteq T(ax < s)\\ &= T\big(x < \frac{s}{a}\big) \doteq \big(T_1 x < \frac{s}{a}\big) = (aT_1 x < s);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(T_1(x_1 + x_2) < s) &\doteq T(x_1 + x_2 < s) = T\bigcup_r (x_1 < r)(x_2 < s - r)\\ &\doteq \bigcup_r T(x_1 < r)T(x_2 < s - r) \doteq \bigcup_r (T_1 x_1 < r)(T_1 x_2 < s - r) = (T_1 x_1 + T_1 x_2 < s).\end{aligned}$$

因而对任意 $a_1 \in R_1, a_2 \in R_1$, 有

$$(T_1(a_1 x_1 + a_2 x_2) < s) \doteq (a_1 T_1 x_1 + a_2 T_1 x_2 < s). \tag{16}$$

注意，如二随机变量 y, z 对任意有理数 $\widetilde{s}$, 有

$$(y < \widetilde{s}) \doteq (z < \widetilde{s}), \tag{17}$$

则必 $P(y = z) = 1$. 实际上，如说不然，必存在有理数[1] r, 使 $P(y < r \leqslant z) > 0$ 或 $P(z < r \leqslant y) > 0$. 不妨设前式成立. 另方面，由 (17), 有

$$(y < r) = (y < r \leqslant z) \cup (y < r, z < r) \doteq (y < r \leqslant z) \cup (z < r),$$

故得 $P(y < r \leqslant z) = 0$, 与上述前式矛盾.

由此并注意到 (16), 即得证 $3'$.

$4'$. 由于

$$(T_1 \sup_n x_n > s) \doteq T(\sup_n x_n > s) = T\big(\bigcup_n [x_n > s]\big) \doteq \bigcup_n (T_1 x_n > s) = (\sup_n T_1 x_n > s),$$

故 T_1 与 $\sup\limits_n$ 可交换，因而与 $\inf\limits_n x_n (= -\sup\limits_n(-x_n))$ 可交换，于是与 $\overline{\lim\limits_n} (= \inf\limits_{n \geqslant 1} \sup\limits_{m \geqslant n})$ 及 $\underline{\lim\limits_n} (= \sup\limits_{n \geqslant 1} \inf\limits_{m \geqslant n})$ 都可交换. 故如 $\lim\limits_n x_n = x$, 则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} T_1 x_n = T_1 \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = T_1 x = T_1 \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} T_1 x_n \text{ (a.s.)}.$$

注 2 既然 $1'$–$4'$ 唯一决定随机变量变换，而由 (15) 又可推出 $1'$–$4'$, 可见 $\widetilde{T}_1 x$, 因而 $T_1 x$ 由 (15) 唯一决定 (a.s.). □

---

[1] 由 $P(y \neq z) > 0$ 及 $(y \neq z) = \bigcup\limits_r (y < r \leqslant z) \cup (z < r \leqslant y)$, 可见此结论正确.

以后 T 及 T_1 同记为 T, 并统称为 **保测变换**, 这不会引起误会，只要参看上下文即可.

变换 T 具有下列重要性质:

引理 1 设 $f(y_0,y_1,\cdots)$ 为无穷维 Borel 可测函数， $x_0(\omega),x_1(\omega),\cdots$ 为任意随机变量，则

$$Tf(x_0,x_1,\cdots)=f(Tx_0,Tx_1,\cdots)\ (\text{a.s.}). \tag{18}$$

证 利用上述关于 (17) 的注意事项，为证 (18), 只要证对任意 $B\in\mathcal{B}_1$, 有

$$(\omega:Tf(x_0,x_1,\cdots)\in B)\doteq(\omega:f(Tx_0,Tx_1,\cdots)\in B). \tag{19}$$

由 (15)

$$(Tf(x_0,x_1,\cdots)\in B)\doteq T(f(x_0,x_1,\cdots)\in B).$$

令 $B_\infty=[(y_0,y_1,\cdots):f(y_0,y_1,\cdots)\in B]$, 它是无穷维 Borel 可测集. 为证 (19), 只要证

$$T[\omega:(x_0,x_1,\cdots)\in B_\infty]\doteq[\omega:(Tx_0,Tx_1,\cdots)\in B_\infty].$$

使此式成立的全体 B_∞ 构成无穷维空间中的 $\lambda-$ 系 Λ. 由 (15) 及 (9) 可见 Λ 包含以 $B_1\times B_2\times\cdots\times B_n$ 为底的有穷维柱集，这些柱集全体是一 $\pi-$ 系. 故 Λ 包含全体无穷维 Borel 可测集. □

我们还需要测度论中一事实:

引理 2 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为概率空间，对 $A\in\mathcal{F},B\in\mathcal{F}$, 定义 A, B 的距离为

$$d(A,B)=P(A\Delta B),$$

则 $\mathcal{F}$ 成为完备的距离空间 (其中集 A,B 如满足 $P(A\Delta B)=0$, 则看成同一点).

证 [1] 因 $A\Delta B=A\overline{B}\cup B\overline{A}$, 显然

$$P(A\Delta B)=P(B\Delta A)\geqslant 0;$$

又由 $A\Delta B\subset(A\Delta C)\cup(B\Delta C)$, 得

$$P(A\Delta B)\leqslant P(A\Delta C)+P(B\Delta C).$$

因而 $\mathcal{F}$ 是一距离空间. 为证完备性，设有一列 $A_n\in\mathcal{F}$, 使 $P(A_n\Delta A_m)\to 0\ (n\to\infty,m\to\infty)$, 则必存在一列正整数 $N_k,N_1<N_2<\cdots$, 使当 $m\geqslant N_k,n\geqslant N_k$ 时,

$$P(A_n\Delta A_m)<\frac{1}{2^k}.$$

令 $A=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=j}^{\infty}A_{N_k}$, 因之 $\overline{A}=\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=j}^{\infty}\overline{A}_{N_k}=\lim\limits_{j\to\infty}\bigcup\limits_{k=j}^{\infty}\overline{A}_{N_k}$. 对任意正整数 s, 有

$$A_{N_s}\overline{A}\subset A_{N_s}\overline{A}_{N_{s+1}}\cup A_{N_{s+1}}\overline{A}_{N_{s+2}}\cup\cdots,$$

故 $P(A_{N_s}\overline{A})\leqslant\sum\limits_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^{s+r}}=\frac{1}{2^{s-1}}$; 类似地，由

$$\overline{A}_{N_s}A\subset\overline{A}_{N_s}A_{N_{s+1}}\cup\overline{A}_{N_{s+1}}A_{N_{s+2}}\cup\cdots,$$

[1] 另一证明见 §7.4,12.

得 $P(\overline{A}_{N_s}A) \leqslant \frac{1}{2^{s-1}}$, 于是 $P(A_{N_s}\Delta A) \leqslant \frac{1}{2^{s-2}}$. 最后得：当 $n > N_s$ 时

$$P(A_n\Delta A) \leqslant P(A_n\Delta A_{N_s}) + P(A_{N_s}\Delta A) \leqslant \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{s-2}}.$$

由此可见 $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n\Delta A) = 0$, 这说明在上述距离 d 下，$\{A_n\}$ 有极限为 A. 为证唯一性，设有二极限为 A 与 B, 则

$$P(A\Delta B) \leqslant P(A_n\Delta A) + P(A_n\Delta B) \to 0\ (n\to\infty). \quad \square$$

(三) 下列定理给出了上段中问题 (A),(B) 答复.

定理 3 (i) 设 T 为保测变换，$x_0(\omega)$ 为任意随机变量，则

$$\{x_n, n\geqslant 0\}, x_n = T^n x_0 \text{ (a.s.)} \tag{20}$$

是一平稳序列.

(ii) 反之，设 $\{x_n, n\geqslant 0\}$ 为平稳序列，则必存在唯一的保测变换 T, 它定义在 $\mathscr{F}'\{x_n, n\geqslant 0\}$ 上，使 $x_n = T^n x_0 (n = 0,1,2,\cdots)$.(这里 $\mathscr{F}'$ 表 $\mathscr{F}$ 关于 P 完全化 σ 代数.)

证 (i) 由 (20),(15) 及 (9) 得

$$\begin{aligned}P\Big(\bigcap_{j=1}^{k}(x_{n_j+h}\leqslant c_j)\Big) &= P\Big(\bigcap_{j=1}^{k}(T^h x_{n_j}\leqslant c_j)\Big)\\ &= P\Big(\bigcap_{j=1}^{k}T^h(x_{n_j}\leqslant c_j)\Big) = P\Big(T^h\Big[\bigcap_{j=1}^{k}(x_{n_j}\leqslant c_j)\Big]\Big)\\ &= P\Big(\bigcap_{j=1}^{k}(x_{n_j}\leqslant c_j)\Big).\end{aligned} \tag{21}$$

(ii) 之证较繁[1], 分成几点：

a° 以 **C** 表全体柱集

$$(\omega : (x_{n_1},\cdots,x_{n_k})\in B_k) \tag{22}$$

所成的代数，B_k 为 k 维 Borel 集，$k = 1,2,\cdots$. 定义自 **C** 到 **C** 中的集变换 T:

$$T[(x_{n_1},\cdots,x_{n_k})\in B_k] \doteq ((x_{n_1+1},\cdots,x_{n_k+1}\in B_k), \tag{23}$$

则 T 在 **C** 上是保距 (距离为 d) 的变换，即

$$P(C_1\Delta C_2) = P(TC_1\Delta TC_2). \tag{24}$$

实际上，设 $C_i = ((x_{n_1},\cdots,x_{n_k})\in B_k^{(i)} (i=1,2)$. 由于任一 m 维柱集可看成 n 维柱集 $(m\leqslant n)$, 故不妨设足标 $n_1,\cdots,n_k$ 对二柱集是相同的. 显然

$$\overline{C}_i = ((x_{n_1},\cdots,x_{n_k})\in \overline{B}_k^{(i)}), T\overline{C}_i = \overline{TC_i}. \tag{25}$$

[1]另一较简的证明见 §7.4,13. 这里的证虽冗长，但因包含了一些技巧，故仍保留此证.

由序列的平稳性

$$
\begin{aligned}
P(C_1C_2) &= P((x_{n_1},\cdots,x_{n_k}) \in B_k^{(1)} \cap B_k^{(2)}) \\
&= P((x_{n_1+1},\cdots,x_{n_k+1}) \in B_k^{(1)} \cap B_k^{(2)}) \\
&= P(TC_1 \cap TC_2).
\end{aligned} \tag{26}
$$

由于柱集的补集仍是柱集，故由 (26),(25)

$$
\begin{aligned}
P(C_1 \Delta C_2) &= P(C_1\overline{C}_2) + P(\overline{C}_1 C_2) \\
&= P(TC_1 \cap \overline{TC_2}) + P(\overline{TC_1} \cap TC_2) = P(TC_1 \Delta TC_2).
\end{aligned}
$$

b° 今扩大 T 的定义域到全 $\mathcal{F}'\{x_n, n \geqslant 0\}$ 上. 因后者是包含代数 $\mathbf{C}$ 的最小 σ 代数的完全化，由附篇定理 7 知对每一 $A \in \mathcal{F}'\{x_n, n \geqslant 0\}$, 必存在 $C_m \in \mathbf{C}$, 使 $P(C_m \Delta A) \to 0$, 故

$$
P(TC_m \Delta TC_n) = P(C_m \Delta C_n) \to 0 \quad (m, n \to \infty).
$$

由引理 2, 存在集 $D \in \mathcal{F}'\{x_n, n \geqslant 0\}$, 使 $P(TC_n \Delta D) \to 0 (n \to \infty)$. 我们定义

$$
TA \doteq D. \tag{27}
$$

注意，D 与 $\{C_m\}$ 的选择无关. 事实上，设另有一列 $\widetilde{C}_m \in \mathbf{C}$ 使 $P(\widetilde{C}_m \Delta A) \to 0$. 令 $\{\widetilde{C}_m\}$ 所决定的集为 $\widetilde{D}$. 合并 $\{C_m\},\{\widetilde{C}_m\}$ 而得一新列 $\{\overline{C}_m\} = \{C_1, \widetilde{C}_1, C_2, \widetilde{C}_2, \cdots\}$, 则 $P(\overline{C}_m \Delta A) \to 0$. 设 $\{\overline{C}_m\}$ 所决定的集为 $\overline{D}$, 则因 $\{C_m\},\{\widetilde{C}_m\}$ 都是 $\{\overline{C}_m\}$ 的子列而有

$$
D \doteq \overline{D} \doteq \widetilde{D}.
$$

c° 今证由 (27) 定义的 T 在 $\mathcal{F}'\{x_n, n \geqslant 0\}$ 上是保测变换，即要验证 1°, 2°, 3° 成立

1° 由 T 的定义是显然的.

2° 由 (23) 及序列的平稳性，已知 T 在 $\mathbf{C}$ 上保测度，故对任意 $A \in \mathcal{F}'\{x_n, n \geqslant 0\}$, 有

$$
P(TA) = P(D) = \lim_{n\to\infty} P(TC_n) = \lim_{n\to\infty} P(C_n) = P(A).
$$

3° 试证 (7),(8) 成立. 先证

$$
T(A_1 \cup A_2) \doteq TA_1 \cup TA_2. \tag{28}
$$

取 $C_n^{(i)} \in \mathbf{C}$ $(i = 1, 2)$, 使

$$
P(A_1 \Delta C_n^{(1)}) \to 0,\ P(A_2 \Delta C_n^{(2)}) \to 0\ (n \to \infty).
$$

于是

$$
P((A_1 \cup A_2) \Delta (C_n^{(1)} \cup C_n^{(2)})) \to 0,
$$

由此及定义 (27),

$$
P(T(A_1 \cup A_2) \Delta T(C_n^{(1)} \cup C_n^{(2)})) \to 0.
$$

易见在柱集所成的集族 $\mathbf{C}$ 上， T 满足 (28), 故

$$P(T(A_1 \cup A_2)\Delta[TC_n^{(1)} \cup TC_n^{(2)}]) \to 0. \tag{29}$$

另方面，由 $P(TA_1\Delta TC_n^{(1)}) \to 0, P(TA_2\Delta TC_n^{(2)}) \to 0$ 得

$$P([TA_1 \cup TA_2]\Delta[TC_n^{(1)} \cup TC_n^{(2)}]) \to 0. \tag{30}$$

比较 (29),(30) 并利用在距离 d 下极限的唯一性得知 (28) 成立.

由 (28) 及归纳法得

$$T\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \doteq \bigcup_{i=1}^{n} TA_i. \tag{31}$$

在 (23) 中取 $B_k = R_k$(k 维实数空间), 得

$$T\Omega \doteq \Omega. \tag{32}$$

由 (32),(28) 得 $\Omega \doteq T\Omega = T(A \cup \overline{A}) \doteq TA \cup T\overline{A}$; 对柱集 C, 易见 $TCT\overline{C} \doteq TC\overline{C} \doteq \phi$, 从而仿上[1] 可证 $TAT\overline{A} \doteq \phi$, 综合上述有 $\overline{TA} \doteq T\overline{A}$, 故得证 (8). 又因

$$\begin{aligned}\overline{T(A_1A_2)} &\doteq T\overline{A_1A_2} = T(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2) \doteq T\overline{A}_1 \cup T\overline{A}_2\\ &\doteq \overline{TA_1} \cup \overline{TA_2} = \overline{TA_1 \cap TA_2},\end{aligned}$$

得

$$T(A_1A_2) \doteq TA_1 \cap TA_2, \tag{33}$$

再者

$$\begin{aligned}T(A_1\Delta A_2) &= T(A_1\overline{A}_2 \cup A_2\overline{A}_1) \doteq TA_1\overline{A}_2 \cup TA_2\overline{A}_1\\ &\doteq TA_1T\overline{A}_2 \cup TA_2T\overline{A}_1 = TA_1\Delta TA_2.\end{aligned} \tag{34}$$

现在可以证明 (7). 因为 $P\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Delta \bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n\Big) \to 0$, 由 (31),(34) 及 2°, 得

$$\begin{aligned}P\Big(T\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)\Delta\Big(\bigcup_{n=1}^{m} TA_n\Big)\Big) &= P\Big(T\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)\Delta T\Big(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\Big)\Big)\\ = P\Big(T\Big(\Big[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big]\Delta\Big[\bigcup_{n=1}^{m} A_n\Big]\Big)\Big) &= P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Delta \bigcup_{n=1}^{m} A_n\Big) \to 0;\end{aligned} \tag{35}$$

另方面，显然有

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(TA_n)\Delta\Big(\bigcup_{n=1}^{m} TA_n\Big)\Big) \to 0. \tag{36}$$

比较 (35),(36), 即得证 (7).

[1]或者利用 2° : $1 = P(TA \cup T\overline{A}) = P(TA) + P(T\overline{A}) - P(TAT\overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) - P(TAT\overline{A}) = 1 - P(TAT\overline{A})$, 故 $TAT\overline{A} \doteq \phi$.

d° 最后要证由 (27) 定义的 T 是满足定理要求的唯一保测变换. 于 (23) 中取 $k \doteq 1, n_1 = n$, 得 $T(x_n \in B) \doteq (x_{n+1} \in B), B \in \mathcal{B}_1$. 由注 2 得 $Tx_n = x_{n+1}$(a.s.). 由此知

$$x_n = T^n x_0 \ (n = 0, 1, 2, \cdots) \ (\text{a.s.}) \tag{37}$$

故 T 满足定理的要求. 今设有二保测变换 T_1, T_2 都满足 (37), 于是 $T_i(x_n \in B) \doteq (x_{n+1} \in B), i = 1, 2$. 由 (9) 得

$$\begin{aligned} &T_i(x_{n_1} \in B_1, \cdots, x_{n_m} \in B_m) \\ &\quad \doteq (x_{n_1+1} \in B_1, \cdots, x_{n_m+1} \in B_m) \ (B_l \in \mathcal{B}_1, l = 1, \cdots, m), \end{aligned}$$

再由 $\lambda-$ 系方法, 可见对每一 $T_i (i = 1, 2)$, (23) 都成立. 这说明 T_1, T_2 在 $\mathbf{C}$ 上一致. 对一般的 $A \in \mathcal{F}'\{x_n, n \geqslant 0\}$, 取 $C_m \in \mathbf{C}$, 使 $P(C_m \Delta A) \to 0$, 由 T_i 的保测性

$$P(T_i C_m \Delta T_i A) \to 0.$$

由此式及 $T_1 C_m \doteq T_2 C_m$, 得 $T_1 A \doteq T_2 A$. □

注 3 定理 3 对平稳序列 $\{x_n, -\infty < n < \infty\}$ 也成立, 只是 (i) 中应假设, 而在 (ii) 中应要求, 保测变换 T 是可逆的.

(四) 保测集变换较难掌握, 下面叙述保测点变换, 由它可产生保测集变换.

设 $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ 为概率空间, $\mathfrak{S}$ 已关于 P 完全化. 将 Ω 中的点变到 Ω 中的点变换 T, 如果是一一的, 定义域与值域都是全 Ω, 并且 T 及 T^{-1} 都把可测集变为等测度的可测集, 则称为保测 **点变换**.

每一保测点变换 T 产生一保测集变换:

$$TA \doteq \bigcup_{\omega \in A} (T\omega). \tag{38}$$

我们证明, 后者所产生的随机变量的变换 Tx 可取为

$$[Tx](\omega) = x(T^{-1}\omega). \tag{39}$$

为证此, 只要证明由 (39) 可推得 (15). 令 $x^{-1}(B) = (\omega : x(\omega) \in B)$, 由 (39) 得

$$\begin{aligned} (Tx \in B) &= (x(T^{-1}\omega) \in B) = (T^{-1}\omega \in x^{-1}(B)) \\ &= T(x^{-1}(B)) = T(x \in B), \end{aligned}$$

此即 (15).

以下定理说明, 在某些问题中, 只需考虑保测点变换就够了.

定理 4 (i) 设 T 为保测点变换, x 为任意随机变量, 则

$$\{x_n, -\infty < n < \infty\} \ (x_n = T^n x) \tag{40}$$

是平稳序列.

(ii) 反之，设 $\{x_n, -\infty < n < \infty\}$ 为平稳序列，则存在平稳序列 $\{\widetilde{x}_n, -\infty < n < \infty\}$，后者定义在某 (一般是另一个) 概率空间 $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{P})$ 上，与原序列有相同的有穷维分布，并且

$$\widetilde{x}_n = T^n \widetilde{x}_0, \quad -\infty < n < \infty,$$

其中 T 是 $\widetilde{\Omega}$ 上的保测点变换.

证 (i) 是定理 3 中 (i) 的特殊情形 (参看注 3).(ii) 的证明如下：令

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\omega} = (\cdots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \cdots) \ (\omega_i \in R_1), \\
&\widetilde{\Omega} = (\widetilde{\omega}), \\
&\quad \widetilde{x}_n(\widetilde{\omega}) = \omega_n \ \text{(即 } \widetilde{\omega} \text{ 的第 } n \text{ 个坐标)}.
\end{aligned} \tag{41}$$

对柱集

$$A_k = [(\widetilde{x}_{m_1}(\widetilde{\omega}), \cdots, \widetilde{x}_{m_k}(\widetilde{\omega})) \in B_k]$$

定义

$$\widetilde{P}(A_k) = P[(x_{m_1}(\omega), \cdots, x_{m_k}(\omega)) \in B_k]. \tag{42}$$

含诸柱集的最小 σ 代数记为 $\widetilde{\mathcal{F}}$, 由柯氏定理 (附篇定理 4), 可唯一地扩大 $\widetilde{P}$ 的定义域到全 $\widetilde{\mathcal{F}}$, 而且 $\widetilde{P}$ 是 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 上的一概率. 由 (42) 及 $\{x_n, -\infty < n < \infty\}$ 的平稳性可见 $\{\widetilde{x}_n, -\infty < n < \infty\}$ 是定义在 $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{P})$ 上并与 $\{x_n, -\infty < n < \infty\}$ 有相同的有穷维分布的平稳序列. $\widetilde{\mathcal{F}}$ 对 $\widetilde{P}$ 完全化的 σ 代数仍记为 $\widetilde{\mathcal{F}}$. 今在 $\widetilde{\Omega}$ 上定义点变换 T:

$$T\widetilde{\omega} = (\cdots, \omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0, \cdots), \ \text{如} \widetilde{\omega} = (\cdots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \cdots). \tag{43}$$

以 T^{-1} 表 T 之逆，由 (39) 得

$$[T\widetilde{x}_0](\widetilde{\omega}) = \widetilde{x}_0(T^{-1}\widetilde{\omega}) = \widetilde{x}_0(\cdots, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots) = \omega_1 = \widetilde{x}_1(\widetilde{\omega}),$$

$$[T^{-1}\widetilde{x}_0](\widetilde{\omega}) = \widetilde{x}_0(T\widetilde{\omega}) = \widetilde{x}_0(\cdots, \omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0, \cdots) = \omega_{-1} = \widetilde{x}_{-1}(\widetilde{\omega}),$$

由此立得 $\widetilde{x}_n = T^n \widetilde{x}_0$.

今证 T 是保测的，只要对柱集证明. 取 $A = (\widetilde{\omega} : (\omega_{m_1}, \cdots, \omega_{m_k}) \in B_k)$, 由 (41),(42) 及 $\{\widetilde{x}_n, -\infty < n < \infty\}$ 的平稳性得

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(A) &= \widetilde{P}((\widetilde{x}_{m_1}, \cdots, \widetilde{x}_{m_k}) \in B_k) = \widetilde{P}((\widetilde{x}_{m_1+1}, \cdots, \widetilde{x}_{m_k+1}) \in B_k) \\
&= \widetilde{P}((\omega_{m_1+1}, \cdots, \omega_{m_k+1}) \in B_k) = \widetilde{P}(TA). \quad \square
\end{aligned}$$

§7.2 大数定理与遍历性

(一) 设 T 为概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的保测集 (或点) 变换，可测集 A 如满足 $TA \doteq A$, 则称 A 为 **关于 T 不变集**; 类似，如随机变量 x 满足 $Tx = x$(a.s.), 则称 x 为 **关于 T 不变的**. 显然，当而且只当 χ_A 为不变随机变量时，A 为不变集.

引理 1 关于 T 不变的全体不变集构成一 σ 代数 $\mathcal{U}$; 随机变量 x 关于 T 不变的充分与必要条件是它关于 $\mathcal{U}$ 可测.

证 由 §7.1(10),$\Omega \in \mathcal{U}$. 设 $A \in \mathcal{U}$, 由于 $T\overline{A} = T(\Omega \backslash A) \doteq \Omega \backslash TA \doteq \Omega \backslash A = \overline{A}$, 故 $\overline{A} \in \mathcal{U}$. 如果 $A_n \in \mathcal{U}(n \geqslant 1)$, 由 §7.1(7),

$$T\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \doteq \bigcup_{n=1}^{\infty} TA_n \doteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

故 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}$. 从而 $\mathcal{U}$ 是一 σ 代数.

设 $Tx = x$(a.s.), 对任意 $s \in R_1$, 由 §7.1(15),

$$T(x \leqslant s) \doteq (Tx \leqslant s) \doteq (x \leqslant s),$$

这表示 $(x \leqslant s) \in \mathcal{U}$ 而 x 关于 $\mathcal{U}$ 可测.

反之, 设 x 关于 $\mathcal{U}$ 可测, 对任意 $B \in \mathcal{B}_1, (x \in B) \in \mathcal{U}$, 即 $\chi_{(x\in B)}$ 为不变随机变量, 因之

$$x_n(\omega) = \sum_{i=-2^n n+1}^{2^n n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{\left(\frac{i-1}{2^n} \leqslant x(\omega) < \frac{i}{2^n}\right)}.$$

由 §7.1 定理 2, 3′ 也不变, 即 $Tx_n = x_n$. 既然 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, 由 §7.1, 4′ 得 $Tx = x$ (a.s.), 故 x 不变. □

平稳序列 $\{x_n, n \geqslant 0\}$ 唯一地对应于 $\mathcal{F}'\{x_n, n \geqslant 0\}$ 上的某保测变换 T, $\mathcal{F}'\{x_n, n \geqslant 0\}$ 中关于 T 不变的集 A 以及关于 T 不变的 $\mathcal{F}'\{x_n, n \geqslant 0\}$ 可测函数 $x(\omega)$ 都称为**关于此平稳序列是不变的**. 这性质可不通过 T 而直接由序列本身来表达, 描述如下.

首先注意, 由附篇引理 6 可见, 对任一关于 $\mathcal{F}'\{x_n, n \geqslant 0\}$ 可测的 $x(\omega)$, 必存在无穷维 Borel 可测函数 $f(y_0, y_1, \cdots)$, 使

$$x(\omega) = f(x_0(\omega), x_1(\omega), \cdots) \text{ (a.s.)}. \tag{1}$$

这种 f 可能不唯一.

引理 2 $x(\omega)$ 关于平稳序列 $\{x_n, n \geqslant 0\}$ 不变的充分与必要条件是至少存在一个 f, 使 (1) 及下式

$$f(x_0(\omega), x_1(\omega), \cdots) = f(x_k(\omega), x_{k+1}(\omega), \cdots) \text{ (a.s.)} \tag{2}$$

对任意整数 $k \geqslant 0$ 成立; 这时任一使 (1) 成立的 f 都满足 (2).

证 设存在 f 使 (1),(2) 成立, 又 T 为此平稳序列所对应的保测变换. 根据 §7.1 引理 1

$$T^k f(x_0(\omega), x_1(\omega), \cdots) = f(x_k(\omega), x_{k+1}(\omega), \cdots) \text{ (a.s.)}.$$

由此式与 (2) 得

$$T^k f(x_0(\omega), x_1(\omega), \cdots) = f(x_0(\omega), x_1(\omega), \cdots) \text{ (a.s.)}.$$

根据 (1) 得 $T^k x(\omega) = x(\omega)$ (a.s.), 故 $x(\omega)$ 不变.

今设 $Tx = x$ (a.s.), 得 $T^k x = x$ (a.s.). 任意取一使 (1) 成立的 f 代入上式即得

$$T^k f(x_0(\omega), x_1(\omega), \cdots) = f(x_0(\omega), x_1(\omega), \cdots) \text{ (a.s.)}.$$

再用一次 §7.1 引理 1 便得 (2). □

由此引理可见, 如 $x(\omega)$ 不变, 则

$$x(\omega) = f(x_k(\omega), x_{k+1}(\omega), \cdots) \text{ (a.s.)},$$

故它只依赖于序列的尾项 $\{x_k(\omega), x_{k+1}(\omega), \cdots\}$, 其中 k 为任意非负整数. 从而得证

系 1 如 $x(\omega)$ 关于平稳序列 $\{x_n, n \geqslant 0\}$ 不变, 则 $x(\omega)$ 关于 $\bigcap\limits_k \mathcal{F}'\{x_n, n \geqslant k\}$ 可测; 又 $\mathcal{U} \subset \bigcap\limits_k \mathcal{F}'\{x_n, n \geqslant k\}$.

然而, 系 1 的逆不真 (参看 §7.4,10).

从一个平稳序列 $\{x_n, n \geqslant 0\}$, 可以产生无穷多个新的平稳序列, 描述如下: 任意取一无穷维 [1] Borel 可测函数 $f(y_0, y_1, \cdots)$, 定义随机变量列

$$\left.\begin{aligned} \xi_0(\omega) &= f(x_0(\omega), x_1(\omega), \cdots), \\ \xi_n(\omega) &= T^n \xi_0 = f(x_n(\omega), x_{n+1}(\omega), \cdots). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

根据 §7.1 定理 3(i), 知 $\{\xi_n, n \geqslant 0\}$ 也是平稳序列. 关于 $\{x_n, n \geqslant 0\}$(及 $\{\xi_n, n \geqslant 0\}$) 不变的随机变量与集的全体分别记为 $V, \mathcal{U}$ (及 $V_\xi, \mathcal{U}_\xi$).

引理 3 $V_\xi \subset V; \mathcal{U}_\xi \subset \mathcal{U}$.

证 由引理 1 只要证二式中任何一个, 试证 $V_\xi \subset V$. 设 $y(\omega) \in V_\xi$. 由引理 2, 存在无穷维 Borel 可测函数 g, 使

$$y(\omega) = g(\xi_0(\omega), \xi_1(\omega), \cdots) \text{ (a.s.)}, \tag{4}$$

$$g(\xi_0(\omega), \xi_1(\omega), \cdots) = g(\xi_k(\omega), \xi_{k+1}(\omega), \cdots) \text{ (a.s.)}. \tag{5}$$

考虑无穷维 Borel 可测函数

$$G(y_0, y_1, \cdots) = g(f(y_0, y_1, \cdots), f(y_1, y_2, \cdots), \cdots). \tag{6}$$

由此式及 (3),(4) 得

$$y(\omega) = G(x_0(\omega), x_1(\omega), \cdots) \text{ (a.s.)}, \tag{7}$$

以 (3) 代入 (5), 利用 (6), 得

$$G(x_0(\omega), x_1(\omega), \cdots) = G(x_k(\omega), x_{k+1}(\omega), \cdots) \text{ (a.s.)}. \tag{8}$$

再一次利用引理 2, 并注意 (7),(8), 得 $y(\omega) \in V$. □

例 1 对平稳序列 $\{x_n, n \geqslant 0\}$, 令 $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i$,

$$\widetilde{x}_1 = \varliminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}, \widetilde{x}_2 = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n},$$

[1] 有穷维函数显然是无穷维函数的特殊情况, 维数指自变量个数.

$$A=(\omega:\widetilde{x}_1(\omega)=\widetilde{x}_2(\omega)).$$

于是 $\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2$ 都是不变随机变量，而 A 为不变集．实际上，只要证 $\widetilde{x}_1$ 不变：

$$T\widetilde{x}_1=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}x_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}x_i=\widetilde{x}_1.$$

故 $\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2$ 都关于 $\mathcal{U}$ 可测，从而 $A\in\mathcal{U}$.

（二）现在来研究平稳序列的强大数定理．先要做些准备工作．

引理 4 设 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意实数，令

$$E=(\text{正整数}m:m<n;c_m<\max_{j>m}c_j),\tag{9}$$

则 E 由若干组接连的正整数构成；又如以 α 及 β 表任一组的首数及尾数，则

$$c_j<c_{\beta+1},\quad \alpha\leqslant j\leqslant\beta.\tag{10}$$

例 2 设 $(c_1,\cdots,c_{10})=(7,3,1,6,4,2,5,5,1,3)$, 则 $E=(2,3;5,6;9)$.

引理 4 之证．将 E 中元按大小排列，使小者在前，大者居后，则 E 自然由若干组 (不超过 n 组) 接连的正整数构成．因为 $\beta+1\overline{\in}E$, 故 $c_{\beta+1}\geqslant\max\limits_{j>\beta+1}c_j$(或 $\beta+1=n$), 既然 $\beta\in E$

$$c_\beta<\max_{j>\beta}c_j=c_{\beta+1}.$$

任取 $k,\alpha\leqslant k<\beta$. 设 (10) 对 $k+1\leqslant j\leqslant\beta$ 正确，则由 $k\in E$, 得

$$c_k<\max_{j>\beta}c_j=\max_{j\geqslant\beta+1}c_j=c_{\beta+1}.\quad\square$$

引理 5 设平稳序列 $\{x_n,n\geqslant 0\}$ 对应的保测变换为 T, 又 $x(\omega)$ 关于 $\mathcal{F}'\{x_n,n\geqslant 0\}$ 可测，而且 $E|x|<\infty$. 于是对任意 $A\in\mathcal{F}'\{x_n,n\geqslant 0\}$, 有

$$\int_{T^kA}[T^kx]P(d\omega)=\int_A xP(d\omega).\tag{11}$$

证 象通常一样，只要对 $x=\chi_B$ 证明，其中 $B\in\mathcal{F}'\{x_n,n\geqslant 0\}$. 此时

$$\begin{aligned}\int_{T^kA}[T^k\chi_B]P(d\omega)&=P(T^kA\cap T^kB)\\&=P(T^k(A\cap B))=P(AB)=\int_A\chi_BP(d\omega).\quad\square\end{aligned}$$

引理 6[1] 设 $\{x_n,n\geqslant 0\}$ 为平稳序列，$E|x_0|<\infty$; 又设 β 为任一常数，M 为不变集，$S_n=\sum\limits_{i=0}^{n-1}x_i$. 则

$$\int_{M\{\sup\limits_{n\geqslant 1}\frac{S_n(\omega)}{n}>\beta\}}x_0P(d\omega)\geqslant\beta P\Big(\Big\{\sup_{n\geqslant 1}\frac{S_n(\omega)}{n}>\beta\Big\}\cap M\Big).\tag{12}$$

[1] 由证明过程可见，如 (12) 中的 $\left(\sup\limits_{n\geqslant 1}\frac{S_n(\omega)}{n}>\beta\right)$ 换为 $\left(\sup\limits_{n\geqslant 1}\frac{S_n(\omega)}{n}\geqslant\beta\right)$, (12) 仍正确.

证 不妨设 $\beta=0$, 否则只要换 $\{x_n\}$ 为 $\{x_n-\beta\}$, 换 $\frac{S_n}{n}$ 为 $\frac{S_n}{n}-\beta$. 定义 $\omega-$ 集

$$\Lambda=\{\sup_{n\geqslant 1}S_n(\omega)>0\},\quad \Lambda_j=\{\sup_{1\leqslant n\leqslant j}S_n(\omega)>0\},$$

则 $\Lambda_j\uparrow\Lambda(j\to\infty)$. 对每个固定的 ω, 可对 $S_1,\cdots,S_m$ 用引理 4, 所得 (9) 中的集记为 $E(\omega)$. 固定 $j,j<m$, 令

$$\begin{aligned}N_j&=(\omega:j\in E(\omega))=(\omega:S_j<\max_{l>j}S_l)\\&=(\omega:\max_{j\leqslant k\leqslant m-1}[x_j(\omega)+\cdots+x_k(\omega)]>0)\\&\doteq T^j(\omega:\max_{0\leqslant k\leqslant m-j-1}[x_0(\omega)+\cdots+x_k(\omega)]>0)\\&=T^j\Lambda_{m-j}.\end{aligned}\tag{13}$$

设 $E(\omega)$ 已表为 r 个相邻整数组 $E_i(\omega)$ 之和, $E_i(\omega)$ 的首、尾数分别记为 $\alpha_i,\beta_i(i=1,\cdots,r)$, 则固定 ω 时

$$\begin{aligned}\sum_{j:\omega\in N_j}x_j(\omega)&=\sum_{j\in E(\omega)}x_j(\omega)=\sum_{j\in E(\omega)}(S_{j+1}(\omega)-S_j(\omega))\\&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j\in E_i(\omega)}(s_{j+1}(\omega)-S_j(\omega))=\sum_{i=1}^{r}(S_{\beta_i+1}(\omega)-S_{\alpha_i}(\omega))>0\end{aligned}$$

(见引理 4). 因此, 如以 $\chi_{N_j}(\omega)$ 表 N_j 的示性函数, 则

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m-1}\int_{MN_j}x_jP(d\omega)&=\sum_{j=0}^{m-1}\int_M\chi_{N_j}(\omega)x_j(\omega)P(d\omega)\\&=\int_M\sum_{j=0}^{m-1}\chi_{N_j}(\omega)x_j(\omega)P(d\omega)=\int_M\sum_{j:\omega\in N_j}x_j(\omega)P(d\omega)\geqslant 0.\end{aligned}$$

利用 (13) 及引理 5, 并注意 $M\in\mathcal{U}$, 得

$$0\leqslant\sum_{j=0}^{m-1}\int_{MT^j\Lambda_{m-j}}x_jP(d\omega)=\sum_{j=0}^{m-1}\int_{M\Lambda_{m-j}}x_0P(d\omega)=\sum_{j=1}^{m}\int_{M\Lambda_j}x_0P(d\omega),$$

利用数学分析中事实: "$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 如存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$", 即得

$$\int_{M\Lambda}x_0P(d\omega)=\lim_{j\to\infty}\int_{M\Lambda_j}x_0P(d\omega)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\int_{M\Lambda_j}x_0P(d\omega)\geqslant 0.$$

最后, 注意由 Λ 的定义, 可见 $\Lambda=\left\{\sup\limits_{n\geqslant 1}\frac{S_n(\omega)}{n}>0\right\}$, 故得证 (12) 对 $\beta=0$ 正确. □

定理 1 设 $\{x_n,n\geqslant 0\}$ 为平稳序列, $E|x_0|<\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_0+\cdots+x_n}{n+1}=E(x_0\mid\mathcal{U})\ (\text{a.s.});\tag{14}$$

又如 $E|x_0|^r < \infty\ (r \geqslant 1)$, 则

$$\lim_{n\to\infty} E\left|\frac{x_0+\cdots+x_n}{n+1} - E(x_0|\mathcal{U})\right|^r = 0, \tag{15}$$

这里 $\mathcal{U}$ 为关于此平稳序列不变集的 σ 代数.

证 (A) 令 $\widetilde{x}_1 = \varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$, $\widetilde{x}_2 = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$, $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i$, 由例 1 知 $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2$ 不变. 对实数 $\alpha < \beta$, 以 $M_{\alpha\beta}$ 表不变集 $\{\widetilde{x}_1(\omega) < \alpha < \beta < \widetilde{x}_2(\omega)\}$, 显然

$$M_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}\left\{\sup_{n\geqslant 1} \frac{S_n(\omega)}{n} > \beta\right\}.$$

由引理 6 得

$$\int_{M_{\alpha\beta}} x_0 P(d\omega) = \int_{M_{\alpha\beta}\left\{\sup\limits_{n\geqslant 1}\frac{S_n(\omega)}{n} > \beta\right\}} x_0 P(d\omega) \geqslant \beta P(M_{\alpha\beta}). \tag{16}$$

应用此结果于 $\{-x_n\}$, 换 α, β 为 $-\beta, -\alpha$, 得

$$\int_{M_{\alpha\beta}} x_0 P(d\omega) \leqslant \alpha P(M_{\alpha\beta}). \tag{17}$$

由 (16),(17) 得 $P(M_{\alpha\beta}) = 0$, 从而

$$P(\widetilde{x}_1(\omega) < \widetilde{x}_2(\omega)) = P\Big(\bigcup_{\alpha<\beta} M_{\alpha\beta}\Big) \leqslant \sum_{\alpha<\beta} P(M_{\alpha\beta}) = 0\ (\alpha, \beta \text{ 是有理数}), \tag{18}$$

故 $\widetilde{x}_1 = \widetilde{x}_2$(a.s.) 而存在极限 $x(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n}$(a.s.), 它取有穷值或无穷值. 按 Fatou 引理

$$\int_\Omega \varliminf_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} |x_i|}{n+1} P(d\omega) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} |x_i|}{n+1} P(d\omega) = E|x_0| < \infty,$$

故由 $|x(\omega)| \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{n}|x_i(\omega)|}{n+1}$, 可见 $x(\omega)$ 有穷 (a.s.) 而且可积.

(B) 今证以概率 1,$x(\omega) = E(x_0(\omega)|\mathcal{U})$. 因已知 $x(\omega)$ 为 $\mathcal{U}$ 可测, 故只要证: 对任意 $\Lambda \in \mathcal{U}$ 有

$$\int_\Lambda x_0(\omega) P(d\omega) = \int_\Lambda x(\omega) P(d\omega). \tag{19}$$

由引理 6 知对任一常数 α 及 $M \in \mathcal{U}$ 有

$$\int_{M\left\{\inf\limits_{n\geqslant 1}\frac{S_n(\omega)}{n} < \alpha\right\}} x_0 P(d\omega) \leqslant \alpha P\left(\left\{\inf_{n\geqslant 1} \frac{S_n(\omega)}{n} < \alpha\right\} M\right). \tag{20}$$

令

$$\Lambda_m = (\omega : (m-1)\varepsilon \leqslant x(\omega) < m\varepsilon) \in \mathcal{U},\ \varepsilon > 0.$$

在 (12), (20) 中，以 $m\varepsilon$, $(m-1)\varepsilon$, $\Lambda\Lambda_m$ 分别换 α,β,M, 并注意 $\left\{\inf\limits_{n\geqslant 1}\frac{S_n(\omega)}{n}<m\varepsilon\right\}\supset\Lambda_m$, $\left\{\sup\limits_{n\geqslant 1}\frac{S_n(\omega)}{n}\geqslant(m-1)\varepsilon\right\}\supset\Lambda_m$, 得

$$(m-1)\varepsilon P(\Lambda\Lambda_m)\leqslant\int_{\Lambda\Lambda_m}x_0P(d\omega)\leqslant m\varepsilon P(\Lambda\Lambda_m). \tag{21}$$

其次，根据 Λ_m 的定义，有

$$(m-1)\varepsilon P(\Lambda\Lambda_m)\leqslant\int_{\Lambda\Lambda_m}xP(d\omega)\leqslant m\varepsilon P(\Lambda\Lambda_m).$$

既然已证 $P(|x|<\infty)=1$, 故 $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}P(\Lambda_m)=1$, 将上式对 $m=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 求和，得

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}m\varepsilon P(\Lambda\Lambda_m)-\varepsilon P(\Lambda)\leqslant\int_\Lambda xP(d\omega)\leqslant\sum_{m=-\infty}^{\infty}(m-1)\varepsilon P(\Lambda\Lambda_m)+\varepsilon P(\Lambda),$$

利用 (21)

$$\int_\Lambda x_0P(d\omega)-\varepsilon P(\Lambda)\leqslant\int_\Lambda xP(d\omega)\leqslant\int_\Lambda x_0P(d\omega)+\varepsilon P(\Lambda),$$

令 $\varepsilon\to 0$, 即得证 (19).

(C) 根据附篇 (三)C, 为证 (15), 只要证：

1° $E\left|\frac{S_n}{n}\right|^r<\infty$;

2° $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{P}E(x_0\mid\mathcal{U})$;

3° $\int_A\left|\frac{S_n}{n}\right|^rP(d\omega)$ 对 A 均匀连续.

由 Minkowski 不等式： $E|Y_1+Y_2|^r\leqslant(E^{\frac{1}{r}}|Y_1|^r+E^{\frac{1}{r}}|Y_2|^r)^r$ $(r\geqslant 1)$; 得

$$E\left|\frac{S_{n+1}}{n+1}\right|^r\leqslant\left[\frac{n}{n+1}E^{\frac{1}{r}}\left|\frac{S_n}{n}\right|^r+\frac{1}{n+1}E^{\frac{1}{r}}|x_n|^r\right]^r;$$

因 $\{x_n,n\geqslant 0\}$ 平稳，故 $E^{\frac{1}{r}}|x_n|^r=E^{\frac{1}{r}}|x_0|^r$. 由此及上一不等式，用归纳法即得

$$E\left|\frac{S_n}{n}\right|^r\leqslant E|x_0|^r<\infty,$$

此即 1°. 由 $E|x_0|\leqslant E^{\frac{1}{r}}|x_0|^r<\infty$, 知 $E(x_0\mid\mathcal{U})$ 有定义，根据 (14) 便得证 2°. 最后，对任意 $\varepsilon>0$, 存在常数 $c_\varepsilon>0$, 使 $c\geqslant c_\varepsilon$ 时，对任意 i, 由引理 5, 有

$$\int_{(|x_i|\geqslant c)}|x_i|^rP(d\omega)=\int_{(|x_0|\geqslant c)}|x_0|^rP(d\omega)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此，对任意 $A\in\mathcal{F}$, 若 $P(A)<\frac{\varepsilon}{2c^r}$, 则

$$\int_A|x_i|^rP(d\omega)=\int_{A(|x_i|\geqslant c)}|x_i|^rP(d\omega)+\int_{A(|x_i|<c)}|x_i|^rP(d\omega)<\frac{\varepsilon}{2}+c^r\cdot\frac{\varepsilon}{2c^r}=\varepsilon.$$

再仿上用 Minkowski 不等式及归纳法，并简记 $\int_A xP(d\omega)$ 为 $E_A x$, 即知对任意 $n \geqslant 1$, 有

$$EA\left|\frac{S_{n+1}}{n+1}\right|^r \leqslant \left[\frac{n}{n+1}E_A^{\frac{1}{r}}\left|\frac{S_n}{n}\right|^r + \frac{1}{n+1}E_A^{\frac{1}{r}}|x_n|^r\right]^r < \left[\frac{n}{n+1}\varepsilon^{\frac{1}{r}} + \frac{1}{n+1}\varepsilon^{\frac{1}{r}}\right]^r = \varepsilon,$$

此得证 3°. □

定理 1 说明，极限 $x(\omega)$ 的值紧密依赖于不变 σ 代数 $\mathcal{U}$, 而 $\mathcal{U}$ 决定于序列的概率结构. 直观地想，如果序列的概率结构愈 "松懈", 它产生的变换 T 的 "变动" 也愈 "大", 因而保留不变的集也愈少，即 $\mathcal{U}$ 愈小 (参看下面的例 3).

称平稳序列 $\{x_n, n \geqslant 0\}$ 为 **遍历的**, 如果它的每一不变集的概率或为 0, 或为 1; 也就是说，如果它的每一不变随机变量以概率 1 等于某常数 (见引理 1). 这时， $\mathcal{U}$ 达到最小程度，它只由概率为 0 或 1 的可测集构成.

系 2 设 $\{x_n, n \geqslant 0\}$ 为遍历的平稳序列，又 $\{\xi_n, n \geqslant 0\}$ 为任一由 (3) 定义的序列, $E|\xi_0| < \infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\xi_0 + \cdots + \xi_n}{n+1} = E\xi_0 \quad \text{(a.s.)}. \tag{22}$$

证 由上述知 $\{\xi_n, n \geqslant 0\}$ 也是平稳的，按定理 1 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\xi_0 + \cdots + \xi_n}{n+1} = E(\xi_0 \mid \mathcal{U}_\xi) \quad \text{(a.s.)}.$$

但由引理 3, $\mathcal{U}_\xi \subset \mathcal{U}$. 既然由假定 $\mathcal{U}$ 只由概率为 0 或 1 的可测集构成，故 $\mathcal{U}_\xi$ 亦然而 $E(\xi_0 \mid \mathcal{U}_\xi) = E\xi_0$ (a.s.). □

(22) 的直观意义可理解为：对时间的平均等于 ξ_0(因之任意 ξ_k) 对 ω 的平均. 因而在系 2 的条件下，可以用序列的一次实现来估计 $E\xi_0$.

(三) 试举例说明上述理论.

例 3 设 $\{x_n, n \geqslant 0\}$ 为独立同分布的随机变量序列，显然，它是平稳序列. 根据独立随机变量的 0-1 律，知 $\bigcap_k \mathcal{F}'\{x_n, n \geqslant k\}$ 只含概率为 0 及 1 的可测集. 由系 1, 知 $\mathcal{U}$ 也如此，故此序列具有遍历性. 如 $E|x_0| < \infty$, 由 (22) 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_0 + \cdots + x_n}{n+1} = Ex_0 \quad \text{(a.s.)}, \tag{23}$$

这就是概率论中证明过的强大数定理.

例 4 考虑参数集为全体整数的平稳序列 $\{x_n, -\infty < n < \infty\}$, 它对应的保测变换记为 T, $\mathcal{F}'\{x_n, -\infty < n < \infty\}$ 中的集 A 如满足 $TA \doteq A$, 叫做关于此序列为 **不变集**, $\mathcal{F}'\{x_n, -\infty < n < \infty\}$ 可测函数 $x(\omega)$, 如满足 $Tx = x$ (a.s.), 则称为关于此序列为 **不变随机变量**. 不变集所成 σ 代数记为 $\mathcal{U}$, 如 $\mathcal{U}$ 只含概率为 0 或 1 的集，则称此序列为 **遍历的**. 总之，这些概念的定义与对 $\{x_n, n \geqslant 0\}$ 的情形一样.

设 $X = \{x_n, -\infty < n < \infty\}$ 为平稳序列， k 为任意整数. 显然， $X^{-1} = \{x_{-n}, -\infty < n < \infty\}$ 及 $X_k = \{x_n, n \geqslant k\}$ 作为 X 的逆序列及子序列，也都是平稳的. 设 X 对应的保测变换为 T(定义域为 $\mathcal{F}'\{X\}$), 那么 X^{-1} 及 X_k 对应的保测变换分别为 T^{-1}(定义域为 $\mathcal{F}'\{X^{-1}\} = \mathcal{F}'\{X\}$) 及 T (定义域为 $\mathcal{F}'\{X_k\}$). 关于 X, X^{-1} 及 X_k 不变的随机变量全体分别记作 $V_x, V_{x^{-1}}$ 及 V_k, 试证 $V_x = V_{x^{-1}} = V_k$, 从而三者有相同的不变 σ 代数.

实际上，如 $\overline{x} \in V_x$, 则 $\overline{x}$ 为 $\mathcal{F}'\{X\}$ 可测，因之为 $\mathcal{F}'\{X^{-1}\}$ 可测. 既然 T 可逆，故二式

$$T\overline{x} = \overline{x} \text{ (a.s.)}, \quad T^{-1}\overline{x} = \overline{x} \text{ (a.s.)}$$

等价，此即得证 $\overline{x} \in V_{x^{-1}}, V_x \subset V_{x^{-1}}$. 同样证 $V_{x^{-1}} \subset V_x$.

如 $\overline{x} \in V_k$, 则 $\overline{x}$ 为 $\mathcal{F}'\{X_k\}$ 可测，故更为 $\mathcal{F}'\{X\}$ 可测；既然 $T\overline{x} = \overline{x}$ (a.s.), 可见 $\overline{x} \in V_x, V_k \subset V_x$.

反之，如 $\overline{x} \in V_x$, 为证 $\overline{x} \in V_k$, 只要证 $\overline{x}$ 为 $\mathcal{F}'\{X_k\}$ 可测. 由于 $\overline{x}$ 为 $\mathcal{F}'\{X\}$ 可测，根据附篇 (三) 定理 7, 对任意 $m > 0$, 存在随机变量 y_m, 它关于有穷多个 x_n 所产生的 σ 代数可测，而且

$$p\Big(|\overline{x}(\omega) - y_m(\omega)| > \frac{1}{m}\Big) < 2^{-m}.$$

有必要时，可以换 y_m 为 $T^j y_m$, 因为由 $\overline{x} \in V_x$ 有

$$p\Big(|\overline{x}(\omega) - [T^j y_m](\omega)| > \frac{1}{m}\Big) < 2^{-m}.$$

因此，可以设 y_m 为 $\mathcal{F}'\{X_k\}$ 可测. 但由 Borel-Cantelli 引理 (见 §1.5,12), $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = \overline{x}$ (a.s.), 故 $\overline{x}$ 也 $\mathcal{F}'\{X_k\}$ 可测.

这样便得证 $V_x = V_{x^{-1}} = V_k$. 从而知系 1 对应地也正确.

以 X_k^{-1} 表子序列 $\{x_{-n}, n \geqslant k\}$, 它的不变随机变量全体记为 $V_{k^{-1}}$, 则 $V_{k^{-1}} = V_{x^{-1}} = V_x = V_k$. 可见这四个平稳序列有相同的不变 σ 代数，都记为 $\mathcal{U}$. 现在来看对它们的加强大数定理. 设 $E|x_0| < \infty$, 分别对 X_k 及 X_k^{-1} 用定理 1, 得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_k + \cdots + x_{k+n}}{n+1} = E(x_k \mid \mathcal{U}) = E(x_0 \mid \mathcal{U}) \text{ (a.s.)}, \tag{24}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{-k} + \cdots + x_{-k-n}}{n+1} = E(x_{-k} \mid \mathcal{U}) = E(x_0 \mid \mathcal{U}) \text{ (a.s.)}. \tag{25}$$

由此二式立得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{-n} + \cdots + x_n}{2n+1} = E(x_0 \mid \mathcal{U}) \text{ (a.s.)}. \tag{26}$$

这式子明显的一般化为 [1]: 对任意固定的正整数 l, m,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{-l-n} + \cdots + x_{n+m}}{2n+1} = E(x_0 \mid \mathcal{U}) \text{(a.s.)}. \tag{27}$$

然而，极限

$$\lim_{n-m\to\infty} \frac{x_m + \cdots + x_n}{n-m+1}$$

的存在性并未因此而证明，实际上它一般是不存在的.

由上述还可见，此四个序列中，如有一个是遍历的，那么其它三个也如此.

例 5(滑动和) 设 $\{y_n, -\infty < n < \infty\}$ 为独立同分布的随机变量序列, $Ey_0 = 0, Ey_0^2 < \infty$, 因而 $E|y_i y_j| \leqslant (Ey_i^2 \cdot Ey_j^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$. 显然，此序列是平稳的而且具有遍历性. 定义

$$x_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m y_{m+n}, \tag{28}$$

[1] 利用 $\frac{x_{-l-n}+\cdots+x_{n+m}}{2n+1} = \frac{x_{-l-n}+\cdots+x_{-1}}{l+n} \cdot \frac{l+n}{2n+1} + \frac{x_0+\cdots+x_{n+m}}{n+m+1} \cdot \frac{n+m+1}{2n+1}$.

其中常数序列 $\{c_m\}$ 满足 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2<\infty$. 由 §1. 5, 14, 知 (28) 中级数既均方收敛, 也以概率 1 收敛. 以 T 表 $\{y_n,-\infty<n<\infty\}$ 所对应的保测变换, 则因

$$x_n=T^n x_0 \quad (-\infty<n<\infty), \tag{29}$$

根据 §7.1 定理 3 (i) 及其注知 $\{x_n,-\infty<n<\infty\}$ 也是平稳序列, 而且是遍历的. 后一结论由引理 3 推出. 因此, $\{x_n,n\geqslant 0\}$ 也是遍历的.

例 6(平稳马氏序列) 分为四个问题:

(A) 设 $\{x_n,n\geqslant 0\}$ 为平稳序列, 而且是以 $(0,1,2,\cdots)$ 为参数集的马氏过程. 我们证明: 如 $x(\omega)$ 为不变随机变量, 则 $x(\omega)$ 关于 $\mathcal{F}'\{x_0\}$ 可测; 换句话说, 如 Λ 为不变集, 则 $\Lambda\in\mathcal{F}'\{x_0\}$.

以 $z(\omega)$ 表 $\chi_\Lambda(\omega)$. 如能证

$$z=E(z\mid x_0) \quad \text{(a.s.)}, \tag{30}$$

则由条件数望的定义, 知 z 为 $\mathcal{F}'\{x_0\}$ 可测, 故 $\Lambda\in\mathcal{F}'\{x_0\}$, 于是结论正确. 为证 (30), 注意系 1, 知 z 为 $\mathcal{F}'\{x_{n+1},x_{n+2},\cdots\}$ 可测, $n\geqslant 0$ 任意. 于是可用马氏性而得

$$E(z\mid x_0,\cdots,x_n)=E(z\mid x_n) \text{ (a.s.)}. \tag{31}$$

根据 §1.4 系 2, $\lim\limits_{n\to\infty}E(z\mid x_n)=z$ (a.s.). 从而

$$\lim_{n\to\infty}P(|z-E(z\mid x_n)|>\varepsilon)=0,$$

其中 $\varepsilon>0$ 任意. 但因 $T^n z=z, T^n E(z\mid x_0)=E(z\mid x_n)$(a.s.), 故由引理 5, $P(|z-E(z|x_n)|>\varepsilon)$ 与 n 无关. 于其中令 $n=0$, 即得 (30). 如令 $n=k$, 则得 $z=E(z\mid x_k)$ (a.s.).

(B) 什么样的马氏序列 $\{x_n,n\geqslant 0\}$ 是平稳的? 设它为齐次的, 相空间为 $(R_1,\mathcal{B}_1)$, 一步转移概率为 $p(x,A)$, 因之 n 步转稳概率为

$$P^{(n)}(x,A)=\int_E p^{(n-1)}(y,A)p(x,dy)=\int_E p(y,A)p^{(n-1)}(x,dy). \tag{32}$$

设在 $\mathcal{B}_1$ 上存在概率测度 $q(A)$, 满足条件

$$q(A)=\int_E p(x,A)q(dx). \tag{33}$$

如 $\{x_n,n\geqslant 0\}$ 的开始分布为 q, 即 $P(x_0\in A)=q(A)$ $(A\in\mathcal{B}_1)$, 那么易见

$$P(x_n\in A)=\int_E p^{(n)}(x,A)q(dx)=q(A) \ (n\geqslant 0), \tag{34}$$

而且对 $0\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_k$, 有

$$P(x_{n_1}\in A_1,\cdots,x_{n_k}\in A_k)=\int_{A_1}q(d\xi_1)\int_{A_2}p^{(n_2-n_1)}(\xi_1,d\xi_2)\cdots\int_{A_k}p^{(n_k-n_{k-1})}(\xi_{k-1},d\xi_k),$$

既然右方值只依赖于差 $(n_2-n_1,\cdots,n_k-n_{k-1})$ 而不依赖于 $(n_1,\cdots,n_k)$ 本身，可见 $\{x_n,n\geqslant 0\}$ 是平稳序列．因此，由 (3) 定义的 $\{\xi_n(\omega),n\geqslant 0\}$ 也是平稳的 (但未必是马氏的)．如设

$$E|\xi_0|=E|f(x_0,x_1,\cdots)|<\infty, \tag{35}$$

则由定理 1 知以概率 1 存在有穷极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\xi_0+\cdots+\xi_n}{n+1}$．作为这个结果的重要特殊情形是：

系 3 设齐次马氏过程 $\{x_n,n\geqslant 0\}$ 的开始分布 q 满足条件 (33)，又 $f(y)$ 为 (一维)Borel 可测函数，使 $E|f(x_0(\omega))|=\int_{R_1}|f(y)|q(dy)<\infty$，则存在有穷极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}f(x_i(\omega))}{n+1}\quad \text{(a.s.)}. \tag{36}$$

(C) 考虑齐次马氏链 $\{x_n,n\geqslant 0\}$，相空间 E 为 $(0,1,2,\cdots)$，n 步转移概率为 $p_{ij}^{(n)},p_{ij}=p_{ij}^{(1)}$．按 §2.3 定理 1，将 E 分解为 $E=H\cup\overline{H},H=\bigcup\limits_{\alpha=1}C_\alpha$ 其中 $\overline{H}$ 为全体非常返状态及零状态所成为集，而每 C_α 为非零的常返状态构成的不可分闭集．

如果 $E=\overline{H}$，这链不可能是平稳序列．实际上，以 $\{q_i\}$ 表开始分布，因 $\sum\limits_i q_i=1$，故至少有一 i，使 $q_i>0$．如果说链是平稳的，则

$$P(x_n=i)=q_i\ (\text{一切}n\geqslant 0).$$

于是 $0<q_i=\lim\limits_{n\to\infty}P(x_n=i)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_j q_ip_{ji}^{(n)}=0$(见 §2.4 定理 1 及 §2.7 题 1)，这有矛盾．

以下设 $H=\bigcup\limits_{\alpha=1}C_\alpha\neq\phi$．由 §2.5 系 2，这时平稳分布 (即满足 (34) 的概率测度)$\{q_i\}$ 总是存在的．这分布的一般形式由 §2.5 定理 1 给出．

如果只存在一个不可分闭集 $C_\alpha=C$，那么，为使 $\{q_i\}$ 为平稳分布，由上引定理，必须 $q_i>0$，如 $i\in C$；$q_i=0$，如 $i\in\overline{H}$．设 $\{x_n,n\geqslant 0\}$ 的开始分布为 $\{q_i\}$，由上段已知此链是平稳序列．试证此链必是遍历的．实际上，根据 (A) 段，任何一个不变集 A 有形状

$$A\doteq(x_0(\omega)\in B), \tag{37}$$

B 为 E 中某子集．如果对任一 $i\in B$ 有 $P(x_0=i)=0$，则 $P(A)=0$；否则至少存在一 $i\in B$ 使 $P(x_0=i)>0$，由

$$(x_0\in B)\doteq A\doteq T^nA\doteq(x_n\in B),$$

得

$$\sum_{j\in B}p_{ij}^{(n)}=\frac{P(x_0=i,x_n\in B)}{P(x_0=i)}=\frac{P(x_0=i,x_0\in B)}{P(x_0=i)}=1. \tag{38}$$

如说 $C-B$ 不空，由上式得 $p_{ik}^{(n)}=0$ 对一切 $n\geqslant 1$ 及 $k\in C-B$ 成立，这与 C 的不可分性矛盾，因此 $B=C$ 而 $A\doteq(x_0\in C)$，既然 $P(x_0\in\overline{H})=\sum\limits_{i\in H}q_i=0$，可见 $P(A)=P(x_0\in C)=1$．这便证明了遍历性．

假定至少存在两个不同的 C_α，为使 $\{q_i\}$ 为平稳分布，仍须 $q(\overline{H})=0$．如果 q 集中在一个 C_α 上，即 $q(C_\alpha)=1$，那么同样可证明这链是遍历的平稳序列．如果 q 不是集中在一个

C_α 上，即如有 $\beta \neq \alpha$, 使 $q(C_\alpha) > 0, q(C_\beta) > 0$, 那么，由 $(x_n(\omega) \in C_\alpha) \doteq (x_{n+1}(\omega) \in C_\alpha)$, 知 $\Lambda_\alpha = (x_0(\omega) \in C_\alpha)$ 是不变集而且 $P(\Lambda_\alpha) = q(C_\alpha) > 0$; 同样 $\Lambda_\beta = (x_0(\omega) \in C_\beta)$ 也是不变集，$P(\Lambda_\beta) = q(C_\beta) > 0$. 既然 $\Lambda_\alpha \cap \Lambda_\beta = \phi$, 可见以这样的平稳分布 q 为开始分布时，链虽是平稳序列，但不是遍历的.

总结上述，便得

定理 2 设 $\{x_n, n \geqslant 0\}$ 为齐次马氏链，相空间 E 已分解为 $E = \overline{H} \cup H, H = \bigcup\limits_{\alpha=1} C_\alpha$.

1° 如 $H = \phi$, 那么，不论开始分布如何，这链不是平稳序列；

2° 如 $H \neq \phi$, 那么，总存在平稳分布 q, 当开始分布为 q 时，这链是平稳序列，这时它是遍历序列的充分与必要条件是 q 集中在一个 C_α 上.

(D) 试进一步研究齐次马氏链的强大数定理，在这一段中总设 $H \neq \phi$, 因而平稳分布 q 总存在，于是可应用 (B) 中理论. 今试设法取消“开始分布是平稳分布”这一条件.

回忆 §2.5 引理 1 与定理 1, 知对每个 C_α, 存在一个集中在 C_α 上的平稳分布 ${}_\alpha q = \{{}_\alpha q_i\}$, 满足条件

$$
{}_\alpha q_i = \begin{cases} 0, & \text{如} i \overline{\in} C_\alpha, \\ \dfrac{1}{\mu_i} > 0, & \text{如} i \in C_\alpha. \end{cases} \tag{39}
$$

其中 $\mu_i = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n f_i^{(n)}$ 是状态 i 的平均回转时 (见 §2.2 (5)).

为了强调开始分布 π 的作用，由 π 及转移概率 $\{p_{ij}\}$ 所产生的测度记为 P_π, 相应的数学期望记为 E_π. 特别，当 π 集中在一点 i 上时，记此 P_π, E_π 为 P_i, E_i.

考虑无穷维 Borel 可测函数 $f(y_0, y_1, \cdots)$, 以 (3) 定义序列 $\{\xi_n(\omega), n \geqslant 0\}$ 假定

$$
E_{\alpha q}|\xi_0| = E_{\alpha q}|f(x_0(\omega), x_1(\omega), \cdots)| < \infty. \tag{40}
$$

如果 f 只依赖于 y_0, 那么 (40) 化为

$$
\sum_{i \in C_\alpha} |f(i)|_\alpha q_i < \infty. \tag{41}
$$

由定理 2 已知，当 $\{x_n, n \geqslant 0\}$ 的开始分布为 ${}_\alpha q$ 时，它是遍历的平稳序列，故 $\{\xi_n, n \geqslant 0\}$ 也如此. 从而由定理 1 得 [1]

$$
P_{\alpha q}\left(\lim_{n \to \infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} \xi_i(\omega)}{n+1} = E_{\alpha q} \xi_0 \right) = 1. \tag{42}
$$

以 W 表 (42) 左方括号中的集，我们证明

$$
P_i(W) = 1, \text{ 一切 } i \in C_\alpha. \tag{43}
$$

如说不然，设对某 $i_0 \in C_\alpha, P_{i_0}(W) < 1$, 由 ${}_\alpha q_{i_0} > 0$ 得

$$
P_{\alpha q}(W) = \sum_{i \in C_\alpha} {}_\alpha q_i P_i(W) < 1,
$$

[1] 并且 $\lim\limits_{n \to \infty} E_{\alpha q} \left| \frac{1}{n+1} \sum\limits_{i=0}^{n} \xi_i(\omega) - E_{\alpha q} \xi_0 \right| = 0.$

与 (42) 矛盾.

这样，便证明了

定理 3 设 $H \neq \phi$. 如 (40) 对某 C_α 成立，则

$$P_i\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\xi_i(\omega)}{n+1}=E_{\alpha^q}\xi_0\right)=1 \quad (i\in C_\alpha);$$

如 (40) 对一切 $C_\alpha \subset H$ 成立，则对任意集中在 H 上的开始分布 π, 即 $\pi(H)=1$, 有

$$P_\pi\left(\omega:\ \text{存在有穷极限}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\xi_i(\omega)}{n+1}\right)=1.$$

例 7 设平稳序列 $\{x_n, n\geqslant 0\}$ 满足条件 $Ex_0^2<\infty$, 因此对任意正整数 $\tau, E|x_{n+\tau}x_n|<\infty$. 在 (3) 中取 $f(y_0,y_1,\cdots)=y_\tau y_0$, 即知 $\{x_{n+\tau}x_n, n\geqslant 0\}$ 也是平稳序列，从而由定理 1, 存在有穷极限

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}x_{n+\tau}x_n \ \text{(a.s.)}.$$

如果 $\{x_n, n\geqslant 0\}$ 遍历，则 $\{\xi_n, n\geqslant 0\}$ 也是，于是这极限几乎处处等于 $B(\tau)=Ex_{n+\tau}x_n$. 由定理 1 第二结论，知 $B(\tau)$ 还满足

$$\lim_{m\to\infty}E\left|\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}x_{n+\tau}x_n-B(\tau)\right|=0.$$

§7.3 连续参数情形

上二节中详细讨论了当参数集为全体非负整数及全体整数的情形，如果参数集为 $[0,\infty)$ 或 $R_1=(-\infty,\infty)$, 理论基本上类似，因此我们只着重叙述不同之处. 为确定计，先设参数集为 $[0,\infty)$.

我们说，在完全化的概率空间 $\Omega,\mathfrak{S},P)$ 上已给一 **保测集 (或点) 变换半群** $T_t, t\geqslant 0$, 如果对任意固定的 $t\geqslant 0, T_t$ 是一保测集 (或点) 变换，而且对每 $A\in\mathfrak{S}$, 有

$$T_{s+t}A \doteq T_sT_tA \doteq T_tT_sA,\ T_0A\doteq A\ (s\geqslant 0, t\geqslant 0). \tag{1}$$

(或相应地，对每 $\omega\in\Omega$, 有

$$T_{s+t}\omega=T_sT_t\omega=T_tT_s\omega,\ T_0\omega=\omega\ (s\geqslant 0, t\geqslant 0).$$

设 $x(\omega)$ 是随机变量，利用 §7.1(取 T_t 为 T) 以定义 $T_tx(\omega)$, 则

$$\{x_t, t\geqslant 0\} \quad (x_t=T_tx) \tag{2}$$

是一平稳过程. 实际上，由保测性及 (1)

$$\begin{aligned}P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}(T_{t_i}x\in B_i)\Big)&=P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}T_{t_i}(x\in B_i)\Big)\\&=P\Big(T_s\Big[\bigcap_{i=1}^{n}T_{t_i}(x\in B_i)\Big]\Big)=P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}T_{s+t_i}(x\in B_i)\Big)\\&=P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}(T_{s+t_i}x\in B_i)\Big),\end{aligned}$$

其中 $B_i\in\mathcal{B}_1$, 这式子与 (2) 中第二式表明 $\{x_t,t\geqslant 0\}$ 是平稳过程.

反之，设已给平稳过程 $\{x_t,t\geqslant 0\}$. 对任一非负数 τ, 仿照 §7.1 定理 3 的证明，可证在 $\mathcal{F}'\{x_t,t\geqslant 0\}$ 上 [1], 存在唯一保测集变换 T_τ, 使对每 $B_k\in\mathcal{B}_k$,

$$T_\tau[(x_{t_1},\cdots,x_{t_k})\in B_k]\doteq[(x_{\tau+t_1},\cdots,x_{\tau+t_k})\in B_k].\tag{3}$$

试证如是得来的一族保测集变换 $\{T_\tau,\tau\geqslant 0\}$ 满足 (1). 实际上，易见二保测集变换的积 T_sT_t 及 T_tT_s 也是保测集变换. 既然 T'_{s+t},T_sT_t,T_tT_s 由于 (3) 在全体有穷维柱集上重合，仿 §7.1 定理 3 证明中的 d°, 便知它们在 $\mathcal{F}'\{x_t,t\geqslant 0\}$ 上重合.

这样便证明了

定理 1 (i) 设 $\{T_t,t\geqslant 0\}$ 为保测集变换半群 [2], 则

$$\{x_t,t\geqslant 0\}\quad(x_t=T_tx)\ \text{(a.s.)}\tag{4}$$

是平稳过程，这里 x 是任意的随机变量.

(ii) 反之，如 $\{x_t,t\geqslant 0\}$ 是任一平稳过程，则必存在唯一的保测变换半群 $\{T_t,t\geqslant 0\}$, 它定义在 $\mathcal{F}'\{x_t,t\geqslant 0\}$ 上，使 $x_t=T_tx_0$ (a.s.), $t\geqslant 0$.

关于 $T\tau$ 不变的集所成的 σ 代数记为 $\mathcal{U}_\tau$. 令 $\mathcal{U}=\bigcap_{\tau\geqslant 0}\mathcal{U}_\tau$,$\mathcal{U}$ 也是 σ 代数，称它为**关于半群 $\{T_t,t\geqslant 0\}$ 的不变 σ 代数**,$\mathcal{U}$ 中的集称为**关于 $\{T_t,t\geqslant 0\}$ 的不变集**. 同样，关于一切 T_τ 都不变的随机变量称为关于半群 $\{T_t,t\geqslant 0\}$ 的**不变随机变量**. 设 $\{x_t,t\geqslant 0\}$ 为平稳过程，$\mathcal{F}'\{x_t,t\geqslant 0\}$ 中的集 (或关于 $\mathcal{F}'\{x_t,t\geqslant 0\}$ 可测的函数), 如果关于此过程所对应的保测变换半群不变，便称为**关于此过程的不变集 (或不变随机变量)**.

回忆 §3.3 中关于过程可测性的定义.

定理 2 设 $\{x_t,t\geqslant 0\}$ 为 Borel 可测的平稳过程. $E|x_0|<\infty$,$\mathcal{U}$ 为此过程的不变集所成的 σ 代数，则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_s(\omega)ds=E(x_0\mid\mathcal{U})\ \text{(a.s.)};\tag{5}$$

如又设 $E\{|x_0|^r\}<\infty$ $(r\geqslant 1)$, 则

$$\lim_{t\to\infty}E\left|\frac{1}{t}\int_0^t x_s(\omega)ds-E(x_0\mid\mathcal{U})\right|^r=0.\tag{6}$$

---

[1] 而不是只在 $\mathcal{F}'\{x_{n\tau},n\geqslant 0\}$ 上

[2] 保测变换是保测集变换及由它所决定的随机变量的变换的通称.

证 由过程的 Borel 可测性及 Fubini 定理可知，几乎一切样本函数 $x_t(\omega)$ 是 $\mathcal{B}_1$ 可测的. 对任意正数 $\tau>0$, 定义

$$\widehat{x}_m(\omega)=\int_{m\tau}^{(m+1)\tau}x_s(\omega)ds,\quad \widehat{y}_m(\omega)=\int_{m\tau}^{(m+1)\tau}|x_s(\omega)|ds,$$

根据 Fubini 定理

$$\int_\Omega\widehat{y}_m(\omega)P(d\omega)=\int_{m\tau}^{(m+1)\tau}E|x_s(\omega)|ds=\tau E|x_0|,$$

可见 $\widehat{x}_m(\omega),\widehat{y}_m(\omega)$ 都有意义而且是随机变量. 今证 $\{\widehat{x}_m,m\geqslant 0\}$ 是平稳序列. 实际上，设过程所对应的保测变换半群为 $\{T_t,t\geqslant 0\}$. 注意 $\int_0^\tau x_s(\omega)ds$ 为 $\mathcal{F}\{x_s,0\leqslant s\leqslant\tau\}$ 可测的 [1], 故存在无穷维 Borel 可测函数 $f(y_0,y_1,\cdots)$ 及点列 $\{s_i\}\subset[0,\tau]$, 使

$$\widehat{x}_0(\omega)=\int_0^\tau x_s(\omega)ds=f(x_{s_0},x_{s_1},\cdots),$$

$$\begin{aligned}\widehat{x}_m(\omega)&=\int_{m\tau}^{(m+1)\tau}x_s(\omega)ds=\int_0^\tau x_{m\tau+s}(\omega)ds\\&=f(x_{m\tau+s_0},x_{m\tau+s_1},\cdots)=[T_\tau]^m\widehat{x}_0(\omega),\end{aligned}\tag{7}$$

由 §7.1 定理 3 知， $\{\widehat{x}_m,m\geqslant 0\}$ 为平稳序列.

同样可证 $\{\widehat{y}_m,m\geqslant 0\}$ 也是平稳序列.

以下取 $\tau=1$. 由 §7.2 定理 1, 知极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\widehat{x}_m(\omega)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n x_s(\omega)ds\tag{8}$$

以概率 1 存在、有穷，而且可积. 对 $\{\widehat{y}_m,m\geqslant 0\}$ 当然也如此，因而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\widehat{y}_n(\omega)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_n^{n+1}|x_s(\omega)|ds=0.\tag{9}$$

以 $[t]$ 表不超过 t 的最大整数，则

$$\frac{1}{t}\int_0^t x_s(\omega)ds=\frac{1}{[t]}\left\{\int_0^{[t]}x_s(\omega)ds\right\}\frac{[t]}{t}+\varepsilon_t,\tag{10}$$

其中 ε_t 由于 (9) 以概率 1 满足

$$|\varepsilon_t|-\left|\frac{1}{t}\int_{[t]}^t x_s(\omega)ds\right|\leqslant\frac{1}{[t]}\int_{[t]}^{[t]+1}|x_s(\omega)|ds\to 0(t\to\infty).\tag{11}$$

[1] 参看 [14],II.5,147 页；或 [16],64-65 页.

由 (10),(8) 及 (11) 可见 (5) 中左方极限以概率 1 存在、有穷，而且可积. 试证它关于 $\mathcal{U}$ 可测，为证此，与 §7.2 引理 1 相应地，只要证明它关于过程不变. 对任意 $u \geqslant 0$, 我们有

$$T_u\left(\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_s(\omega)ds\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_{u+s}(\omega)ds$$
$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left[\int_0^t x_s(\omega)ds + \int_t^{u+t} x_s(\omega)ds - \int_0^u x_s(\omega)ds\right]$$
$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_s(\omega)ds,$$

由 $u \geqslant 0$ 的任意性即得所欲证.

为了完成 (5) 的证明，只要证对任意 $\Lambda \in \mathcal{U}$, 有

$$\int_\Lambda x_0 P(d\omega) = \int_\Lambda x P(d\omega), \tag{12}$$

这里 $x(\omega) = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_s(\omega)ds$. 而为了证明 (12), 又只要证平均值

$$\frac{1}{t}\int_0^t x_s(\omega)ds \tag{13}$$

作为 ω 的函数是均匀可积的. 实际上, 由均匀可积性可在积分号下取极限, 故对任意 $\Lambda \in \mathcal{U}$,

$$\int_\Lambda x_0 P(d\omega) = \frac{1}{t}\int_0^t \left[\int_{T_s\Lambda} T_s x_0 P(d\omega)\right]ds$$
$$= \frac{1}{t}\int_0^t \left[\int_\Lambda x_s P(d\omega)\right]ds = \int_\Lambda\left[\frac{1}{t}\int_0^t x_s ds\right]P(d\omega) \to \int_\Lambda x P(d\omega),$$

此即 (12). 现在来证明更强的结论，即如 $E\{|x_0|^r\} < \infty$, 那么不仅 (13) 中的平均值均匀可积，而且它的 r 次方也均匀可积 ($r \geqslant 1$). 为证此结论，对任给 $\varepsilon_1 > 0$, 选正数 ε_2 充分小，使

$$\int_M |x_t|^r P(d\omega) < \varepsilon_1,\ \text{只要} P(M) < \varepsilon_2 (t \geqslant 0).$$

仿照 §7.2 定理 1 的证明，容易看出，这样的 ε_2 是存在的. 其次，如 $P(M) < \varepsilon_2$, 则 [1]

$$\int_M \left|\frac{1}{t}\int_0^t x_s ds\right|^r P(d\omega) \leqslant \int_M \left[\frac{1}{t}\int_0^t |x_s|^r ds\right] P(d\omega) < \varepsilon_1. \tag{14}$$

因而左方的积分可以均匀地小，只要 $P(M)$ 充分地小. 如能再证明在全空间 Ω 上的积分值均匀有界，则由此就可推出均匀可积性 [2]. 然而在 (14) 中取 $M = \Omega$, 右方即化为 $E\{|x_0|^r\}$, 故得到所需要的结果.

最后只要注意，如 $E\{|x_0|^r\} < \infty (r \geqslant 1)$, 则

$$\lim_{t\to\infty} E\left\{\left|\frac{1}{t}\int_0^t x_s ds - E(x_0 \mid \mathcal{U})\right|^r\right\} = 0, \tag{15}$$

[1] 这里用的不等式见 Hardy, Littlewood,Polya,Inequalities.§6.14, 定理 204.

[2] 参看附篇定理 8.

这是因为对应的平均值均匀可积，故可在符号 E 下取极限. □

称平稳过程 $\{x_t, t \geqslant 0\}$ 为 **遍历的**, 如它的任一不变集的概率或为 0, 或为 1; 也就是说，关于它的任一不变随机变量以概率 1 等于某一常数. 对这种过程，定理 2 中的极限 $E(x_0 \mid \mathcal{U}) = Ex_0$ (a.s.).

现在来考虑平稳过程 $\{x_t, -\infty < t < \infty\}$. 定理 1 仍然正确，只要将那里的 "保测变换半群" 换为 "保测变换群". 定义在完全化概率空间 $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ 上的保测集 (或点) 变换的集合 $\{T_t, -\infty < t < \infty\}$ 称为保测集 (或点) 变换群，如果对每 $A \in \mathfrak{S}$, 有

$$T_{s+t}A \doteq T_sT_tA \doteq T_tT_sA, \quad T_0A \doteq A \ (s \in R_1, t \in R_1). \tag{16}$$

(或相应地，对每 $\omega \in \Omega$, 有

$$T_{s+t}\omega = T_sT_t\omega = T_tT_s\omega, \ \ T_0\omega = \omega \ \ (s \in R_1, t \in R_1).)$$

$\mathfrak{S}-$ 可测函数 x 称为关于此群不变，如对任意 $t \in R_1$, 有 $T_tx = x$(a.s.); 集 $A \in \mathfrak{S}$ 关于此群不变，如果它的示性函数不变. 由此即可仿前定义关于平稳过程 $\{x_t, -\infty < t < \infty\}$ 不变的集与随机变量.

与 §7.2 例 4 相同, 如果 $\{x_t, -\infty < t < \infty\}$ 是平稳过程, 那么 $\{x_{-t}, -\infty < t < \infty\}, \{x_t, t \geqslant 0\}, \{x_{-t}, t \geqslant 0\}$ 也都是平稳过程，而且有相同的不变集与随机变量，因而它们或者都是遍历的，或者都不是. 如果第一个或第二个过程为 Borel 可测，那么其它两个也如此. 如果 $E|x_0| < \infty$, 仿 §7.2 例 4, 可证

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} x_s(\omega) ds = E(x_0 \mid \mathcal{U}) \ \ \text{(a.s.)}. \tag{17}$$

§7.4 补充与习题

1. 在 §7.1 定理 3(i) 中取 $x(\omega) \equiv C$(常数), 得到的平稳序列 $x_n(\omega) =$?; 又在 (ii) 中取 $x_n(\omega) \equiv C$(一切 n 与 ω), 所得的 T 的定义域何在？

2. 试证由 §7.1(20) 定义的平稳序列所产生的保测变换 $\widetilde{T}$ 在 $\mathcal{F}'\{x_n, n \geqslant 0\}$ 上与 T 相重合.

提示：先考虑柱集.

3. 设 $\{x_n, n \geqslant 0\}$ 为有穷马氏链 (即相空间 E 只含有穷多个状态),$f(i)$ 是定义在 E 上的任意函数. 试证不论开始分布如何，以概率 1 存在有穷极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum\limits_{i=0}^{n} f(x_i(\omega))$; 它也是 $\delta(\geqslant 1)$ 次方收敛意义下的极限.

提示：先设没有非常返状态；对一般情况可利用 §2.7 题 17 中前一事实.

4. 设 $\{x_n, n \geqslant 0\}$ 为平稳序列，如果对任意关于 $\mathcal{F}'\{x_n, n \geqslant 0\}$ 可测而且可积的函数 $y(\omega)$, 有

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} T^k y(\omega) \to Ey(\omega), n \to \infty,$$

则此平稳序列遍历.

提示：考虑任一不变集 A 的示性函数 χ_A. 因 $T^k\chi_A = \chi_A$(a.s.), 由假定有 $\chi_A = P(A)$, 故 $P(A) = 0$ 或 1.

5. 本例说明对于平稳序列，即使强大数定理成立，遍历性仍可不成立.

取 $\Omega = [0, 2\pi]; \mathcal{F} = [0, 2\pi]$ 中全体 Borel 可测子集； P 是 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布，即 $P(A) = L(A)/2\pi; L$ 表 Lebesgue 测度；定义 Ω 上的一一点变换 T:

$$T\omega = \omega - \theta \ (\mathrm{mod} 2\pi),$$

其中 $\theta = \frac{2\pi}{m}, m$ 是正整数. 显然， T 是保测点变换. 设 $x(\omega)$ 是取值于 $[0, 2\pi]$ 中的具均匀分布的随机变量，而且 $x(\omega) = \omega$. 定义

$$x_n(\omega) = \sin(x(\omega) + n\theta) \quad (n \geqslant 0),$$

则因 $x_n(\omega) = T^n[\sin x(\omega)]$, 可见 $\{x_n(\omega), n \geqslant 0\}$ 是平稳序列. 对于它强大数定理成立，因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_n(\omega) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(x + k\theta) \\ &= \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\cdot\sin\left(x + \frac{n+1}{2}\theta\right)}{n\sin\frac{\theta}{2}} \to 0 \quad (n \to \infty),\end{aligned}$$

而且

$$Ex_n(\omega) = E\sin x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\omega d\omega = 0.$$

然而遍历性却不成立，为证此，取 ω- 集

$$\begin{aligned}A = \left(0, \frac{2\pi}{2m}\right] \cup \left(\frac{2\pi}{m}, \frac{2\pi}{m} + \frac{2\pi}{2m}\right] \cup \left(\frac{4\pi}{m}, \frac{4\pi}{m} + \frac{2\pi}{2m}\right] \\ \cup \cdots \cup \left(\frac{2\pi(m-1)}{m}, \frac{2\pi(m-1)}{m} + \frac{2\pi}{2m}\right],\end{aligned}$$

显见 $TA = A, P(A) = \frac{1}{2}$.

6. 设 $x(\omega)$ 是取值于 $[0, 2\pi]$ 中并有均匀分布的随机变量， $x(\omega) = \omega$. 试证对任意固定的 θ

$$x_t(\omega) = \sin(x(\omega) + t\theta) \quad (t \geqslant 0)$$

是平稳过程，而且当 $\theta \neq 0$ 时，它是遍历的.

7. 随机序列 $\{x_n, -\infty < n < \infty\}$ 平稳的充分与必要条件是它的标准表现 $\{\tilde{x}_n, -\infty < n < \infty\}$(由 §7.1 定理 4(ii) 定义) 是平稳的；这时它们或者都是遍历的，或者都不是遍历的. 对 $\{x_n, n \geqslant 0\}$ 也如此.

8. 设 $\{x_t, -\infty < t < \infty\}$ 为平稳过程， a_k, s_k 为常数，则过程

$$y_t = \sum_{k=1}^{n} a_k x_{t+s_k} \quad (-\infty < t < \infty)$$

也是平稳过程，试问二者的遍历性间有何关系？

9. 利用题 2, 可以给 §7.2 引理 3 以更简单的证明：实际上，由 §7.2$\{\xi_n, n\geqslant 0\}$ 的定义方式 (见该节 (3) 式) 以及题 2, 可见 $\{\xi_n, n\geqslant 0\}$ 所对应的保测变换 T_ξ 在 $\mathcal{F}'\{\xi_n, n\geqslant 0\}(\subset \mathcal{F}'\{x_n, n\geqslant 0\})$ 上重合于 $\{x_n, n\geqslant 0\}$ 所对应的保测变换 T, 故如 $A\in\mathcal{U}_\xi$, 则 $A\in\mathcal{F}'\{\xi_n, n\geqslant 0\}\subset\mathcal{F}'\{x_n, n\geqslant 0\}$; 同时 $T_\xi A\doteq A$, 因而 $TA\doteq A$. 这表示 $A\in\mathcal{U}$.

10. 试证 §7.2 系 1 的逆不真，即一般地 $\mathcal{U}\neq\bigcap\limits_k\mathcal{F}'\{x_n, n\geqslant k\}$.

解：举例如下：设 $\{x_n, n\geqslant 0\}$ 是具有平稳开始分布的不可分马氏链，一切状态常返、非零而且有周期为 2, 因而相空间可分为两个不相交的集 G_1, G_2 (见 §2.3 定理 2), 而且 $P(x_0\in G_i)>0, i=1,2$(见 §2.5 定理 1). 令 $A_1=(\omega: x_0(\omega)\in G_1)$, 则 $A_1=(x_{2n}\in G_1)$, 故 $A_1\in\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}'\{x_n, n\geqslant k\}$; 然而 $TA_1\doteq(x_1\in G_1)\doteq(x_0\in G_2)\neq A_1$, 故 $A_1\overline{\in}\mathcal{U}$. □

11. 试证 §7.1 中保测集变换定义中的条件 3° 可换为条件：

(3°)　　$T(A_1\cup A_2)\doteq TA_1\cup TA_2$. 换句话说，从原来的条件 1°, 2° 及 (3°) 可推得

$$T(\Omega\backslash A)\doteq\Omega\backslash TA, \tag{1}$$

$$T\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)\doteq\bigcup_{n=1}^{\infty}TA_n. \tag{2}$$

证　由 2° 及 3° 得

$$\begin{aligned}1=P(\Omega)&=P(T\Omega)=P(T((\Omega\backslash A)\cup A))\\&=P(T(\Omega\backslash A)\cup TA)=P(T\overline{A}\cup TA);\end{aligned}\tag{3}$$

其次，从

$$\begin{aligned}1&=P(T\overline{A}\cup TA)=P(T\overline{A})+P(TA)-P(TA\cap T\overline{A})\\&=P(\overline{A})+P(A)-P(TA\cap T\overline{A})=1-P(TA\cap T\overline{A})\end{aligned}$$

得

$$P(TA\cap T\overline{A})=0. \tag{4}$$

由 (3),(4) 即得证 (1). 下面证 (2). 由 (3°) 及 (1)

$$T(\overline{A_1\cap A_2})=T(\overline{A}_1\cup\overline{A}_2)\doteq T\overline{A}_1\cup T\overline{A}_2\doteq\overline{TA_1}\cup\overline{TA_2};$$

$$\begin{aligned}T(A_1\cap A_2)&=T(\Omega\backslash\overline{A_1\cap A_2})\doteq\Omega\backslash T(\overline{A_1\cap A_2})\\&\doteq\Omega\backslash(\overline{TA_1}\cup\overline{TA_2})=TA_1\cap TA_2.\end{aligned}\tag{5}$$

由 (3°),(5) 及 (1) 得

$$\begin{aligned}T(A_1\Delta A_2)&=T(A_1\overline{A}_2\cup A_2\overline{A}_1)\doteq T(A_1\overline{A}_2)\cup T(A_2\overline{A}_1)\\&\doteq TA_1T\overline{A}_2\cup TA_2T\overline{A}_1\doteq TA_1\overline{TA_2}\cup TA_2\overline{TA_1}\\&=TA_1\Delta TA_2.\end{aligned}\tag{6}$$

根据 (6) 及 2°

$$P\Big(T\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)\Delta T\Big(\bigcup_{n=1}^{m}A_n\Big)\Big)=P\Big(T\Big[\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)\Delta\Big(\bigcup_{n=1}^{m}A_n\Big)\Big]\Big)$$
$$=P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Delta\bigcup_{n=1}^{m}A_n\Big)\to 0\quad(m\to\infty);$$

由此式及下列不等式：

$$P\Big(\Big(T\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)\Delta\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}TA_n\Big)\Big)\leqslant P\Big(T\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)\Delta T\Big(\bigcup_{n=1}^{m}A_n\Big)\Big)$$
$$+P\Big(T\Big(\bigcup_{n=1}^{m}A_n\Big)\Delta\Big(\bigcup_{n=1}^{m}TA_n\Big)\Big)+P\Big(\Big(\bigcup_{n=1}^{m}TA_n\Big)\Delta\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}TA_n\Big)\Big),$$

并利用 (3°) 即得 (2). □

12. §7.1 引理 2 的另一证明：

设 $P(A_n\Delta A_m)\to 0(n,m\to\infty)$, 由下式

$$A\Delta B=\{\omega:\ |\chi_A(\omega)-\chi_B(\omega)|\geqslant\varepsilon\}\ (1\geqslant\varepsilon>0)\tag{7}$$

可见示性函数列 $\{\chi_{A_n}(\omega)\}$ 是依测度基本的，故 $\{\chi_{A_n}(\omega)\}$ 依测度收敛于某可测函数 $y(\omega)$. 存在 $\{\chi_{A_n}(\omega)\}$ 的子列 $\{\chi_{A_{n_k}}(\omega)\}$ 以概率 1 收敛于 $y(\omega)$, 可取 $y(\omega)$ 为可测集 $A=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=j}^{\infty}A_{n_k}$ 的示性函数 $\chi_A(\omega)$. 由于

$$P(A_n\Delta A)\leqslant P(A_n\Delta A_{n_k})+P(A_{n_k}\Delta A)$$
$$=P(|\chi_{A_n}-\chi_{A_{n_k}}|\geqslant\varepsilon)+P(|\chi_{A_{n_k}}-\chi_A|\geqslant\varepsilon),$$

对任意 $\delta>0$, 当 n 及 n_k 充分大时，右方第一项由假设小于 $\frac{\delta}{2}$, 第二项则由 $\lim\limits_{k\to\infty}\chi_{A_{n_k}}=\chi_A(\text{a.s.})$ 也小于 $\frac{\delta}{2}$. 于是得证在距离 $d(A,B)=P(A\Delta B)$ 下，$\{A_n\}$ 有极限. 为证唯一性，设有二极限为 A,B, 则

$$P(A\Delta B)\leqslant P(A_n\Delta A)+P(A_n\Delta B)\to 0\ (n\to\infty),$$

故 $A\doteq B$. □

13. §7.1 定理 3(ii) 的另一证明：

设已给平稳序列 $X=\{x_n,n\geqslant 0\}$, 对任一 $A\in\mathcal{F}'\{X\}=\mathcal{F}'\{x_n,n\geqslant 0\}$, 存在 $B\in\mathcal{B}^T$, $T=(0,1,2,\cdots)$, 使

$$A\doteq(\omega:X(\omega)\in B);$$

定义 $TA\doteq(X_1(\omega)\in B)$, 其中 $X_1=\{x_{n+1},n\geqslant 0\}$. 先证 TA 与 A 的表现无关：即如 $(X(\omega)\in B_1)\doteq A\doteq(X(\omega)\in B_2)$, 则

$$(X_1(\omega)\in B_1)\doteq(X_1(\omega)\in B_2).$$

实际上，由 X 的平稳性

$$\begin{aligned}P((X_1 \in B_1)\Delta(X_1 \in B_2)) &= P(X_1 \in (B_1\Delta B_2)) \\ &= P(X \in (B_1\Delta B_2)) = P((X \in B_1)\Delta(X \in B_2)) \\ &= P(A\Delta A) = 0.\end{aligned}$$

其次证 T 是定义在 $\mathcal{F}'\{X\}$ 上的保测集变换. 条件 1° 由 T 的定义显然满足. 2° 由 X 的平稳性推出. 以下证 3°. 设 $A_n \doteq (X(\omega) \in B_n)$, 则 $\bigcup_n A_n \doteq \left(X(\omega) \in \left(\bigcup_n B_n\right)\right)$. 根据 T 的定义

$$T\left(\bigcup_n A_n\right) \doteq \left(X_1(\omega) \in \left(\bigcup_n B_n\right)\right) = \bigcup_n (X_1(\omega) \in B_n) \doteq \bigcup_n TA_n;$$

$$T\overline{A} \doteq (X_1(\omega) \in \overline{B}) = \overline{(X_1(\omega) \in B)} \doteq \overline{TA}.$$

再证 $x_n = T^n x_0$ (a.s.). 实际上，对 $B \in \mathcal{B}_1$, 由 T 的定义易见

$$T(x_n \in B) \doteq (x_{n+1} \in B),$$

由 §7.1 注 2 得 $x_{n+1} = Tx_n$, 从而 $x_n = T^n x_0$ (a.s.).

最后证唯一性. 设 $\mathcal{F}'\{X\}$ 上有二保测变换 T_1, T_2 满足

$$T_1^n x_0 = x_n = T_2^n x_0 \text{ (a.s.)} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

于是 $T_1(x_n \in B) \doteq (x_{n+1} \in B) \doteq T_2(x_n \in B)$ $(B \in \mathcal{B}_1)$. 从而

$$T_1(x_{n_1} \in B_1, \cdots, x_{n_k} \in B_k) \doteq T_2(x_{n_1} \in B_1, \cdots, x_{n_k} \in B_k),$$

$(B_i \in \mathcal{B}_1, i = 1, \cdots, k)$. 用 λ 系方法即知 T_1, T_2 在 $\mathcal{F}\{X\}$ 上重合，于是在 $\mathcal{F}'\{X\}$ 上也重合. □

附记. 关于遍历理论的进一步叙述可见 [21] 中第九章及所引文献. 关于平稳过程极限定理 (包括中心极限定理) 的研究可见本章文献. 本章主要内容取材于 [16], 关于不变集的讲法略有不同. 对平稳马氏序列的应用 (例 6), 也许是第一次详细叙述.

参 考 文 献

[1] Ибрагимов, И. А., Некоторые предельные теоремы для стационарных в узком *смысле вероятностных процессов*, ДАН СССР, 125:4(1959), 711–714; Теория вероятностей и её применения, 7:4(1962), 361–392.

[2] Синай Я. Г., О предельных теоремах для стационарных процессов, Теория вероятностей и её применения, 7:2(1962), 213–219.

[3] Rosenblatt, M., *A central limit theorem and a strong mixing condition*, Proc. Nat. Acad. Sci. Wash., 42:1(1956), 43–47.

第八章 弱平稳过程的一般理论

§8.1 基本概念

(一) 设 $\{\xi_t(\omega), t \in T\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的复数值随机过程，$\xi_t = \eta_t + i\zeta_t, \eta_t$ 与 ζ_t 分别是 ξ_t 的实、虚部分. 如 $\zeta_t(\omega) \equiv 0$, 则此过程为实值的. 因此，下述理论以实值过程为特殊情形. 为确定计，本章中总设 $T = (-\infty, \infty) = R_1$ 或 $T = (0, \pm 1, \pm 2, \cdots) = N$. 复数 $a = b + ic$ 的共轭数 $b - ic$ 记为 $\overline{a}$.

过程 $\{\xi_t(\omega), t \in T\}$, 如果满足条件

1° 对任意 $t \in T, E|\xi_t|^2 < \infty$,

2° 对任意 $t \in T, t + \tau \in T$,

$$E\xi_{t+\tau}\overline{\xi}_t = B(\tau) \tag{1}$$

不依赖于 t, 便称为 **弱平稳过程**, 而 $B(\tau)$ 则称为它的 **相关函数**. 由于 1° 及

$$E^2|\xi_{t+\tau}\overline{\xi}_t| \leqslant E|\xi_{t+\tau}|^2 \cdot E|\xi_t|^2, \tag{2}$$

可见 $B(\tau)$ 是有意义的.

通常对弱平稳过程还假定

$$E\xi_t \equiv C \quad (\text{常数}), \tag{3}$$

这时因

$$E\{[\xi_{t+\tau} - E\xi_{t+\tau}]\overline{[\xi_t - E\xi_t]}\} = E\xi_{t+\tau}\overline{\xi}_t - E\overline{\xi}_t E\xi_{t+\tau}, \tag{4}$$

故左方数值也不依赖于 t. 然而这条件从数学上看并不自然，而且对今后理论来说也非必要，故一般不引进条件 (3), 除非特别声明.

相关函数一般是复数值的，但如过程是实值的，那么它也是实值的.

复值平稳过程未必是弱平稳的. 弱平稳过程更未必是平稳过程. 容易证明：为使复值平稳过程 $\{\xi_t, t \in T\}$ 是弱平稳的，充分与必要条件是对某 $t \in T$, 有 $E|\xi_t|^2 < \infty$.

实际上，必要性由 1° 显然. 反之，如对某 $t \in T, E|\xi_t|^2 < \infty$, 由平稳性知对一切 $t, E|\xi_t|^2$ 有穷而且其值与 t 无关. 由 (2)$E|\xi_{t+\tau}\overline{\xi}_t| < \infty$. 最后

$$E\xi_{t+\tau}\overline{\xi}_t = E[\eta_{t+\tau}\eta_t + \zeta_{t+\tau}\zeta_t] - iE[\eta_{t+\tau}\zeta_t - \zeta_{t+\tau}\eta_t]. \tag{5}$$

由此式及复值平稳过程的定义可见 $E\xi_{t+\tau}\overline{\xi}_t = E\xi_\tau\overline{\xi}_0$, 而且与 t 无关.

如果 $\{\xi_t, t \in T\}$ 是弱平稳过程，而且是满足 (3) 的实值正态过程，那么由 §1.2(2) 及 (7) 可见此过程是平稳的.

相关函数 $B(\tau)$ 具有下列性质：

1) $B(0) > 0$(如 ξ_t 不几乎处处等于 0);

2) $|B(\tau)| \leqslant B(0)$;

3) $B(-\tau) = \overline{B(\tau)}$;

4) 非负定性：对任意自然数 n, 任意复数 $a_1, \cdots, a_n$, 任意 $t_1, \cdots, t_n \in T$, 有

$$\sum_{j,k=1}^{n} B(t_j - t_k) a_j \overline{a}_k \geqslant 0. \tag{6}$$

实际上，$B(0) = E|\xi_t|^2 > 0$;

$$|B(\tau)|^2 = |E\xi_{t+\tau}\overline{\xi}_t|^2 \leqslant E|\xi_{t+\tau}|^2 E|\xi_t|^2 = [B(0)]^2;$$

$$B(-\tau) = E\overline{\xi}_{t+\tau}\xi_t = \overline{E\xi_{t+\tau}\overline{\xi}_t} = \overline{B(\tau)}.$$

最后，(6) 的证与 §1.2(14) 的证类似.

定理 1 为使函数 $B(\tau)$ 为某弱平稳过程的相关函数，充分与必要条件是它具有性质 3),4).

证 必要性已如上述，充分性则由 §1.2 定理 3 推出 (取那里的 $m(t) \equiv 0$), 而且所需的弱平稳过程可取为复值正态过程. □

注 1 如果定理 1 中的 $B(\tau)$ 是实的，那么由 §1.2 定理 3 还知所需的过程可取为实的正态过程，因而如上所述，它甚至是实的平稳、正态过程.

在弱平稳过程的定义中，所给出的是过程的二级矩的性质. 因此，如果要研究这类过程的收敛性，自然考虑均方收敛性.

称弱平稳过程 $\{\xi_t, t \in R_1\}$**在 t_0 为均方连续的**. 如果

$$\lim_{h \to 0} E|\xi_{t_0+h} - \xi_{t_0}|^2 = 0; \tag{7}$$

如果过程在每一 $t \in R_1$ 都均方连续，就称它为 **均方连续的**.

定理 2 对弱平稳过程 $\{\xi_t, t \in R_1\}$, 下列四条件等价：

1° 过程均方连续；　　　2° 过程在 $t = 0$ 点均方连续；

3° $B(\tau)$ 在 R_1 上连续；　4° $B(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 点连续.

证 1° $\Longleftrightarrow$ 2°:

$$\begin{aligned} E|\xi_{t+\tau} - \xi_t|^2 &= E\xi_{t+\tau}\overline{\xi}_{t+\tau} - E\xi_{t+\tau}\overline{\xi}_t - E\xi_t\overline{\xi}_{t+\tau} + E\xi_t\overline{\xi}_t \\ &= E\xi_\tau\overline{\xi}_\tau - E\xi_\tau\overline{\xi}_0 - E\xi_0\overline{\xi}_\tau + E\xi_0\overline{\xi}_0 = E|\xi_\tau - \xi_0|^2. \end{aligned}$$

1° $\Longrightarrow$ 3°:

$$\begin{aligned} |B(t+\tau) - B(t)| &= |E\xi_{t+\tau}\overline{\xi}_0 - E\xi_t\overline{\xi}_0| = |E(\xi_{t+\tau} - \xi_t)\overline{\xi}_0| \\ &\leqslant \{E|\xi_{t+\tau} - \xi_t|^2 \cdot E|\xi_0|^2\}^{\frac{1}{2}} = \{E|\xi_{t+\tau} - \xi_t|^2 \cdot B(0)\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

3° $\Longrightarrow$ 4°: 显然.

4° $\Longrightarrow$ 1°:

$$E|\xi_{t+\tau} - \xi_t|^2 = E[\xi_{t+\tau} - \xi_t]\overline{[\xi_{t+\tau} - \xi_t]} = 2B(0) - B(\tau) - \overline{B(\tau)}. \ \square$$

作为定理 1 的加强，有下面的

定理 3 为使 $B(\tau)(\tau \in R_1)$ 为某均方连续的弱平稳过程的相关函数，充分与必要条件是在一维 Borel 可测空间 $(R_1, \mathcal{B}_1)$ 上存在有穷测度 $F(A)$, 使

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} F(d\lambda). \tag{8}$$

此时 $B(\tau)$ 与 $F(A)$ 相互唯一决定. 显然 $B(0) = F(R_1)$.

证 充分性: 设 $B(\tau)$ 可表为 (8) 之形，由于 $|e^{i\lambda\tau}| = 1$ 有界，故可在积分号下取极限，从而可得 $B(\tau)$ 的连续性. 由 (8) 知 $B(-\tau) = \overline{B(\tau)}$; 又因

$$\sum_{j,k=1}^{n} B(t_j - t_k) a_j \bar{a}_k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\Big\{\int e^{i\lambda(t_j - t_k)} F(d\lambda)\Big\} a_j \bar{a}_k$$
$$= \int_{R_1} \Big(\sum_{j=1}^{n} e^{it_j\lambda} a_j\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} e^{-it_k\lambda}\bar{a}_k\Big) F(d\lambda) = \int_{R_1} \Big|\sum_{k=1}^{n} e^{it_k\lambda} a_k\Big|^2 F(d\lambda) \geqslant 0$$

故由定理 1 知 $B(\tau)$ 是某弱平稳过程的相关函数. 根据定理 2 知此过程是均方连续的.

必要性: 如 $B(\tau)$ 是某均方连续弱平稳过程的相关函数，那么它是连续的非负定函数，而且 $B(0) < \infty$. 根据 Bochner-Хинчин 定理，在 $(R_1, \mathcal{B}_1)$ 上有唯一的有穷测度 F, 使 (8) 成立. □

(8) 式称为 **相关函数的谱展式**, 其中的 $F(A)(A \in \mathcal{B}_1)$ 称为过程的 **谱测度**. 由 (8) 可见连续相关函数 $B(\tau)$ 如在 0 点大于 0, 则除一常数因子外，和某随机变量的特征函数一致.

如果存在关于勒贝格测度几乎处处非负的函数 $f(\lambda)$, 使

$$F(A) = \int_A f(\lambda) d\lambda, \tag{9}$$

便称 $f(\lambda)$ 为过程的 **谱密度**. 这时 (8) 化为

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} f(\lambda) d\lambda. \tag{10}$$

由 Fourier 变换的反演公式，当 $B(\tau)$ 绝对可积时，有

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} B(\tau) d\tau. \tag{11}$$

现在考虑 $T = N$ 的情形. 以 Herglotz 定理代替 Bochner-Хинчин 定理，便得与定理 3 对应的

定理 3′ 为使 $B(\tau)(\tau \in N)$ 是某弱平稳序列的相关函数, 充分与必要条件是在[1]$(\prod, \prod\mathcal{B}_1)$ 上存在有穷测度 $F(A)$, 使

$$B(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} F(d\lambda). \tag{12}$$

此时 $B(\tau)$ 与 $F(A)$ 相互唯一决定. 显然 $B(0) = F(\prod)$.

类似地，称 (12) 为 **相关函数的谱展式**, 其中的 $F(A)(A \in \prod\mathcal{B}_1)$ 称为 **序列的谱测度**.

[1] 自然，这里 $\prod\mathcal{B}_1$ 是指 $\prod = [-\pi, \pi]$ 中一切 Borel 子集所成 σ 代数.

(二) 例.

例 1 设弱平稳过程 $\{\xi_t, t\in R_1\}$ 均方连续，而且取实数值. 试研究其相关函数 $B(\tau)$ 与谱测度具有哪些特殊性质. 由于此时

$$B(\tau)=E\xi_{t+\tau}\xi_t, \tag{13}$$

$B(\tau)$ 也是实值的，性质 3) 化为 $B(-\tau)=B(\tau)$, 可见 $B(\tau)$ 是偶函数，对原点对称. 由此及 (8) 得

$$B(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda\tau}F(d\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda\tau}F(d\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda\tau}\widetilde{F}(d\lambda), \tag{14}$$

这里 $\widetilde{F}(A)$ 仍是 $(R_1,\mathcal{B}_1)$ 上有穷测度， $\widetilde{F}(A)=F(-A)$, 而 $-A=(-x:x\in A)$. 由于谱测度唯一，故从 (14) 得

$$F(A)=F(-A). \tag{15}$$

在 (8) 中展开 $E^{i\lambda\tau}=\cos\lambda\tau+i\sin\lambda\tau$, 既然 $B(\tau)$ 是实的，故

$$B(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda\tau F(d\lambda). \tag{16}$$

如果假定 $F(\{0\})=0$(今后以 $\{a\}$ 表只含 a 点的集), 那么根据 (15), 可改写 (16) 为

$$B(\tau)=2\int_{0}^{\infty}\cos\lambda\tau F(d\lambda)=\int_{0}^{\infty}\cos\lambda\tau F_1(d\lambda), \tag{17}$$

其中 $F_1(A)=2F(A)$.

今设谱密度 $f(\lambda)$ 存在，由 (15) 可见：对几乎一切 (关于勒贝格测度)λ, 有

$$f(\lambda)=f(-\lambda). \tag{18}$$

再由 (11) 及 $B(\tau)=B(-\tau)$, 得

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda\tau\cdot B(\tau)d\tau=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos\lambda\tau\cdot B(\tau)d\tau. \tag{19}$$

例 2 设随机变量序列 $\{\xi_n, n\in N\}$ 满足规范化条件 $E|\xi_n|^2=1$ 及条件

$$E\xi_{n+\tau}\overline{\xi}_n=0,\quad \tau\neq 0, \tag{20}$$

显然它是弱平稳序列. 这二条件可合写为

$$\begin{aligned}B(\tau)&=1,\quad \tau=0\\&=0,\quad \tau\neq 0.\end{aligned} \tag{21}$$

特别，独立随机变量序列 $\{\xi_n, n\in N\}$ 如使 $E\xi_n=0, E|\xi_n|^2=1$, 那么它是弱平稳的.

例 3(序列的滑动和) 设规范化序列 $\{\xi_n, n \in N\}$ 满足 (20). 用均方收敛, 定义

$$x_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \xi_{n-i}, \quad \text{其中} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i|^2 < \infty; \tag{22}$$

$$y_n = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \xi_{n-i}, \quad \text{其中} \sum_{i=0}^{\infty} |b_i|^2 < \infty. \tag{23}$$

$$z_n = \sum_{i=0}^{m} c_i \xi_{n-i}. \tag{24}$$

a_i, b_i, c_i 均为复数, 那么 $\{x_n, n \in N\}, \{y_n, n \in N\}, \{z_n, n \in N\}$ 都是弱平稳序列, 它们分别有相关函数为

$$B_x(\tau) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \overline{a}_{i-\tau}, \tag{25}$$

$$B_y(\tau) = \sum_{\substack{i \geqslant 0 \\ i-\tau \geqslant 0}} b_i \overline{b}_{i-\tau}, \tag{26}$$

$$B_z(\tau) = \sum_{\substack{m \geqslant i \geqslant 0 \\ m \geqslant i-\tau \geqslant 0}} c_i \overline{c}_{i-\tau}. \tag{27}$$

例 4 设 $\{z_n, n \geqslant 1\}$ 为一列随机变量, 使

$$E z_{n+\tau} \overline{z}_n = \begin{cases} b_n & (\tau = 0), \\ 0 & (\tau \neq 0). \end{cases} \tag{28}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty. \tag{29}$$

再取一列实常数 $\{\lambda_k\}$ 而定义

$$\xi_t = \sum_{k=1}^{\infty} z_k e^{i\lambda_k t} \quad (t \in R_1), \tag{30}$$

收敛指均方收敛, 我们证明, 这级数收敛, 而且 $\{\xi_t, t \in R_1\}$ 是均方连续的弱平稳过程.

实际上, (30) 中级数收敛的充分与必要条件, 由 Cauchy 判别法, 是对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > m \geqslant N$,

$$E\Big|\sum_{k=m}^{n} z_k e^{i\lambda_k t}\Big|^2 = \sum_{k=m}^{n} E|z_k|^2 = \sum_{k=m}^{n} b_k < \varepsilon.$$

显然, 这条件等价于 (29). 其次

$$E\xi_{t+\tau}\overline{\xi}_t = E\Big(\sum_{k=1}^{\infty} z_k e^{i\lambda_k(t+\tau)}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \overline{z}_j e^{-i\lambda_j t}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} E|z_k|^2 e^{i\lambda_k \tau} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{i\lambda_k \tau} \tag{31}$$

与 t 无关而且在 $\tau = 0$ 连续, 故由定理 2 知此过程是均方连续弱平稳过程. 由 (31)

$$B(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{i\lambda_k \tau} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} F(d\lambda). \tag{32}$$

这里谱测度 $F(A)=\sum_{(k:\lambda_k\in A)} b_k \quad (A\in\mathcal{B}_1)$.

与 (32) 对应，我们也可把 (30) 写成积分的形式：

$$\xi_t=\sum_{k=1}^{\infty} z_k e^{i\lambda_k t}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} Z(d\lambda), \tag{33}$$

其中 $Z(A)=\sum_{(k:\lambda_k\in A)} z_k$, $(A\in\mathcal{B}_1)$, (33) 中的积分就定义为 $\sum_{k=1}^{\infty} z_k e^{i\lambda_k t}$, 它无非是后者的另一写法而已.

然而，定理 3 表明：任一均方连续的弱平稳过程的相关函数都可表为 (8). 既然对由 (30) 定义的特殊过程，有 (33) 中的积分表示，那么，自然会想到：是否任一均方连续的弱平稳过程 $\{\xi_t, t\in R_1\}$, 都能表为

$$\xi_t=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} Z(d\lambda) \tag{34}$$

呢？如果再往下想，就会发现许多基本上的困难：由于 ξ_t 是随机变量，(34) 右方也必须如此，因而测度 $Z(A)$ 必须是随机的，这样就自然要问：什么叫随机测度？什么叫关于随机测度的积分？下面就来正式引进这些概念，然后证明：在所引进的意义下，(34) 的确对每一上述过程正确.

§8.2 正交测度与对它的积分

(一) 我们先定义正交测度，随机测度将作为它的特殊情形而引进.

设 $(E,\mathcal{B},F)$ 为任意具有测度 F 的可测空间，令

$$\mathcal{B}^{(0)}=(A:A\in\mathcal{B}, F(A)<\infty).$$

又设 H 为任意 Hilbert 空间，H 中二元 h_1,h_2 的内积记为 (h_1,h_2). 定义在 $\mathcal{B}^{(0)}$ 上而取值于 H 中的集函数 $Z(A)(A\in\mathcal{B}^{(0)})$, 如果对任意 $A_1\in\mathcal{B}^{(0)}, A_2\in\mathcal{B}^{(0)}$, 有

$$(Z(A_1),Z(A_2))=F(A_1A_2), \tag{1}$$

便称为在 $(E,\mathcal{B},F)$**上的正交测度**, 如不混乱，亦简称为 **正交测度**. 命名的根据是

引理 1 $Z(A)(A\in\mathcal{B}^{(0)})$ 是正交测度的充分与必要条件是：

1° $\|Z(A)\|^2\equiv(Z(A),Z(A))=F(A)$; (2)

2° 如 $A_1A_2=\phi, A_1\in\mathcal{B}^{(0)}, A_2\in\mathcal{B}^{(0)}$, 则

$$(Z(A_1),Z(A_2))=0; \tag{3}$$

3° 如 $A_i\in\mathcal{B}^{(0)}(i=1,2,\cdots)$ 互不相交，$\sum_{i=1} F(A_i)<\infty$, $\left(\text{因而 } A=\bigcup_n A_n\in\mathcal{B}^{(0)}\right)$, 则在 H 中依范收敛的意义下，有

$$Z\Big(\bigcup_n A_n\Big)=\sum_n Z(A_n). \tag{4}$$

证 必要性: (2),(3) 由 (1) 直接推出. (4) 则由于

$$\begin{aligned}
&\left\|Z(A)-\sum_{n=1}^{m} Z(A_n)\right\|^2 \\
&=\|Z(A)\|^2+\sum_{n=1}^{m}\|Z(A)_n\|^2-\sum_{n=1}^{m}(Z(A),Z(A_n))-\sum_{n=1}^{\infty}(Z(A_i),Z(A)) \\
&=F(A)+\sum_{n=1}^{m}F(A_n)-2\sum_{n=1}^{m}F(A_n)\to 0 \quad (m\to\infty).
\end{aligned}$$

充分性: 注意由 3°, 对 $A_1\in\mathcal{B}^{(0)}, A_2\in\mathcal{B}^{(0)}$, 有

$$Z(A_1)=Z(A_1A_2)+Z(A_1\backslash A_2), Z(A_2)=Z(A_1A_2)+z(A_2\backslash A_1).$$

因而由 1°, 2°, 得

$$\begin{aligned}
(Z(A_1),Z(A_2))&=\|Z(A_1A_2)\|^2+(Z(A_1A_2),Z(A_2\backslash A_1)) \\
&\quad+(Z(A_1\backslash A_2),Z(A_1A_2))+(Z(A_1\backslash A_2),Z(A_2\backslash A_1)) \\
&=F(A_1A_2). \ \square
\end{aligned}$$

以后称测度 $F(A)$ 为正交测度 $Z(A)$ 的 **均方测度**.

(二) 试引进关于正交测度的积分. 设 $f(x)$ 为定义在 E 上而取复数值的函数, 其实、虚部分关于 $\mathcal{B}$ 可测而且

$$\int_E |f(x)|^2F(dx)<\infty. \tag{5}$$

全体这样的函数构成一 Hilbert 空间, 记为 $L^2(E,\mathcal{B},F)$, 其中任二元 f,g 的内积定义为

$$(f,g)_{L^2}=\int_E f(x)\overline{g(x)}F(dx). \tag{6}$$

我们的目的是想对 $L^2(E,\mathcal{B},F)$ 中的一切函数 f, 定义积分

$$I(f)=\int_E f(x)Z(dx). \tag{7}$$

步骤与定义通常的积分一样: 先对一切形为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}(x) \quad (A_i\in\mathcal{B}^{(0)}, a_i \text{ 为复数}) \tag{8}$$

的简单函数 (它们的集记为 S) 定义 (7), 然后通过极限过渡以对一般的 f 定义积分.

对 (8) 中函数 $f(x)$, 定义

$$I(f)=\sum_{i=1}^{n}a_iZ(A_i), \tag{9}$$

由于 $Z(A) \in H$, 显然 $I(f) \in H$. 为使此定义合法，必须证明 $I(f)$ 的值，作为 H 中的元，不依赖于 $f(x)$ 是由 (8) 式的何种方式来表达. 为此，先注意在 (8) 中不妨假定 $A_i A_j = \phi (i \neq j)$, 因为有必要时可利用 3° 而适当改变 a_i 的值. 今设 $f(x)$ 有另一表达式

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}(x),$$

造一组集 $\{C_k\}, k = 1, 2, \cdots, l$, 使每 C_k 为某个 A_i 与 B_j 的交，又 $\{C_k\}$ 包含全体这样的交集，则 $C_k C_i = \phi(i \neq k)$, 而且在 C_k 上， $a_i = b_j$, 记此公共值为 c_k. 由 3°, 在 H 中相等的意义下 [1]

$$\sum_{i=1}^{n} a_i Z(A_i) = \sum_{k=1}^{l} c_k Z(C_k) = \sum_{j=1}^{m} b_j Z(B_j),$$

换言之， $I(f)$ 的值唯一，不依赖于 f 的表达式.

由定义 (9) 易见 $I(f)$ 在 S 上具有性质:

c.1. $I(af + bg) = aI(f) + bI(g)$ (a, b 复数);

c.2. $(I(f), I(g)) = (f, g)_{L^2}$,

$$\|I(f)\|^2 = \|f\|^2_{L^2}.$$

证 c.1 的证与上面证 $I(f)$ 的值唯一的方法相同. 为证 c.2, 注意

$$\begin{aligned}\Big(\sum_i a_i z(A_i), \sum_j b_j z(B_j)\Big) &= \sum_{i,j} a_i \bar{b}_j (z(A_i), z(B_j)) \\ &= \sum_{i,j} a_i \bar{b}_j F(A_i B_j) = \Big(\sum_I a_i \chi_{A_i}(x), \sum_j b_j \chi_{B_j}(x)\Big)_{L^2},\end{aligned} \tag{10}$$

由此立得 c.2. □

现在任取 $f(x) \in L^2(E, \mathcal{B}, F)$, 找一列 [2] $f_n(x) \in S$, 使 $\|f_n - f\|_{L^2} \to 0$. 定义

$$I(f) = \lim_{n \to \infty} I(f_n). \tag{11}$$

为使这定义合理，必须证明这均方收敛意义下的极限存在，而且与趋于 f 的简单函数列 $\{f_n\}$ 的选择无关. 由 c.1 及 c.2 得

$$\begin{aligned}\|I(f_m) - I(f_n)\| &= \|I(f_m - f_n)\| = \|f_m - f_n\|_{L^2} \\ &\leqslant \|f_m - f\|_{L^2} + \|f - f_n\|_{L^2} \to 0 \quad (m, n \to \infty),\end{aligned}$$

故得证前一论断. 今如 $\{\widetilde{f}_n\}$ 为另一列收敛于 f 的简单函数，即如 $\|\widetilde{f}_n - f\|_{L^2} \to 0$, 它由 (11) 所产生的值记为 $\widetilde{I}(f)$, 仍由 c.1,c.2 得

$$\|I(f_n) - I(\widetilde{f}_n)\| = \|f_n - \widetilde{f}_n\|_{L^2} \leqslant \|f_n - f\|_{L^2} + \|\widetilde{f}_n - f\|_{L^2} \to 0,$$

$$\|\widetilde{I}(f) - I(f)\| \leqslant \|\widetilde{I}(f) - I(\widetilde{f}_n)\| + \|I(\widetilde{f}_n) - I(f_n)\| + \|I(f_n) - I(f)\| \to 0.$$

[1] 即：如 $\|h_1 - h_2\| = 0$, 则说 $h_1 = h_2$.

[2] 参看那汤松，实变函数论，第七章第二节定理 6.

这证明了后一论断.

在 $L_2(E,\mathcal{B},F)$ 上, $I(f)$ 有下列性质:

D.1. 对任意复数 a,b,

$$I(af+bg)=aI(f)+bI(g); \tag{12}$$

D.2. $(I(f),I(g))=(f,g)_{L^2}$, (13)

$$\|I(f)\|^2=\|f\|^2_{L^2}. \tag{14}$$

证. 取二列简单函数 $\{f_n\},\{g_n\}$, 使

$$\|f_n-f\|_{L^2}\to 0, \|g_n-g\|_{L^2}\to 0,$$

则

$$\begin{aligned}\|af_n+bg_n-af-bg\|_{L^2}&=\|a(f_n-f)+b(g_n-g)\|_{L^2}\\&\leqslant |a|\|f_n-f\|_{L^2}+|b|\|g_n-g\|_{L^2}\to 0,\\ I(af+bg)=\lim_{n\to\infty}I(af_n+bg_n)&=\lim_{n\to\infty}aI(f_n)+\lim_{n\to\infty}bI(g_n)=aI(f)+bI(g).\end{aligned}$$

其次, 利用 Hilbert 空间中内积的连续性 [1] :"如 $\|a_n-a\|\to 0, \|b_n-b\|\to 0$, 则 $(a_n,b_m)\to(a,b), n,m\to\infty$", 得

$$(I(f_n),I(g_n))\to(I(f),I(g)),$$

$$(f_n,g_n)_{L^2}\to(f,g)_{L^2},$$

由此及 c.2 即得证 (13), 而 (14) 则是 (13) 的特殊情形. □

(三) 现在考虑一类特殊的 Hilbert 空间. 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为概率空间, $z(\omega)$ 为其上的复数值随机变量. 令

$$H=(\text{ 全体如下的}z(\omega):E|z(\omega)|^2<\infty), \tag{15}$$

在 H 中引进内积

$$(z_1,z_2)=Ez_1\overline{z}_2=\int_\Omega z_1(\omega)\overline{z_2(\omega)}P(d\omega), \tag{16}$$

因而

$$\|z\|^2=E|z|^2, \tag{17}$$

则 H 是一 Hilbert 空间. 实际上, 我们只要验证 H 的线性 (关于复系数) 与完备性, 因为 Hilbert 空间定义中其它条件都很明显地满足. 线性由 Minkowski 不等式

$$E|a_1z_1+a_2z_2|^2\leqslant(|a_1|E^{\frac12}|z_1|^2+|a_2|E^{\frac12}|z_2|^2)^2<\infty \tag{18}$$

立得. 今设 $\{z_n\}\subset H$, $E|z_n-z_m|^2\to 0\ (n,m\to\infty)$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 有

$$P(|z_n-z_m|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}E|z_n-z_m|^2\to 0\quad(n,m\to\infty).$$

[1]见泛函数分析概要, 127 页, 杨从仁译, 科学出版社, 1964(第二次印刷).

故存在子列 $z_{k_n} \to z(\text{a.s.}), n \to \infty$. 因而对固定 m

$$z_m - z_{k_n} \to z_m - z \ \ (\text{a.s.}), \quad n \to \infty.$$

但 $E|z_m - z_{k_n}|^2 \to 0 \ (m \to \infty, \ n \to \infty)$, 故由 Fatou 引理

$$E|z_m - z|^2 \leqslant \varliminf_{n\to\infty} E|z_m - z_{k_n}|^2 \to 0 \ \ (m \to \infty),$$

于是存在 m_0, 使 $m \geqslant m_0$ 时， $E|z_m - z|^2$ 都有穷. 这说明 $z_m - z \in H$. 既然 $z_m \in H$, 由 H 的线性即知 $z \in H$. 这样便证明了 H 的完备性.

其实还可以造出 H 的许多子 Hilbert 空间.

任取 H 的子集 H_1, 由 H_1 中有穷多个元用复系数所组成的全体线性组合构成 H 的子集 $L(H_1)$. 由 $L(H_1)$ 中的元列在均方收敛意义下的全体极限构成集 $\overline{L}(H_1)$, 称 $\overline{L}(H_1)$ 为 **H_1的线性闭包**. 由 H 的完备性知 $\overline{L}(H_1) \subset H$. 试证 $\overline{L}(H_1)$ 是 H 的子 Hilbert 空间. 实际上，如 $y_i(\omega) \in \overline{L}(H_1)$, 则必存在 $z_n^{(i)} \in L(H_1)$, 使 $\|y_i - z_n^{(i)}\| \to 0 \ (n \to \infty), i = 1, 2$. 于是

$$\begin{aligned}\|a_1 y_1 + a_2 y_2 - a_1 z_n^{(1)} - a_2 z_n^{(2)}\| &\leqslant |a_1| \|y_1 - z_n^{(1)}\| \\ &\quad + |a_2| \|y_2 - z_n^{(2)}\| \to 0 \ \ (n \to \infty).\end{aligned}$$

因而 $a_1 y_1 + a_2 y_2 \in \overline{L}(H_1)$, 即得证 $\overline{L}(H_1)$ 的线性. 次证 $\overline{L}(H_1)$ 的完备性. 设 $\{y_n\} \subset \overline{L}(H_1), \|y_n - y_m\| \to 0 (n, m \to \infty)$. 由定义存在 $\{z_m^{(n)}\} \in L(H_1)$, 使 $\|z_m^{(n)} - y_n\| \to 0 (m \to \infty), n = 1, 2, \cdots$. 因而存在正整数 l_n, 使

$$\|z_{l_n}^{(n)} - y_n\| < \frac{1}{n}.$$

于是

$$\begin{aligned}\|z_{l_n}^{(n)} - z_{l_m}^{(m)}\| &\leqslant \|z_{l_n}^{(n)} - y_n\| + \|y_n - y_m\| + \|y_m - z_{l_m}^{(m)}\| \\ &< \frac{1}{n} + \|y_n - y_m\| + \frac{1}{m} \to 0 (n, m \to \infty).\end{aligned}$$

由此知存在 y, 使 $\|y - z_{l_n}^{(n)}\| \to 0 (n \to \infty)$. 故

$$\begin{aligned}\|y - y_n\| &\leqslant \|y - z_{l_n}^{(n)}\| + \|z_{l_n}^{(n)} - y_n\| \\ &< \|y - z_{l_n}^{(n)}\| + \frac{1}{n} \to 0 \ \ (n \to \infty).\end{aligned}$$

这说明 y 是二序列 $\{z_{l_n}^{(n)}\}$ 与 $\{y_n\}$ 的公共极限. 既然 $z_{l_n}^{(n)} \in L(H_1)$, 故 $y \in \overline{L}(H_1)$ 而得证 $\overline{L}(H_1)$ 的完备性. 由此即易见 $\overline{L}(H_1)$ 也是 Hilbert 空间.

有了这些准备，现在可以对随机测度与随机积分下定义了.

我们称取值于 $\overline{L}(H_1)$ 中的正交测度为 **$\overline{L}(H_1)$中的随机测度** [1]；换句话说，后者是这样的集函数 $Z(A), A \in \mathcal{B}^{(0)}$, 使

(E_1) $Z(A) \in \overline{L}(H_1)$, (19)

[1] 更明确些，应该称为 **正交随机测度**, 为简便起见，我们省去了“正交”二字.

$(E_2)\quad EZ(A_1)\overline{Z(A_2)} = F(A_1A_2).$ (20)

没有必要明确地指出 $\overline{L}(H_1)$ 时，就简称 $Z(A)$ 为 **随机测度**. 关于它的积分

$$I(f) = \int_E f(x)Z(dx) \quad (f \in L^2(E, \mathcal{B}, F))$$

称为 **随机积分**.

如果限制 $Z(A)$ 及 $f(x)$ 只取实值，也可类似地定义实随机测度与实随机积分.

(四) 在普通测度论中熟知，由分布函数可产生 R_1 上一个测度. 下面看到，对随机测度也有类似事实，它提供利用随机过程以造随机测度的普遍方法.

设 T 为区间，开或闭，有界或无界均可. 称随机过程 $\{y_t, t \in T\}$ 为 **正交增量过程**, 如果

$$E|y_t - y_s|^2 < \infty \quad (s, t \in T), \tag{21}$$

而且对 T 中任一组 $t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4$, 有

$$E\{(y_{t_4} - y_{t_3})\overline{(y_{t_2} - y_{t_1})}\} = 0. \tag{22}$$

例如， Wiener 过程 (见 §3.4) 是正交增量过程.

任取 $t_0 \in T$, 定义一函数

$$g_{t_0}(t) = \begin{cases} E|y_t - y_{t_0}|^2, & \text{如}\, t \geqslant t_0, \\ -E|y_t - y_{t_0}|^2, & \text{如}\, t < t_0. \end{cases} \tag{23}$$

这函数虽依赖于 t_0, 然而，如另选 $t_1 > t_0$, 利用 (22) 不难证明 $g_{t_0}(t) = g_{t_1}(t) + E|y_{t_1} - y_{t_0}|^2$, 故 $g_{t_0}(t)$ 与 $g_{t_1}(t)$ 只相差一常数. 以后便固定 t_0, 并记 $g_{t_0}(t)$ 为 $g(t)$. 由 (23) 及 (22) 还可见 $g(t)$ 是单调不减函数，因而它的不连续点集 A 至多是可列集，其实有

$$g(t) - g(s) = E|y_t - y_s|^2 \quad (t > s). \tag{24}$$

对任意 $t \in T$, 试证存在二随机变量 y_{t-0} 与 y_{t+0}, 使[1] $\underset{s\to t-0}{\text{l.i.m}}\, y_s = y_{t-0}$, $\underset{s\to t+0}{\text{l.i.m}}\, y_s = y_{t+0}$.(当然，如 t 是 T 的左端点或端点，则只是 y_{t+0} 或 y_{t-0} 有意义.) 实际上，因 $g(t)$ 不减，故当 $s < t$ 时，它有上界，于是

$$\lim_{s_1, s_2 \to t-0} E|y_{s_2} - y_{s_1}|^2 = \lim_{s_1, s_2 \to t-0} [g(s_2) - g(s_1)] = 0,$$

利用 (三) 中证明 H 的完备性的方法，可知存在 y_{t-0} 使 $\underset{s\to t-0}{\text{l.i.m}}\, y_s = y_{t-0}$. 同样可证明 y_{t+0} 存在. 由 (24) 还可见：当 $t \overline{\in} A$ 时

$$y_{t-0} = y_t = y_{t+0} \quad \text{(a.s.)}. \tag{25}$$

现在定义

$$y_-(t) = y_{t-0}, \quad y_+(t) = y_{t+0},$$

[1] 这里极限表 $\lim\limits_{s\to t-0} E|y_s - y_{t-0}|^2 = 0$ 等；然而并不要求 $E|y_s|^2 < \infty, E|y_{t-0}|^2 < \infty$.

那么 $\{y_-(t), t\in T_-\}\{y_+(t), t\in T_+\}$ 也是正交增量过程，这里 $T_-=T$ 或 $T-\{T$ 的左端点$\}$，视 T 没有或有左端点而定，$T_+=T$ 或 $T-\{T$ 的右端点$\}$，视 T 没有或有右端点而定；而且前一过程左均方连续，后一过程右均方连续.

实际上，考虑 $\{y_-(t), t\in T_-\}$. 由 (21) 知 $y_t-y_s\in H$，当 $s\to s_1-0$ 时，由 H 的完备性，$y_t-y_-(s_1)\in H$，令 $t\to t_1-0$，再由此完备性得 $y_-(t_1)-y_-(s_1)\in H$，故

$$E|y_-(t_1)-y_-(s_1)|^2<\infty. \tag{26}$$

其次，利用 Hilbert 空间 H 内积的连续性，由 (22) 得

$$E\{(y_-(t_4)-y_-(t_3))\overline{(y_-(t_2)-y_-(t_1))}\}=0. \tag{27}$$

根据 (26),(27) 知 $\{y_-(t), t\in T_-\}$ 是正交增量过程. 再利用 (24)，得

$$g(t-0)-g(s-0)=E|y_-(t)-y_-(s)|^2\quad(t>s). \tag{28}$$

令 $s\to t-0$，得左方为 0，故 $\{y_-(t), t\in T_-\}$ 左均方连续.

对 $\{y_+(t), t\in T_+\}$ 的证明类似，此时代替 (28) 有

$$g(t+0)-g(s+0)=E|y_+(t)-y_+(s)|^2\quad(t>s). \tag{29}$$

由此可见，只需在可列多个点 $t\in A$ 上改变 $\{y_t, t\in T\}$ 的值，就可使此过程左 (或右) 均方连续.

定理 1 设 $\{y_t, t\in T\}$ 是左均方正交增量过程，$T=(a,b)$，$-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$，则在 $(T, T\mathcal{B}_1, F)$ 上存在唯一随机测度 $Z(A)$，它取值于 $\overline{L}\{y_t, t\in T\}$，而且满足

$$Z([t_1,t_2))=y_{t_2}-y_{t_1}\quad(t_1<t_2), \tag{30}$$

这里 $F(A), A\in T\mathcal{B}_1$，是由 (23) 所定义的函数 $g(t)\doteqdot g_{t_0}(t)$ 所产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度.

证 上面已证明 $g(t)(t\in T)$ 是单调不减函数，由左均方连续及 (23) 知 $g(t)$ 左连续，因而 $g(t)$ 在 $T\mathcal{B}_1$ 上产生唯一测度 $F(A)$，它可能无穷，使

$$F([s,t))=G(t)-g(s)\quad(t>s), \tag{31}$$

这里 $T\mathcal{B}_1$ 表 T 中全体 Borel 子集所成 σ 代数.

如下定义 $Z(A)$: 如 $A=[s,t)$，令

$$Z([s,t))=y_t-y_s; \tag{32}$$

如 $A=\bigcup_{i=1}^{n}[s_i,t_i), [s_i,t_i)\cap[s_j,t_j)=\phi, i\neq j$，令

$$Z(A)=\sum_{i=1}^{n}Z([s_i,t_i)). \tag{33}$$

全体这种 A 集 ($n>0, s_i, t_i \in T, s_i < t_i$ 均任意) 构成 T 中一个环 K. $Z(A)$ 在 K 上有限可加，而且由 (22) 得

$$
\begin{aligned}
E|Z(A)|^2 &= E\Big|\sum_{i=1}^{n}(y_{t_i}-y_{s_i})\Big|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E(y_{t_i}-y_{s_i})\overline{(y_{t_j}-y_{s_j})} = \sum_{i=1}^{n}E|y_{t_i}-y_{s_i}|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(g(t_i)-g(s_i)) = \sum_{i=1}^{n}F([s_i,t_i)) = F(A). \qquad (34)
\end{aligned}
$$

最后应对任意 $A \in T\mathcal{B}_1, F(A)<\infty$, 定义 $Z(A)$. 为此，任取一列集 $\{A_n\} \subset K$, 使

$$
F(A_n \Delta A) \to 0 \quad (n\to\infty). \qquad (35)
$$

注意如 $A\in K, B\in K, AB=\phi$, 利用 (22) 并仿 (34) 中的计算，立知 $EZ(A)\overline{Z(B)}=0$. 由此并仿照引理 1 充分性部分的证明，可见一般有

$$
E\{Z(A)\overline{Z(B)}\} = E|Z(AB)|^2 = F(AB) \ \ (A\in K, B\in K), \qquad (36)
$$

这里最后一等式用到 (34). 于是对上述 $\{A_n\}$ 有

$$
\begin{aligned}
E|Z(A_n)-Z(A_m)|^2 &= E|Z(A_n\backslash A_m)+Z(A_nA_m)-Z(A_m\backslash A_n)-Z(A_mA_n)|^2 \\
&= E|Z(A_n\backslash A_m)-Z(A_m\backslash A_n)|^2 \\
&= E|Z(A_n\backslash A_m)|^2 + E|Z(A_m\backslash A_n)|^2 \\
&= F(A_n\backslash A_m)+F(A_m\backslash A_n) = F(A_n\Delta A_m) \\
&\leqslant F(A_n\Delta A)+F(A\Delta A_m) \to 0 \ \ (m\to\infty, n\to\infty), \qquad (37)
\end{aligned}
$$

这说明对 $\{Z(A_n)\}$ 存在均方收敛意义下的极限，我们就定义

$$
Z(A) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, Z(A_n). \qquad (38)
$$

不难验证， $Z(A)$ 的值不依赖于满足 (35) 的 $\{A_n\}$ 的选择，即如有另一如是的集列 $\{\widetilde{A}_n\}$, 且

$$
\widetilde{Z}(A) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, Z(\widetilde{A}_n), \qquad (39)
$$

则有

$$
Z(A) = \widetilde{Z}(A) \quad (\text{a.s.}). \qquad (40)
$$

现在证 $Z(A)$ 是取值于 $\overline{L}\{y_t, t\in T\}$ 中的随机测度. 对满足 $F(A)<\infty$ 的 A, 由 (38) 及 $Z(A_n)\in L\{y_t, t\in T\}$ 知 $Z(A)\in \overline{L}\{y_t, t\in T\}$, 故 (E_1) 满足. 对 A, B, 如 $F(A)<\infty, F(B)<\infty$, 取 $A_n\in K, B_n\in K$ 使

$$
F(A_n\Delta A)\to 0, \quad F(B_n\Delta B)\to 0; \qquad (41)
$$

$$
Z(A) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, Z(A_n), \quad Z(B) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, Z(B_n). \qquad (42)
$$

注意对任意 $\varepsilon > 0$, 由 $F(|\chi_{A_n} - \chi_A| > \varepsilon) \leqslant F(A_n \Delta A) \to 0\ (n \to \infty)$, 知存在子列 $\{A_{k_n}\}$, 使 $F(\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{A_{k_n}} = \chi_A) = 1$, 有必要时，自 $\{A_n\}$ 中删去一些集后，就可设此子列就是 $\{A_n\}$. 对 $\{B_n\}$ 也可作同样假定. 故由 (42),(36)

$$
\begin{aligned}
EZ(A)\overline{Z(B)} &= \lim_{n\to\infty} EZ(A_n)\overline{Z(B_n)} = \lim_{n\to\infty} F(A_n B_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_T \chi_{A_n}\chi_{B_n} F(dx) = \int_T \chi_A \chi_B F(dx) = F(AB),
\end{aligned} \tag{43}
$$

其中用到控制收敛定理. 于是得证 (E_2).

最后，注意如二随机测度 $Z_1(A), Z_2(A)$ 均满足 (30), 则它们必在 K 上一致，从而在 A 上一致，只要 $F(A) < \infty$. □

注 1. 定理 1 的结论对均方右连续正交增量过程也正确，证明完全一样. 只是，一切 $[s,t)$ 应换为 $(s,t]$, 例如 (30) 应换为

$$
Z((t_1,t_2]) = y_{t_2} - y_{t_1} \quad (t_1 < t_2). \tag{44}
$$

以后关于由 $\{y_t, t\in T\}$ 所产生的随机测度 $Z(A)$ 的积分 $\int_T f(\lambda)Z(d\lambda)$ 也记为 $\int_T f(\lambda)y(d\lambda)$.

例 1 设 $\{y_t, t\in R_1\}$ 为 Wiener 过程，即满足下列条件的过程：

$$
y_{t_2} - y_{t_1}, \cdots, y_{t_n} - y_{t_{n-1}} \quad (t_1 < t_2 < \cdots < t_n) \tag{45}
$$

相互独立，而且 $y_t - y_s$ 有正态分布，使

$$
E(y_t - y_s) = 0, \quad E(y_t - y_s)^2 = \sigma^2 |t-s| \ \ (\sigma > 0). \tag{46}
$$

它所产生的随机测度叫 **Wiener测度**, 关于它的积分叫 **Wiener积分**. 此测度的均方测度 F 满足

$$
F(A) = \sigma^2 \cdot L(A) \quad (A \in \mathcal{B}_1), \tag{47}
$$

其中 L 表勒贝格测度. 故对任意关于 L 均方可积函数 f,, 可定义

$$
x_t = \int_{R_1} f(t-s) y(ds). \tag{48}
$$

因为 $\{y_t - y_a, t\in R_1\}$ 是正态过程，其中 a 任意固定，由随机积分的定义及 §1.2 定理 2, 知 $\{x_t, t\in R_1\}$ 也是正态过程. 其次

$$
Ex_{t+\tau}x_t = E\Big(\int_{R_1} f(t+\tau-s)y(ds) \cdot \int_{R_1} f(t-s)y(ds)\Big),
$$

由性质 D.2, 右方

$$
= \sigma^2 \int_{R_1} f(t+\tau-s)f(t-s)ds = \sigma^2 \int_{R_1} f(\tau+s)f(s)ds, \tag{49}
$$

故 $Ex_{t+\tau}x_t = B(\tau)$ 不依赖于 t, 因而 $\{x_t, t\in R_1\}$ 还是弱平稳过程. 如 §8.1 所述，它也是平稳过程.

考虑特殊情况：设

$$f(t)=\begin{cases} ce^{-\alpha t}, & t\geqslant 0\ (c>0,\alpha>0),\\ 0, & t<0. \end{cases} \tag{50}$$

因常数 σ 不起重大作用，以下为简便计令 $\sigma=1$. 由 (49) 得知此时如 $\tau>0$, 则

$$B(\tau)=\int_0^\infty c^2e^{-\alpha s}e^{-\alpha(s+\tau)}ds=c^2e^{-\alpha\tau}\int_0^\infty e^{-2\alpha s}ds=\frac{c^2}{2\alpha}e^{-\alpha\tau}.$$

因 $B(\tau)=B(-\tau)$, 故得

$$B(\tau)=\frac{c^2}{2\alpha}e^{-\alpha|\tau|}. \tag{51}$$

试证此时过程 $\{x_t,t\in R_1\}$ 是正态、平稳 (也是弱平稳)、马氏过程. 实际上，由 (48) 及 (50), 如 $-\infty<s<t$

$$\begin{aligned} x_t&=c\int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-u)}y(du)=c\int_s^t e^{-\alpha(t-u)}y(du)+c\int_{-\infty}^s e^{-\alpha(t-u)}y(du)\\ &=c\int_s^t e^{-\alpha(t-u)}y(du)+e^{-\alpha(t-s)}c\int_{-\infty}^s e^{-\alpha(s-u)}y(du)=c\int_s^t e^{-\alpha(t-u)}y(du)+e^{-\alpha(t-s)}x_s. \end{aligned}$$

然而，由随机积分定义及条件 (45), 随机变量

$$Y=c\int_s^t e^{-\alpha(t-u)}y(du)$$

不依赖于一切 $y(u_2)-y(u_1)(u_1\leqslant s,u_2\leqslant s)$, 因而也不依赖于 $\{x_u,u\leqslant s\}$. 由此即知 $\{x_t,t\in R_1\}$ 是马氏过程 (参考 §4.5,12). 根据 §8.1(11), 可求出谱密度为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{R_1}c_1e^{-\alpha|\tau|-i\lambda\tau}d\tau&=\frac{c_1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-i\lambda)\tau}d\tau+\int_0^\infty e^{-(\alpha+i\lambda)\tau}d\tau\right\}\\ &=\frac{c_1}{2\pi}\left\{\frac{1}{\alpha-i\lambda}+\frac{1}{\alpha+i\lambda}\right\}=\frac{c_1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}\quad\left(c_1=\frac{c^2}{2\alpha}\right). \end{aligned} \tag{52}$$

这类过程称为 **Ornstein-Uhlenbeck过程**, 进一步讨论见 §9.3(二) 及 §10.3 例 3.

例 2 称实值随机测度 $Z(A)$ 为 **正态的**, 如果 $\{Z(A),A\in\mathcal{B}^{(0)}\}$ 是正态系 (见 §1.2), 而且每个 $Z(A)$ 具有期望为 0, 方差为 $F(A)$ 的正态分布. 对正态随机测度，我们有

(E_2'): 如 $A_i\in\mathcal{B}^0, A_iA_j=\phi, i,j=1,\cdots,n$, 则 $Z(A_i)$ 相互独立.

实际上，对正态分布随机变量，由两两不相关性可得总体独立性，故由 (E_2) 得 (E_2').

此时根据 §1.2 所述正态系的性质，如对每固定的 $t\in T$

$$f(t,\lambda)\in L^2(E,\mathcal{B},F),$$

则随机过程 $\{I(f(t,\lambda)),t\in T\}$ 是正态过程.

§8.3 弱平稳过程的谱展式； Karhunen 定理

(一) 现在回到§8.1 末所提出的问题，即研究 §8.1 中 (34) 是否可能. 为此先证明一般的 Karhunen 定理，作为它的特殊情形，便是我们所需的结果. 称复数值随机过程 $\{\xi_t(\omega), t \in T\}$ 为 **二级矩过程**, 如果对任意 $t \in T$, 有

$$E|\xi_t|^2 < \infty \quad (t \in T). \tag{1}$$

这里 T 可以是任一抽象集. 以下固定 $\Lambda \in \mathcal{B}_1, \Lambda\mathcal{B}_1$ 表 Λ 中所有 Borel 子集所成的 σ 代数.

定理 1(Karhunen) (i) 设 $Z(A)$ 为 $(\Lambda, \Lambda\mathcal{B}_1, F)$ 上任一随机测度， $F(\Lambda) < \infty, f(t, \lambda)$ 为 $T \times \Lambda$ 上的复数值函数，使对每固定的 $t \in T$

$$f(t, \lambda) \in L^2(\Lambda, \Lambda\mathcal{B}_1, F) \tag{2}$$

则

$$\xi_t = \int_\Lambda f(t, \lambda) Z(d\lambda) \quad (t \in T) \tag{3}$$

是一个二级矩过程，满足

$$E\xi_t\overline{\xi}_s = \int_\Lambda f(t, \lambda)\overline{f(s, \lambda)} F(d\lambda) \quad (s, t \in T). \tag{4}$$

(ii) 反之，设 $\{\xi_t, t \in T\}$ 为二级矩过程，使

$$E\xi_t\overline{\xi}_s = \int_\Lambda f(t, \lambda)\overline{f(s, \lambda)} F(d\lambda), \tag{5}$$

其中

$$f(t, \lambda) \in L^2(\Lambda, \Lambda\mathcal{B}_1, F) \quad (t \in T), \tag{6}$$

而且 F 为有穷测度，则存在随机测度 $Z(A), A \in (\Lambda, \Lambda\mathcal{B}_1, F)$, 使对任一固定的 $t \in T$, 有

$$\xi_t = \int_\Lambda f(t, \lambda) Z(d\lambda). \tag{7}$$

证. (i) 设 (3) 成立，由 §8.2 性质 D.2, 得

$$E\xi_t\overline{\xi}_s = E\Big(\int_\Lambda f(t, \lambda) Z(d\lambda) \cdot \overline{\int_\Lambda f(s, \lambda) Z(d\lambda)}\Big) = \int_\Lambda f(t, \lambda)\overline{f(s, \lambda)} F(d\lambda),$$

特别

$$E|\xi_t|^2 = \int_\Lambda |f(t, \lambda)|^2 F(d\lambda) < \infty.$$

(ii) 考虑 λ 的函数 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i f(t_i, \lambda), n > 0, t_i \in T, a_i$ 为复数. 所有这种线性组合的集记为 $L(f)$. 先在

假设 (D):“$L(f)$ 稠于 $L_2(\Lambda, \Lambda\mathcal{B}_1, F)$”

下证明所需结论. 然后再取消此假设.

由 (D), 对 $A \in \Lambda\mathcal{B}_1$ 的示性函数 $\chi_A(\lambda)$, 存在一列

$$\chi_A^{(n)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} f(t_i^{(n)}, \lambda), n = 1, 2, \cdots \tag{8}$$

在 $L_2(\Lambda, \Lambda\mathcal{B}_1, F)$ 收敛意义下逼近 $\chi_A(\lambda)$. 令

$$z_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} \xi_{t_i^{(n)}}(\omega). \tag{9}$$

考虑

$$E|z_m - z_n|^2 = E\Big|\sum_{i=1}^{m} a_i^{(m)} \xi_{t_i^{(m)}}(\omega) - \sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} \xi_{t_i^{(n)}}(\omega)\Big|^2,$$

将右方展开为有限项的和，公项形为 $a\bar{b}E\xi_t\bar{\xi}_s$, 对它用 (5) 得

$$a\bar{b}E\xi_t\bar{\xi}_s = a\bar{b}\int_\Lambda f(t, \lambda)\overline{f(s, \lambda)}F(d\lambda),$$

利用此式再集项即得

$$\begin{aligned} E|z_m - z_n|^2 &= \int_\Lambda \Big|\sum_{i=1}^{m} a_i^{(m)} f(t_i^{(m)}, \lambda) - \sum_{j=1}^{n} a_j^{(n)} f(t_j^{(n)}, \lambda)\Big|^2 F(d\lambda) \\ &= \int_\Lambda |\chi_A^{(m)}(\lambda) - \chi_A^{(n)}(\lambda)|^2 F(d\lambda) \to 0 \quad (m, n \to \infty). \end{aligned} \tag{9_1}$$

故存在极限

$$Z(A) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, z_n(\omega). \tag{10}$$

这极限与序列 (8) 的选择无关. 实际上，如 $\{\widetilde{\chi}_A^{(n)}(\lambda)\}$ 是另一列逼近于 $\chi_A(\lambda)$ 的 (8) 型序列，它通过 (9) 所得的左方变量记为 $\{\widetilde{z}_n(\omega)\}$, 则仍如上计算得

$$\begin{aligned} E^{\frac{1}{2}}|z_n - \widetilde{z}_n|^2 &= \Big[\int_\Lambda |\chi_A^{(n)}(\lambda) - \widetilde{\chi}_A^{(n)}(\lambda)|^2 F(d\lambda)\Big]^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \Big[\int_\Lambda |\chi_A^{(n)}(\lambda) - \chi_A(\lambda)|^2 F(d\lambda)\Big]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \Big[\int |\chi_A(\lambda) - \widetilde{\chi}_A^{(n)}(\lambda)|^2 F(d\lambda)\Big]^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

今证 $Z(A)$ 是 $(\Lambda, \Lambda\mathcal{B}_1, F)$ 上的随机测度. 任取 $A \in \Lambda\mathcal{B}_1, B \in \Lambda\mathcal{B}_1$, 对 $\chi_A(\lambda)$ 及 $\chi_B(\lambda)$, 使 (8),(9) 成立的逼近序列分别记为 $\{\chi_A^{(n)}(\lambda)\}$ 与 $\{\chi_B^{(n)}(\lambda)\}$, 它们由 (9) 产生的序列记为 $\{z_n^{(A)}(\omega)\}$ 与 $\{z_n^{(B)}(\omega)\}$, 则 [1]

$$\begin{aligned} EZ(A)\overline{Z(B)} &= \lim_{n\to\infty} EZ_n^{(A)}\overline{Z_n^{(B)}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_\Lambda \chi_A^{(n)}(\lambda)\overline{\chi_B^{(n)}(\lambda)}F(d\lambda) = \int_\Lambda \chi_A(\lambda)\chi_B(\lambda)F(d\lambda) \\ &= F(AB) \end{aligned} \tag{11}$$

[1] 这里极限与积分可交换都由于 §8.2 中指出的 Hilbert 空间中内积的连续性.

由此及 F 的有穷性即知，$Z(A)$ 确为上述随机测度．既然 (6) 成立，故可定义随机积分

$$\eta_t=\int_\Lambda f(t,\lambda)Z(d\lambda). \tag{12}$$

为证 (7), 只要证

$$E|\xi_t-\eta_t|^2=0 \quad (t\in T). \tag{13}$$

展开此式左方得

$$E|\xi_t-\eta_t|^2=E|\xi_t|^2+E|\eta_t|^2-E\xi_t\overline{\eta}_t-E\overline{\xi}_t\eta_t. \tag{14}$$

试证 (14) 右方四项都等于实数 $\int_\Lambda|f(t,\lambda)|^2F(d\lambda)$, 从而 (13) 及 (7) 成立．为此，由 (5) 及 §8.2 D.2, 知

$$E|\xi_t|^2=\int_\Lambda|f(t,\lambda)|^2F(d\lambda)=E|\eta_t|^2.$$

为计算 (14) 中最后二项，先注意

$$\begin{aligned}E\xi_t\overline{Z(A)}&=\lim_{n\to\infty}E\xi_t\overline{Z}_n=\lim_{n\to\infty}E\xi_t\sum_{i=1}^n\overline{a_i^{(n)}}\overline{\xi}_{t_i^{(n)}}(\omega)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\overline{a_i^{(n)}}\int_\Lambda f(t,\lambda)\overline{f(t_i^{(n)},\lambda)}F(d\lambda)\\&=\lim_{n\to\infty}\int_\Lambda f(t,\lambda)\overline{\chi_A^{(n)}(\lambda)}F(d\lambda)=\int_\Lambda f(t,\lambda)F(d\lambda).\end{aligned} \tag{15}$$

由随机积分定义，存在简单函数列

$$f_n(\lambda)=\sum_{k=1}^n b_k^{(n)}\chi_{B_k^{(n)}}(\lambda),\quad B_k^{(n)}\in\Lambda\mathcal{B}_1,$$

使 $\int_\Lambda|f(t,\lambda)-f_n(\lambda)|^2F(d\lambda)\to 0$ 而且

$$E|\eta_t-\int_\Lambda f_n(\lambda)Z(d\lambda)|^2\to 0 \quad (n\to\infty). \tag{16}$$

于是由 (15)

$$\begin{aligned}E\xi_t\overline{\eta}_t&=\lim_{n\to\infty}E\Big\{\xi_t\overline{\int_\Lambda f_n(\lambda)Z(d\lambda)}\Big\}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\overline{b_k^{(n)}}E\xi_t\overline{Z(B_k^{(n)})}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\overline{b_k^{(n)}}\int_{B_k^{(n)}}f(t,\lambda)F(d\lambda)\\&=\lim_{n\to\infty}\int_\Lambda\overline{f_n(\lambda)}f(t,\lambda)F(d\lambda)=\int_\Lambda|f(t,\lambda)|^2F(d\lambda);\end{aligned}$$

$$E\overline{\xi}_t\eta_t=\overline{E\xi_t\overline{\eta}_t}=\int_\Lambda|f(t,\lambda)|^2F(d\lambda).$$

这样便证明了 (7). 总结上述，得知在假设 (D) 下，(ii) 中结论已完全证明．

现在除去此假设. 如果 $L(f)$ 在 $L_2(\Lambda, \Lambda\mathcal{B}_1, F)$ 中不是稠密的, 则必有函数 $g(\lambda) \in L_2(\Lambda, \Lambda\mathcal{B}_1, F)$ 正交于一切 $f(t,\lambda), t \in T$,, 即对任意 $t \in T$

$$\int_\Lambda g(\lambda)\overline{f(t,\lambda)}F(d\lambda) = 0. \tag{16_1}$$

全体这种函数记为 $g(t,\lambda), t \in T'$. 于是全体线性组合 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i f(t_i,\lambda) + \sum\limits_{j=1}^{m} b_j g(t_j,\lambda) \ \ (n > 0, m > 0)$ 便在 $L_2(\Lambda, \Lambda\mathcal{B}_1, F)$ 中稠密.

取正态过程 $\{\zeta_t, t \in T'\}$, 使满足

1° $E\zeta_t = 0 \ \ (t \in T')$,

2° $E\zeta_t\overline{\zeta}_s = \int_\Lambda g(t,\lambda)\overline{g(s,\lambda)}F(d\lambda) \ \ (s, t \in T')$,

3° 对 $t \in T, s \in T', \xi_t$ 与 ζ_s 独立.

这种过程的确存在: 因为, 仿 §8.1 定理 3 的证明, 易见二元函数

$$r(t,s) = \int_\Lambda g(t,\lambda)\overline{g(s,\lambda)}F(d\lambda)$$

是非负定的而且 $r(t,s) = \overline{r(s,t)}$, 故由 §1.2 定理 3 可见满足 1°, 2° 的正态过程存在. 为使它满足 3°, 只要用 §1.1 引理 2 以造联合的概率空间即可.

今造过程 $\{\widetilde{\xi}_t, t \in T \cup T'\}$, 其中

$$\widetilde{\xi}_t = \begin{cases} \xi_t, & \text{如} t \in T, \\ \zeta_t, & \text{如} t \in T'. \end{cases} \tag{17}$$

这过程由于 (5), 2° 及 (16_1), 1°, 3° 而满足

$$E\widetilde{\xi}_t\overline{\widetilde{\xi}_s} = \int_\Lambda h(t,\lambda)\overline{h(s,\lambda)}F(d\lambda);$$

$$h(t,\lambda) = \begin{cases} f(t,\lambda), & t \in T, \\ g(t,\lambda), & t \in T'. \end{cases} \tag{18}$$

由于在 (D) 下已证明定理成立, 故存在定义于 $(\Lambda, \Lambda\mathcal{B}_1, F)$ 上的随机测度 $Z(A)$, 使

$$\widetilde{\xi}_t = \int_\Lambda h(t,\lambda)Z(d\lambda) \ \ t \in T \cup T'.$$

特别, 当 $t \in T$ 时, 上式也成立, 而且由于 (17),(18), 它化为 (7). □

注 1 (3) 与 (7) 中 ξ_t 与 $\int_\Lambda f(t,\lambda)Z(d\lambda)$ 相等是说作为 Hilbert 空间 H (见 §8.2(15)) 中的元, 二者是相等的. 亦即 $E\left|\xi_t - \int_\Lambda f(t,\lambda)Z(d\lambda)\right|^2 = 0$. 后式等价于 $\xi_t(\omega) = \int_\Lambda f(t,\lambda)Z(d\lambda)$ $(a.s.)$, 由于对每 t, 存在一零测集 N_t, 当 $\omega \in N_t$ 时, 此式可不成立, 因而不能解释此式为: 对几乎一切固定的 $\omega, \xi_t(\omega) = \int_\Lambda f(t,\lambda)Z(d\lambda)$ 对一切 $t \in T$ 成立 (除非 T 为可列集).

(二) 现在已不难证明下面的

定理 2 (i) 设 $Z(A), A \in (R_1, \mathcal{B}_1, F)$ 是任一随机测度, $F(R_1) < \infty$, 则由下式定义的随机过程

$$\xi_t = \int_{R_1} e^{i\lambda t}Z(d\lambda) \ \ (t \in R_1) \tag{19}$$

是均方连续弱平稳过程，其相关函数为

$$B(\tau)=\int_{R_1} e^{i\lambda\tau}F(d\lambda) \quad (\tau\in R_1), \tag{20}$$

因而此过程的谱测度重合于 $Z(A)$ 的均方测度.

(ii) 反之，设 $\{\xi_t, t\in R_1\}$ 为均方连续的弱平稳过程，有相关函数为

$$B(\tau)=\int_{R_1} e^{i\lambda\tau}F(d\lambda), \tag{21}$$

因而 $F(A)$ 为过程的谱测度. 于是存在唯一的取值于 $\overline{L}\{\xi_t, t\in R_1\}$ 中的随机测度 $Z(A), A\in(R_1,\mathcal{B}_1,F)$, 使对任一固定的 $t\in R_1$, 有

$$\xi_t=\int_{R_1} e^{i\lambda t}Z(d\lambda) \quad \text{(a.s.)}. \tag{22}$$

证 (i) 于定理 1(i) 中取 $f(t,\lambda)=e^{it\lambda}, \Lambda=R_1$ 知 (19) 中的 $\{\xi_t, t\in R_1\}$ 是二级矩过程，其相关函数为 (20). 既然 $B(\tau)=E\xi_{t+\tau}\overline{\xi}_t$ 与 t 无关，可见此过程弱平稳. 又因 $B(\tau)$ 连续，故过程均方连续.

(ii) 仍在定理 1(ii) 中取 $f(t,\lambda)=e^{it\lambda}, \Lambda=R_1$, 则 (5) 化为 (21). 因而知 (22) 成立. 由 (9),(10) 知 $Z(A)\in\overline{L}\{\xi_t, t\in R_1\}$. 剩下只要证唯一性.

设 $\widetilde{Z}(A)\in\overline{L}\{\xi_t, t\in R_1\}, A\in(R_1,\mathcal{B}_1,\widetilde{F})$, 是任意一个满足 (22) 的随机测度. 由 (i) 知 $\widetilde{Z}(A)$ 的均方测度 $\widetilde{F}(A)$ 必须重合于过程 $\{\xi_t, t\in R_1\}$ 的谱测度 $F(A)$. 利用 (8) 中的

$$\chi_A^{(n)}(\lambda)=\sum_{j=1}^{n} a_j^{(n)}e^{it_j^{(n)}\lambda}, \tag{23}$$

我们有

$$\begin{aligned} E\Big|\widetilde{Z}(A)-\int_{R_1}\chi_A^{(n)}(\lambda)\widetilde{Z}(d\lambda)\Big|^2 &= E\Big|\int_{R_1}(\chi_A(\lambda)-\chi_A^{(n)}(\lambda))\widetilde{Z}(d\lambda)\Big|^2 \\ =\int_{R_1}|\chi_A(\lambda)-\chi_A^{(n)}(\lambda)|^2\widetilde{F}(d\lambda) &= \int_{R_1}|\chi_A(\lambda)-\chi_A^{(n)}(\lambda)|^2F(d\lambda)\to 0 \end{aligned}$$

(见 (9_1)). 这表示

$$\widetilde{Z}(A)=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\int_{R_1}\chi_A^{(n)}(\lambda)\widetilde{Z}(d\lambda)=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\int_{R_1}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_j^{(n)}e^{it_j^{(n)}\lambda}\Big)\widetilde{Z}(d\lambda).$$

既然由假定 (22) 对 $\widetilde{Z}(A)$ 也成立，故由 (10)

$$\widetilde{Z}(A)=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\sum_{j=1}^{n}a_j^{(n)}\xi_{t_j^{(n)}}(\omega)=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\,Z_n(\omega)=Z(A). \ \square$$

类似地，对弱平稳序列 $\{\xi_n, n\in N\}$, 利用 §8.1 定理 3′, 也可得到积分表达式. 为此，只要在定理 1 中，令 $f(t,\lambda)=e^{it\lambda}, t\in N$, 令 $\Lambda=\Pi=[-\pi,\pi]$, 即得

定理 2′ (i) 设 $Z(A), A \in (\Pi, \Pi\mathcal{B}_1, F)$, 是任一随机测度, $F(\Pi) < \infty$, 则由下式定义的随机序列

$$\xi_n = \int_{\Pi} e^{in\lambda} Z(d\lambda) \quad (n \in N) \tag{24}$$

是弱平稳序列，其相关函数为

$$B(m) = \int_{\Pi} e^{im\lambda} F(d\lambda) \quad (m \in N). \tag{25}$$

因而这序列的谱测度重合于 $Z(A)$ 的均方测度.

(ii) 反之，设 $\{\xi_n, n \in N\}$ 为弱平稳序列，有相关函数为

$$B(m) = \int_{\Pi} e^{im\lambda} F(d\lambda), \tag{26}$$

因而 $F(A)$ 为过程的谱测度. 于是存在唯一的取值于 $\overline{L}\{\xi_n, n \in N\}$ 中的随机测度 $Z(A), A \in (\Pi, \Pi\mathcal{B}_1, F)$, 使对任一固定的 $n \in N$, 有

$$\xi_n = \int_{\Pi} e^{in\lambda} Z(d\lambda) \quad \text{(a.s.)}. \tag{27}$$

(22)(或 (27)) 式称为 $\{\xi_t, t \in R_1\}$(**或** $\{\xi_n, n \in N\}$) **的谱展式**. 利用此谱展式，可以在二 Hilbert 空间

$$\overline{L}\{\xi_t, t \in R_1\}, \quad L^2(R_1, \mathcal{B}_1, F)$$

之间，建立一一**同构**. 实际上，利用 (22) 式，令

$$\xi_t \longleftrightarrow e^{it\lambda},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \xi_{t_j} \longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j e^{it_j\lambda},$$

亦即

$$\int_{R_1} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j e^{it_j\lambda} \Big) Z(d\lambda) \longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j e^{it_j\lambda}.$$

然而，全体右方中的线性组合稠于 $L^2(R_1, \mathcal{B}_1, F)$, 而全体左方中的线性组合，亦即一切 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j \xi_{t_j}$, 稠于 $\overline{L}\{\xi_t, t \in R_1\}$, 于是令

$$\overline{L}\{\xi_t, t \in R_1\} \ni \int_{R_1} f(\lambda) Z(d\lambda) \longleftrightarrow f(\lambda) \in L^2(R_1, \mathcal{B}_1, F), \tag{28}$$

则上式建立了上二空间的一一对应 [1], 而且由 §8.2 D.1 及 D.2, 可见此对应

---

[1] 令 $U = \overline{L}\{\xi_t, t \in R_1\}, W = \left\{ \int_{R_1} f(\lambda) Z(d\lambda), f \in L^2(R_1, \mathcal{B}_1, F) \right\}$, 则 $U = W$. 实际上，此二集都是线性闭集 (在均方收敛意义下). 由 (22) 知 $\xi_t \in W$, 故 $U \subset W$. 再由 (22) 知 $\int_{R_1} e^{it\lambda} Z(d\lambda) \in U$, 然而 W 是含一切 $\int_{R_1} e^{it\lambda} Z(d\lambda)$ $(t \in R_1)$ 的最小线性闭集，故 $W \subset U$.

1° 是线性的：由 $f_i(\lambda)\longleftrightarrow\int_{R_1}f_i(\lambda)Z(d\lambda)$, 得

$$\sum_{i=1}^{n}a_if_i(\lambda)\longleftrightarrow\int_{R_1}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_if_i(\lambda)\Big)Z(d\lambda);$$

2° 是保内积的：

$$\Big(\int_{R_1}f(\lambda)Z(d\lambda),\int_{R_1}g(\lambda)Z(d\lambda)\Big)=(f,g)_{L^2}.$$

因此 $\overline{L}\{\xi_t,t\in R_1\}$ 与 $L^2(R_1,\mathcal{B}_1,F)$ 同构.

同样，利用 (27), 可见二 Hilbert 空间

$$\overline{L}\{\xi_n,n\in N\},\qquad L^2(\Pi,\Pi\mathcal{B}_1,F)$$

同构.

这种同构关系非常重要，因为在许多问题中，利用它可以把对 $\overline{L}\{\xi_t,t\in R_1\}$ (或 $\overline{L}\{\xi_n,n\in N\}$) 的研究，化为对函数空间 $L^2(R_1,\mathcal{B}_1,F)$(或 $L^2(\Pi,\Pi\mathcal{B}_1,F)$) 的研究.

(三) 现在来研究实值情形.

定理 3 为使均方连续弱平稳过程 $\{\xi_t,t\in R_1\}$ 取实数值，充分与必要条件是 (22) 中的随机测度具有性质：对任意 $A\in\mathcal{B}_1$, 有

$$Z(A)=\overline{Z(-A)},\quad\text{(a.s.)}.\tag{29}$$

证 必要性：由 $\xi_t=\overline{\xi}_t$ (a.s.) 及 (22)

$$\int_{R_1}e^{it\lambda}Z(d\lambda)=\int_{R_1}e^{-it\lambda}\overline{Z}(d\lambda)=\int_{R_1}e^{it\lambda}\widetilde{Z}(d\lambda),$$

其中 $\widetilde{Z}(A)=\overline{Z(-A)}$. 由于谱展式中随机测度的唯一性即得 $E|Z(A)-\overline{Z(-A)}|^2=0$, 此即 (29).

充分性：此因

$$\begin{aligned}\overline{\xi}_t&=\overline{\int_{R_1}e^{it\lambda}Z(d\lambda)}=\int_{R_1}e^{-it\lambda}\overline{Z}(d\lambda)=\int_{R_1}e^{it\lambda}\widetilde{Z}(d\lambda)\\&=\int_{R_1}e^{it\lambda}Z(d\lambda)=\xi_t\quad\text{(a.s.)}.\ \square\end{aligned}$$

显然，定理的结论对弱平稳序列也正确.

自然希望实值情形的谱展式中不含复数，以下定理解决了此问题. 令 H 为一切二级矩有穷的随机变量集. 如 $\xi_1\in H,\xi_2\in H,E\xi_1\overline{\xi}_2=0$, 则说 ξ_1 **与** ξ_2 **互垂**, 记为 $\xi_1\perp\xi_2$. 如集 $D_i\subset H$, 并且对一切 $\xi_i\in D_i,i=1,2$, 有 $\xi_1\perp\xi_2$, 则说 D_1 **与** D_2 **互垂**, 并记为 $D_1\perp D_2$.

以下令 $R_0=(0,\infty)$, 不含 0 点.

定理 4 (i) 设 $\{\xi_t,t\in R_1\}$ 是实值均方连续的弱平稳过程，谱测度为 $F(A)$. 于是对任意 $t\in R_1$, 有

$$\xi_t=Z_0+\int_{R_0}\cos t\lambda X(d\lambda)+\int_{R_0}\sin t\lambda Y(d\lambda)\quad\text{(a.s.)},\tag{30}$$

其中

a) $Z_0 \in H, Z_0$ 是实值随机变量，与 t 无关，而且 $EZ_0^2 = F(\{0\})$.

b) $X(A)$ 与 $Y(B)$ 都是 $(R_0, R_0\mathcal{B}_1, 2F)$ 上的实值随机测度，即 $EX(A)X(B) = EY(A)Y(B) = 2F(AB)$ $(A, B \in R_0\mathcal{B}_1)$; 又 F 是对称的，即 $F(A) = F(-A)$ $(A \in \mathcal{B}_1)$.

c) $Z_0 \perp X(A), \quad Z_0 \perp Y(A), \quad X(A) \perp Y(B) \quad (A \in R_0\mathcal{B}_1, B \in R_0\mathcal{B}_1)$.

(ii) 反之，设已给有穷对称测度 $F(A)(A \in \mathcal{B}_1)$ 及满足 a),b),c) 的 $Z_0, X(A), Y(B)$, 则由 (30) 定义的 $\{\xi_t, t \in R_1\}$ 是实值均方连续的弱平稳过程，有谱测度为 $F(A)$.

证 考虑 (22) 中的 $Z(A)$. 对 $A \in R_0\mathcal{B}_1$, 定义

$$\begin{aligned} X(A) =& Z(A) + \overline{Z(A)}, \quad Y(A) = i(Z(A) - \overline{Z(A)}) \\ Z_0 =& Z(\{0\}). \end{aligned} \tag{31}$$

$X(A), Y(A), Z_0$ 都属于 H 而且

a) 由 (29), $\overline{Z}_0 = \overline{Z(\{0\})} = \overline{Z(\{-0\})} = Z(\{0\}) = Z_0$; 由 (11),$EZ_0^2 = E(Z(\{0\}))^2 = F(\{0\})$.

b) 由定义知，$X(A), Y(A)$ 均取实值. 由 (29),(11) 得

$$X(A) = Z(A) + Z(-A), \quad Y(A) = i(Z(A) - Z(-A)),$$

$$\begin{aligned} EX(A_1)X(A_2) &= E\{[Z(A_1) + Z(-A_1)][Z(A_2) + Z(-A_2)]\} \\ &= F(A_1A_2) + F(A_1[-A_2]) + F([-A_1]A_2) + F([-A_1][-A_2]), \end{aligned}$$

既然 $A_1 \subset R_0, A_2 \subset R_0$, 故 $A_1[-A_2] = \phi = [-A_1]A_2$, 由 §8.1(15) 得 F 的对称性，特别，$F([-A_1][-A_2]) = F(A_1A_2)$, 于是

$$EX(A_1)X(A_2) = 2F(A_1A_2).$$

类似可证 $EY(A_1)Y(A_2) = 2F(A_1A_2)$.

c) 因 $0 \overline{\in} A \subset R_0$, 故由 (31) 及 (11)

$$EZ_0X(A) = EZ(\{0\})Z(A) + EZ(\{0\})Z(-A) = 0,$$

同样 $EZ_0Y(A) = 0$. 此外，由 $Y(B) = \overline{Y(B)}$ 得

$$\begin{aligned} EX(A)Y(B) &= -iE[(Z(A) + Z(-A))(\overline{Z(B) - Z(-B)})] \\ &= -i\{F(AB) + F([-A]B) - F(A[-B]) - F([-A][-B])\} = 0. \end{aligned}$$

今证 (30). 改写 (22) 为

$$\begin{aligned} \xi_t &= Z(\{0\}) + \int_{R_0 \cup (-R_0)} e^{it\lambda} Z(d\lambda) \\ &= Z_0 + \int_{R_0 \cup (-R_0)} \cos t\lambda Z(d\lambda) + i \int_{R_0 \cup (-R_0)} \sin t\lambda Z(d\lambda). \end{aligned} \tag{32}$$

但对任一偶实值函数 $\varphi(\lambda) \in L^2(R_1, \mathcal{B}_1, F)$, 有

$$\int_{R_0 \cup (-R_0)} \varphi(\lambda) Z(d\lambda) = \int_{R_0} \varphi(\lambda) X(d\lambda). \tag{33}$$

实际上，当 $\varphi(\lambda)$ 为简单函数即

$$\varphi(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}a_j\chi_{A_j}(\lambda)+\sum_{j=1}^{n}a_j\chi_{-A_j}(\lambda)\quad(A_j\subset R_0)$$

时，(33) 之左方由于 (29) 而化为

$$\sum_{j=1}^{n}a_jZ(A_j)+\sum_{j=1}^{n}a_jZ(-A_j)=\sum_{j=1}^{n}a_j[Z(A_j)+\overline{Z(A_j)}]=\int_{R_0}\varphi(\lambda)X(d\lambda).$$

既然任一满足 $\varphi(0)=0$ 的偶实值函数 $\varphi(\lambda)\in L^2(R_1,\mathcal{B}_1,F)$ 可由这种简单函数列逼近，故得证 (33). 同样可证，对任一奇实值函数 $\varphi(\lambda)\in L^2(R_1,\mathcal{B}_1,F)$, 有

$$i\int_{R_0\cup(-R_0)}\varphi(\lambda)Z(d\lambda)=\int_{R_0}\varphi(\lambda)Y(d\lambda).\tag{34}$$

综合 (32),(33),(34) 即得 (30).

反之，设 ξ_t 可表成 (30), 其中 $Z_0,X(A),Y(A)$ 具有 a),b),c) 中的性质. 利用 (30) 及这些性质得

$$\begin{aligned}E\xi_{t+\tau}\xi_t&=E|Z_0|^2+E\Big[\int_{R_0}\cos(t+\tau)\lambda X(d\lambda)\int_{R_0}\cos t\lambda X(d\lambda)\Big]\\&+E\Big[\int_{R_0}\sin(t+\tau)\lambda Y(d\lambda)\int_{R_0}\sin t\lambda Y(d\lambda)\Big]\\&=F(\{0\})+2\int_{R_0}\cos\lambda(t+\tau)\cos\lambda tF(d\lambda)\\&+2\int_{R_0}\sin\lambda(t+\tau)\sin\lambda tF(d\lambda)\\&=F(\{0\})+2\int_{R_0}\cos\lambda\tau F(d\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda\tau}F(d\lambda),\end{aligned}$$

最后一等号用到 F 的对称性.

既然 $E\xi_{t+\tau}\xi_t$ 不依赖于 t, 对 τ 连续，而且 ξ_t 显然取实值，故 $\{\xi_t,t\in R_1\}$ 是均方连续的实值弱平稳过程. □

系 1 为使实值均方连续弱平稳过程是正态过程，充分与必要条件是 (30) 中的 Z_0, $\{X(A),A\in R_0\mathcal{B}_1\},\{Y(A),A\in R_0\mathcal{B}_1\}$ 除满足 a),b),c) 外，还构成正态系.

证. 必要性：由于 $\overline{L}\{\xi_t,t\in R_1\}$ 包含 $Z_0,\{X(A),A\in R_0\mathcal{B}_1\}$ 及 $\{Y(A),A\in R_0\mathcal{B}_1\}$, 既然 $\{\xi_t,t\in R_1\}$ 是正态过程，故由正态系的性质知此三者构成正态系.

充分性：由假定知随机变量族

$$\widetilde{A}=\{Z_0,X(A),Y(A),A\in R_0\mathcal{B}_1\}$$

是正态系. 既然由 (30) 知 $\xi_{t_i}\in\overline{L}\{\widetilde{A}\}$, 而由 §1.2,$\overline{L}\{\widetilde{A}\}$ 也是正态系，故 $\{\xi_{t_i},i=1,\cdots,n\}$ 的联合分布也是正态的. □

§8.4 对弱平稳过程的线性运算；微分与差分方程

(一) 设 $\{\xi_t, t\in R_1\}$ 为均方连续弱平稳过程，谱展式为 §8.3(22)，谱测度为 $F(A), A\in\mathcal{B}_1$. 对这过程的线性运算是指把这过程变为一新过程的变换，此新过程 $\{\widetilde{\xi}_t, t\in R_1\}$:

1° 或者是

$$\widetilde{\xi}_t=\sum_{j=1}^{n}c_j\xi_{t+t_j}=\int_{R_1}e^{it\lambda}\Big(\sum_{j=1}^{n}c_je^{it_j\lambda}\Big)Z(d\lambda), \tag{1}$$

其中 c_j 为任意复数而 n 为任意正整数；

2° 或者 $\widetilde{\xi}_t$ 是上式右方中的和在均方收敛意义下的极限，即

$$\widetilde{\xi}_t=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\int_{R_1}e^{it\lambda}\Big(\sum_{j=1}^{m_n}c_j^{(n)}e^{it_j^{(n)}\lambda}\Big)Z(d\lambda). \tag{2}$$

既然 $\{\widetilde{\xi}_t, t\in R_1\}\subset\overline{L}\{\xi_t, t\in R_1\}$，由上节所述同构性可见必存在复值函数 $c(\lambda), \lambda\in R_1$,

$$c(\lambda)\in L^2(R_1,\mathcal{B}_1,F), \tag{3}$$

使

$$\widetilde{\xi}_t=\int_{R_1}e^{it\lambda}c(\lambda)Z(d\lambda); \tag{4}$$

反之，对任一已给满足 (3) 的 $c(\lambda)$，由 (4) 定义的 $\{\widetilde{\xi}_t, t\in R_1\}$ 必是对 $\{\xi_t, t\in R_1\}$ 进行某一线性运算的结果，因为由 (3)，必存在 $\sum\limits_{j=1}^{m_n}c_j^{(n)}e^{it_j^{(n)}\lambda}, n=1,2,\cdots$，使

$$\Big\|\sum_{j=1}^{m_n}c_j^{(n)}e^{i(t+t_j^{(n)})\lambda}-e^{it\lambda}c(\lambda)\Big\|_{L^2}\to 0\ \ (n\to\infty),$$

于是对由 (4) 定义的 $\widetilde{\xi}_t$ 有

$$\widetilde{\xi}_t=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\int_{R_1}e^{it\lambda}\Big(\sum_{j=1}^{m_n}c_j^{(n)}e^{it_j^{(n)}\lambda}\Big)Z(d\lambda).$$

由此可见，线性运算与满足 (3) 的函数 $c(\lambda)$ 是一一对应的，由 $c(\lambda)$ 所决定的 (4) 中的新过程记为 $\{\xi_t^{(c)}, t\in R_1\}$，并称 $c(\lambda)$ 为此 **线性运算的核**，而由 $c(\lambda)$ 所决定的线性运算则简称为 $c(\lambda)$-**运算**. 如果 $c_1(\lambda)$ 与 $c_2(\lambda)$ 都属于 $L^2(R_1,\mathcal{B}_1,F)$，而且 $c_1(\lambda)c_2(\lambda)$ 也属于 $L^2(R_1,\mathcal{B}_1,F)$，则称 $c_1(\lambda)c_2(\lambda)$- 运算为 $c_1(\lambda)$- 运算与 $c_2(\lambda)$- 运算的 **积**，因为 $c_1(\lambda)$ 将 $\{\xi_t(\omega), t\in R_1\}$ 变为 $\xi_t^{(c_1)}$，简记为 $\xi_t^{(1)}$:

$$\xi_t^{(1)}=\int_{R_1}e^{it\lambda}c_1(\lambda)Z(d\lambda)\ \ (t\in R_1),$$

而 $c_2(\lambda)$ 则变 $\{\xi_t^{(1)}, t\in R_1\}$ 为

$$\xi_t^{(2)}=\int_{R_1}e^{it\lambda}c_1(\lambda)c_2(\lambda)Z(d\lambda)\ \ (t\in R_1), \tag{5}$$

所得 $\{\xi_t^{(2)}, t \in R_1\}$ 正与直接对 $\{\xi_t(\omega), t \in R_1\}$ 施行 $c_1(\lambda)c_2(\lambda)$ 运算的结果一致. 显然, $\{\xi_t^{(2)}, t \in R_1\}$ 不依赖于施行 $c_i(\lambda)$- 运算 $(i = 1, 2)$ 的次序. 至于 $\{\xi_t^{(1)}, t \in R_1\}$ 也是均方连续的弱平稳过程则因有以下定理:

定理 1 $\{\xi_t^{(c)}, t \in R_1\}$ 是均方连续的弱平稳过程, 它的谱展式为

$$\xi_t^{(c)} = \int_{R_1} e^{it\lambda} c(\lambda) Z(d\lambda) \quad (t \in R_1); \tag{6}$$

正交随机测度为

$$Z_c(A) = \int_A c(\lambda) Z(d\lambda) \quad (A \in \mathcal{B}_1); \tag{7}$$

相关函数及谱测度分别为

$$B_c(\tau) = \int_{R_1} e^{it\lambda} |c(\lambda)|^2 F(d\lambda), \tag{8}$$

$$F_c(A) = \int_A |c(\lambda)|^2 F(d\lambda); \tag{9}$$

因此, 如原过程 $\{\xi_t, t \in R_1\}$ 有谱密度 $f(\lambda)$, 则 $\{\xi_t^{(c)}, t \in R_1\}$ 也有谱密度 $f_c(\lambda)$, 而且关于勒贝格测度几乎处处

$$f_c(\lambda) = |c(\lambda)|^2 f(\lambda). \tag{10}$$

证 由于 §8.2 (D.2)

$$\begin{aligned} E\xi_{t+\tau}^{(c)} \overline{\xi_t^{(c)}} &= E\Big(\int_{R_1} e^{i(t+\tau)\lambda} c(\lambda) Z(d\lambda)\Big) \overline{\Big(\int_{R_1} e^{it\lambda} c(\lambda) Z(d\lambda)\Big)} \\ &= \int_{R_1} e^{i\tau\lambda} |c(\lambda)|^2 F(d\lambda), \end{aligned} \tag{11}$$

可见 $B_c(\tau) = E\xi_{t+\tau}^{(c)} \overline{\xi_t^{(c)}}$ 与 t 无关而且关于 τ 连续, 故 $\{\xi_t^{(c)}, t \in R_1\}$ 是均方连续弱平稳过程. 考虑 (7) 中的 $Z_c(A)$, 因

$$EZ_c(A)\overline{Z_c(B)} = E\Big(\int_A c(\lambda) Z(d\lambda) \overline{\int_B c(\lambda) Z(d\lambda)} = \int_{AB} |c(\lambda)|^2 F(d\lambda) = F_c(AB),$$

可见 $Z_c(A)$ $(A \in \mathcal{B}_1)$ 是 $(R_1, \mathcal{B}_1, F_c)$ 上的随机测度. 由于过程谱展式及随机测度的唯一性, 知 $\{\xi_t^{(c)}, t \in R_1\}$ 的谱展式及随机测度为 (6),(7). 由相关函数谱展式的唯一性得证 (8),(9),(10) 则显然. □

以下研究几种重要的线性运算.

(二) 设

$$c(\lambda) = \chi_A(\lambda), \tag{12}$$

其中 $A \in \mathcal{B}_1$ 任意固定. 经 $\chi_A(\lambda)$- 运算后 [1], 所得过程

$$\xi_t^{(\chi_A)} = \int_A e^{it\lambda} Z(d\lambda) \tag{13}$$

[1] 在 §9.1 中会证明, 这运算与某投影变换一致.

简记为 $\{\xi_A(t), t\in R_1\}$, 它的谱测度记为 $F_A(B)$:

$$F_A(B)=\int_B |\chi_A(\lambda)|^2F(d\lambda)=F(AB)\quad (B\in\mathcal{B}_1), \tag{14}$$

可见此测度完全集中在集 A 上.

利用此运算，可将 $\{\xi_t, t\in R_1\}$ 正交地展开. 任取一列 $\{A_i\}\subset\mathcal{B}_1$, 使 $A_iA_j=\phi, i\neq j$; $\bigcup_i A_i=R_1$, 则

$$\xi_t=\sum_i \xi_{A_i}(t)\quad (\text{均方收敛意义下}), \tag{15}$$

$$(\xi_{A_i}(t),\xi_{A_j}(t))=0\quad (i\neq j). \tag{16}$$

实际上

$$\begin{aligned}(\xi_{A_i}(t),\xi_{A_j}(t))&=E\xi_{A_i}(t)\overline{\xi_{A_j}(t)}\\ &=E\Big(\int_{R_1}e^{it\lambda}\chi_{A_i}(\lambda)Z(d\lambda)\overline{\int_{R_1}e^{it\lambda}\chi_{A_j}(\lambda)Z(d\lambda)}\Big)\\ &=\int\chi_{A_i}(\lambda)\overline{\chi_{A_j}(\lambda)}F(d\lambda)=0,\end{aligned}$$

此得证 (16); 其次

$$\begin{aligned}\Big\|\xi_t-\sum_{i=1}^n\xi_{A_i}(t)\Big\|^2&=E\Big|\xi_t\sum_{i=1}^n\xi_{A_i}(t)\Big|^2\\ &=E\Big|\int_{R_1}e^{it\lambda}\chi_{R_1}(\lambda)Z(d\lambda)-\int_{R_1}e^{it\lambda}\chi_{\cup_{i=1}^n A_i}(\lambda)Z(d\lambda)\Big|^2\\ &=E\Big|\int_{R_1}e^{it\lambda}\chi_{\cup_{i=n+1}A_i}(\lambda)Z(d\lambda)\Big|^2=\int_{R_1}|\chi_{\cup_{i=n+1}A_i}(\lambda)|^2F(d\lambda)\\ &=F\Big(\bigcup_{i=n+1}A_i\Big)\to 0\quad (n\to\infty),\end{aligned}$$

这便证明了 (15).

这样，对应于 R_1 的任一分解 $\{A_i\}$, 我们得到了 $\{\xi_t, t\in R_1\}$ 的 **正交展开** $\{\xi_{A_i}(t)\}$, 后者满足 (15),(16), 而且每个 $\{\xi_{A_i}(t), t\in R_1\}$ 都是均方连续弱平稳过程，它的谱测度完全集中在集 A_i 上.

重要的一种正交展开如下：设 $F(A)$ 的分布函数为

$$F(\lambda)=F((-\infty,\lambda])\quad (\lambda\in R_1), \tag{17}$$

称此右连续、不减函数 $F(\lambda)$ 为过程的 **谱函数**. 将 $F(\lambda)$ 分解为

$$F(\lambda)=\sum_{i=1}^3 F_i(\lambda), \tag{18}$$

其中 $F_i(\lambda)(i=1,2,3)$ 都是不减函数． $F_1(\lambda)$ 是 $F(\lambda)$ 的跳跃部分，它只在 $F(\lambda)$ 的断点上上升，在这些点上的增量等于 $F(\lambda)$ 在各自上的跃度，因而 $F_1(\lambda)$ 等于 F 在 $(-\infty,\lambda]$ 中全体断点上的跃度的和；而 $F_2(\lambda)$ 则是 $F(\lambda)$ 的绝对连续部分，即

$$F_2(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}F'(y)dy;$$

最后， $F_3(\lambda)$ 是 $F(\lambda)$ 的奇异部分，它是连续的不减函数．分布 F_1 集中在 F 的全体断点的集 B_1 上； F_2 集中在使 F' 存在而且有穷的点的集 B_2 上；而 F_3 则集中在其它点上，在这些点上， $F(\lambda)$ 连续，但 $F'(\lambda)$ 或者不存在，或者值为无穷，这种点构成一勒贝格测度为 0 的集 B_3. 显然 B_1,B_2,B_3 互不相交而且和为 R_1, 故对应于 $\{B_1,B_2,B_3\}$ 可得 $\{\xi_t,t\in R_1\}$ 的一正交展开 $\{\xi_{B_1}(t),\xi_{B_2}(t),\xi_{B_3}(t)\}$, 对它们运用 (6)–(9) 后可得谱展式等等，例如

$$\xi_{B_1}(t)=\sum_j e^{it\lambda_j}Z(\{\lambda_j\}), \tag{19}$$

$$B_{B_1}(\tau)=\sum_j e^{i\tau\lambda_j}F(\{\lambda_j\}), \tag{20}$$

其中 λ_j 是 $F(\lambda)$ 的断点．

（三） 设

$$c(\lambda)=i\lambda, \tag{21}$$

如果 $\int_{R_1}\lambda^2F(d\lambda)<\infty$, 我们称 $i\lambda$- 运算为 **可导运算**, 命名的根据如下．

称过程 $\{\xi_t,t\in R_1\}$**在定点** $t_0\in R_1$ **上可导**, 如存在随机变量 $\xi'(t_0)$, 使

$$\lim_{h\to 0}E\left|\frac{\xi(t_0+h)-\xi(t_0)}{h}-\xi'(t_0)\right|^2=0; \tag{22}$$

如果它在 R_1 中任一点上可导，则称此过程 **可导**.

定理 2 对均方连续弱平稳过程 $\{\xi_t,t\in R_1\}$, 下列条件等价：

(i) $\int_{R_1}\lambda^2F(d\lambda)<\infty$;

(ii) 相关函数 $B(\tau)$ 有 2 级连续导数；

(iii) 相关函数 $B(\tau)$ 在 0 点有 2 级导数；

(iv) $\{\xi_t,t\in R_1\}$ 可导；

(v) $\{\xi_t,t\in R_1\}$ 在某一定点 t_0 可导．

当任一条件满足时， $\{\xi'_t,t\in R_1\}$ 是自 $\{\xi_t,t\in R_1\}$ 经

$$c(\lambda)=i\lambda \tag{24}$$

运算而得的均方连续弱平稳过程．

证 只要证 (i)→(iv)→(v)→(i),(i)→(ii)→(iii)→(i).

(i)→(iv): 由 (i) 知 $i\lambda e^{i\lambda t}\in L^2(R_1,\mathcal{B}_1,F)$, 故可定义随机积分

$$\xi'(t)=i\int_{R_1}\lambda e^{it\lambda}Z(d\lambda)\ \ (t\in R_1).$$

利用过程的谱展式及 §8.2 D.2 得

$$\lim_{h\to0}E\left|\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}-\xi'(t)\right|^2=\lim_{h\to0}E\left|\int_{R_1}e^{i\lambda t}\Big(\frac{e^{i\lambda h}-1}{h}-i\lambda\Big)Z(d\lambda)\right|^2$$
$$=\lim_{h\to0}\int_{R_1}\left|\frac{e^{i\lambda h}-1}{h}-i\lambda\right|^2F(d\lambda),$$

由于 $|e^{i\lambda h}-1-i\lambda h|\leqslant|e^{i\lambda h}-1|+|\lambda h|\leqslant2|\lambda h|$ 以及 (23), 可以用控制收敛定理，故在积分号下取极限后，即知上面的极限等于 0. 此得证 (iv) 及 (v). 同时还证明了 $\{\xi'_t,t\in R_1\}$ 是经 $i\lambda$-运算所得的过程. 由定理 1 知它均方连续、弱平稳，相关函数 $B_{\xi'}(\tau)$ 为

$$B_{\xi'}(\tau)=\int_{R_1}\lambda^2e^{i\lambda\tau}F(d\lambda)=-\frac{d^2}{d\tau^2}\int_{R_1}e^{i\lambda\tau}F(d\lambda)=-B''(\tau),$$

第二等式仍然用到 (23) 及控制收敛定理 [1]. 既然 $B_{\xi'}(\tau)$ 连续，故 $B''(\tau)$ 也连续. 从而得证 (i)→(ii) 及 (iii).

试证 (v)(因而 (iv))→(i): 由 (v) 知存在

$$\lim_{h\to0}E\left|\frac{\xi_{t_0+h}-\xi_{t_0}}{h}\right|^2=\lim_{h\to0}\int_{R_1}\left|\frac{e^{i\lambda h}-1}{h}\right|^2F(d\lambda)<\infty,$$

既然 $\lim\limits_{h\to0}\left|\frac{e^{i\lambda h}-1}{h}\right|^2=\lambda^2$, 根据 Fatou 引理

$$\int_{R_1}\lambda^2F(d\lambda)\leqslant\lim_{h\to0}\int_{R_1}\left|\frac{e^{i\lambda h}-1}{h}\right|^2F(d\lambda)<\infty.$$

最后，试证 (iii)(因而 (ii))→(i). 这由概率论中下列事实推出："如特征函数 f 在 0 点有 $2n$ 级有穷导数 $f^{(2n)}(0)$, 那么它对应的分布 G 有 $r(\leqslant 2n)$ 级有穷矩". 这事实由下列计算证明：由 Fatou 引理及 $f^{(2n)}(0)$ 的存在与有穷性

$$|f^{(2n)}(0)|=\left|\lim_{h\to0}\int_{R_1}\Big(\frac{e^{i\lambda x}-e^{-i\lambda h}}{2h}\Big)^{2n}G(dx)\right|$$
$$=\lim_{h\to0}\int_{R_1}\Big(\frac{\sin hx}{hx}\Big)^{2n}x^{2n}G(dx)\geqslant\int x^{2n}G(dx).\ \square$$

系 1 对均方连续弱平稳过程 $\{\xi_t,t\in R_1\}$, 下列条件等价：

1° $\int_{R_1}\lambda^{2n}F(d\lambda)<\infty$; (25)

2° 相关函数 $B(\tau)$ 有 $2n$ 级连续导数；

3° 相关函数 $B(\tau)$ 在 0 点有 $2n$ 级导数；

4° $\{\xi_t,t\in R_1\}$ n 次可导；

5° $\{\xi_t,t\in R_1\}$ 在某一定点 t_0 上 n 次可导.

当任一条件满足时，$\{\xi^{(n)}(t),t\in R_1\}$ 是均方连续弱平稳过程，谱展式为

$$\xi^{(n)}(t)=\int_{R_1}(i\lambda)^ne^{it\lambda}Z(d\lambda),\tag{26}$$

[1] 见参考书 [15]§7.3.

随机测度为

$$Z_{\xi^{(n)}}(A)=\int_A (i\lambda)^n Z(d\lambda), \tag{27}$$

相关函数 $B_{\xi^{(n)}}(\tau)$ 的谱展式为

$$B_{\xi^{(n)}}(\tau)=\int_{R_1}\lambda^{2n}e^{i\lambda\tau}F(d\lambda), \tag{28}$$

谱测度为

$$F_{\xi^{(n)}}(A)=\int_A \lambda^{2n}F(d\lambda). \tag{29}$$

如 $\{\xi_t,t\in R_1\}$ 有谱密度 $f(\lambda)$, 则 $\{\xi_t^{(n)},t\in R_1\}$ 也有谱密度为

$$f_{\xi^{(n)}}(\lambda)=\lambda^{2n}f(\lambda). \tag{30}$$

证 用归纳法，当 $n=1$ 时，由定理 1,2 知系 1 成立. 设它当 $n=m$ 时成立，因而 (26)–(30) 对 $n=m$ 正确. 由定理 2, 对 $\{\xi_t^{(m)},t\in R_1\}$ 的条件 (i)–(v) 等价，这时它们分别化为 $1^\circ-5^\circ$(以 $m+1$ 换其中的 n). 又一次利用定理 1 即知 (26)–(30) 对 $n=m+1$ 正确. □

(四) 利用 (三) 中的结果可以研究关于弱平稳过程的常系数微分方程. 为此先证

引理 1 设 $Z_c(A)(A\in\mathcal{B}_1)$ 由 (7) 定义，其中 $c(\lambda)$ 满足 (3). 如 $d(\lambda)\in L^2(R_1,\mathcal{B}_1,F_c),F_c$ 由 (9) 决定，则

$$\int_{R_1}d(\lambda)Z_c(d\lambda)=\int_{R_1}d(\lambda)c(\lambda)Z(d\lambda). \tag{31}$$

证 由定理 1 已知 $Z_c(A)(A\in\mathcal{B}_1)$ 是以 $F_c(A)$ 为均方测度的随机测度，故 (31) 左方有意义. 由于

$$\int_{R_1}|d(\lambda)c(\lambda)|^2F(d\lambda)=\int_{R_1}|d(\lambda)|^2F_c(d\lambda)<\infty, \tag{32}$$

故 (31) 右方也有意义. 当

$$d(\lambda)=\sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}(\lambda)$$

为简单函数时

$$\begin{aligned}\int_{R_1}d(\lambda)Z_c(d\lambda)&=\sum_{i=1}^n a_iZ_c(A_i)=\sum_{i=1}^n a_i\int_{A_i}c(\lambda)Z(d\lambda)\\&=\int_{R_1}\left[\sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}(\lambda)\right]c(\lambda)Z(d\lambda)=\int_{R_1}d(\lambda)c(\lambda)Z(d\lambda).\end{aligned}$$

对一般的 $d(\lambda)\in L^2(R_1,\mathcal{B}_1,F_c)$, 存在简单函数列 $\{d_n(\lambda)\}$, 使 $\int_{R_1}|d_n(\lambda)-d(\lambda)|^2F_c(d\lambda)\to 0\ (n\to\infty)$, 因而

$$\begin{aligned}\int_{R_1}d(\lambda)Z_c(d\lambda)&=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\int_{R_1}d_n(\lambda)Z_c(d\lambda)\\&=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\int_{R_1}d_n(\lambda)c(\lambda)Z(d\lambda)=\int_{R_1}d(\lambda)c(\lambda)Z(d\lambda).\ \square\end{aligned}$$

现在考虑微分方程

$$P(D)\xi(t)=\eta(t), \tag{33}$$

其中 $P(D)=a_0+a_1D+\cdots+a_nD^n, D^k$ 表在均方收敛意义下的 k 阶微商算子， a_k 为复常数， $\eta(t),\xi(t)\ (t\in R_1)$ 都是均方连续的弱平稳过程， $\eta(t)$ 已知而 $\xi(t)$ 待求. 我们的目的是解方程 (33). 以下用 Z_η, F_η 表 $\{\eta(t),t\in R_1\}$ 的随机测度与谱测度，对 $\{\xi(t),t\in R_1\}$ 也用类似记号.

首先证明， (33) 的求平稳解问题等价于求方程

$$Z_\eta(A)=\int_A P(i\lambda)Z_\xi(d\lambda)\quad (A\in\mathcal{B}_1) \tag{34}$$

的随机测度解 $Z_\xi(A),A\in\mathcal{B}_1$, 后者的均方测度应有穷.

实际上，设 (33) 有解为 $\{\xi_t,t\in R_1\}$, 它的谱展式为

$$\xi(t)=\int_{R_1}e^{i\lambda t}Z_\xi(d\lambda). \tag{35}$$

由 (26) 及 (33) 得

$$D^k\xi(t)=\int_{R_1}(i\lambda)^k e^{i\lambda t}Z_\xi(d\lambda),$$

$$P(D)\xi(t)=\int_{R_1}P(i\lambda)e^{i\lambda t}Z_\xi(d\lambda)=\int_{R_1}e^{i\lambda t}Z_\eta(d\lambda).$$

由于谱展式中随机测度唯一，故 (34) 成立.

反之，设有随机测度 $Z_\xi(A)(A\in\mathcal{B}_1)$ 满足 (34), 则由 (35) 定义的过程 $\{\xi(t),t\in R_1\}$ 是 (33) 的解，这是因为由引理 1 得

$$P(D)\xi(t)=\int_{R_1}e^{i\lambda t}P(i\lambda)Z_\xi(d\lambda)=\int_{R_1}e^{i\lambda t}Z_\eta(d\lambda)=\eta(t).$$

这样便证明了方程 (33) 与 (34) 的等价性，又由于 $\xi(t)$ 与 $Z_\xi(A)$ 的一一对应，方程 (33) 与 (34) 的解同时唯一或不唯一.

其次证明，如

$$\int_{R_1}\frac{F_\eta(d\lambda)}{|P(i\lambda)|^2}<\infty, \tag{36}$$

则方程 (33) 有解. 实际上，此时可定义

$$Z_\xi(A)=\int_A\frac{Z_\eta(d\lambda)}{P(i\lambda)}=\int_{R_1}\frac{\chi_A(\lambda)}{P(i\lambda)}Z_\eta(d\lambda), \tag{37}$$

由定理 1 知 $Z_\xi(A)(A\in\mathcal{B}_1)$ 是随机测度，它的均方测度

$$F_\xi(A)=\int_A\frac{F_\eta(d\lambda)}{|P(i\lambda)|^2}. \tag{38}$$

由引理 1

$$\int_A P(i\lambda)Z_\xi(d\lambda)=\int_{R_1}\chi_A(\lambda)Z_\eta(d\lambda)=Z_\eta(A),$$

这说明由 (37) 定义的 $Z_\xi(A)$ 是方程 (34) 的解. 因此根据上段所证，(33) 有一解为 (35), 其中的 $Z_\xi(A)$ 由 (37) 给出.

第三，试在条件 (36) 下，讨论 (33) 的解的唯一性问题. 分两种情况：

(甲) 设 $P(i\lambda)$ 无实零点，亦即方程 $P(\lambda)=0$ 无纯虚根 (包括 0). 这时必存在常数 a, 使 $|P(i\lambda)|^2 \geqslant a > 0, \lambda \in R_1$, 于是 $\int_{R_1} \frac{F_\eta(d\lambda)}{|P(i\lambda)|^2} \leqslant \frac{1}{a} F_\eta(R_1) < \infty$ 而 (36) 必然成立. 如果随机测度 $\widetilde{Z}_\xi(A)$ 满足 (34), 由引理 1 得

$$\widetilde{Z}_\xi(A) = \int_A \frac{Z_\eta(d\lambda)}{P(i\lambda)} = Z_\xi(A), \tag{39}$$

亦即 $\widetilde{Z}_\xi(A)$ 必定与 (37) 中的 $Z_\xi(A)$ 重合，从而此时 (34) 有唯一解为 (37), 故 (33) 的解也唯一.

(乙) 设 $P(i\lambda)$ 有实零点为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$. 这时 (34) 的解不唯一. 由直接验证可见 (34) 除了 (37) 给出的解外，还有解

$$\widetilde{Z}_\xi(A) = Z_\xi(A) + \sum_{j=1}^{k} \chi_A(\lambda_j)\varphi_j, \tag{40}$$

这里 χ_A 是 A 的示性函数，$\{\varphi_j\}$ 为正交随机变量，即 $E\varphi_j\overline{\varphi}_i = 0\ (j \neq i)$, $E|\varphi_j|^2 < \infty, E\varphi_j\overline{Z_\xi(A)} = 0\ (j=1,\cdots,k, A \in \mathcal{B}_1)$. 这些假定保证 $\widetilde{Z}_\xi(A)$ 是随机测度.

但如 A 不含一个 $\lambda_j (j=1,\cdots,k)$, 则 (39) 对此 A 仍然成立，因而 $\widetilde{Z}_\xi(A) = Z_\xi(A)$ 唯一.

第四，试证 (36) 不仅是 (33) 有解的充分条件，而且还是必要的. 实际上，设 (33) 有解，因而 (34) 有解. 在上述情况 (甲) 下，早已证明 (36) 成立，故只要考虑情况 (乙). 令 $\Lambda_j^{(\varepsilon)} = (\lambda_j - \varepsilon, \lambda_j + \varepsilon), j=1,\cdots,k, \varepsilon > 0$ 任意，又 $\Lambda^{(\varepsilon)} = \bigcup_{j=1}^{k} \Lambda_j^{(\varepsilon)}$. 于是必存在正常数 b, 使对一切 $\lambda \overline{\in} \Lambda^{(\varepsilon)}$, 有 $|P(i\lambda)|^2 \geqslant b > 0$, 或 $\frac{1}{|P(i\lambda)|^2} \leqslant \frac{1}{b}$, 故可定义随机积分

$$\int_{R_1 \backslash \Lambda^{(\varepsilon)}} \frac{Z_\eta(d\lambda)}{P(i\lambda)},$$

由 (34) 得知此积分等于 $\int_{R_1 \backslash \Lambda^{(\varepsilon)}} Z_\xi(d\lambda)$, 它们的均方值也因而相等，故得

$$\int_{R_1 \backslash \Lambda^{(\varepsilon)}} \frac{F_\eta(d\lambda)}{|P(i\lambda)|^2} = F_\xi(R_1 \backslash \Lambda^{(\varepsilon)}) \leqslant F_\xi(R_1).$$

令 $\varepsilon \to 0$ 得

$$\int_{R_1 \backslash \Lambda} \frac{F_\eta(d\lambda)}{|P(i\lambda)|^2} \leqslant F_\xi(R_1), \quad \Lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k). \tag{41}$$

再者，由 (34) 得 $Z_\eta(\Lambda) = 0$, 故 $F_\eta(\Lambda) = 0$. 由此及 (41) 便得 (36).

总结上述四小段便得

定理 3 方程 (33) 有均方连续弱平稳过程解 $\{\xi_t, t \in R_1\}$ 的充分与必要条件是 (36) 成立，这时一个解由 (35),(37) 给出；如果 $P(i\lambda)$ 无实零点，解是唯一的，如果 $P(i\lambda)$ 有实零点为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, 那么除了 (35),(37) 所给出的解外，(35) 与 (40) 也给出方程 (33) 的解.

(五) 对弱平稳序列 $\{\xi_n, n \in N\}$ 的线性运算与常系数差分方程的理论，与对弱平稳过程情形完全类似. 实际上，在 (一),(二) 中，以 N 换 R_1, n 换 t, 以在 $\Pi = [-\pi, \pi]$ 上的积分

换在 R_1 上的积分，以 $Pi\mathcal{B}_1$ 换 $\mathcal{B}_1$ 后，并经明显的改变，就可得到关于 $\{\xi_n, n\in N\}$ 的相应结果．当然，（三）中的问题对 $\{\xi_n, n\in N\}$ 不会发生，（四）中关于过程的微分方程应换为关于序列的差分方程，试稍详论之．

考虑差分方程

$$P(S)\xi(n)=\eta(n), \tag{42}$$

其中 S 表推移算子，即 $S\xi(n)=\xi(n+1), P(S)=a_0+a_1S+\cdots+a_nS^n, a_k$ 为复常数，$\eta(n),\xi(n)(n\in N)$ 都是弱平稳序列，$\eta(n)$ 已知而 $\xi(n)$ 待求．由于

$$S^k\xi(n)=\xi(n+k)=\int_\Pi e^{i\lambda n}e^{i\lambda k}Z_\xi(d\lambda),$$

故弱平稳序列 $\{S^k\xi(n), n\in N\}$ 的谱测度为

$$Z_{S^k\xi}(A)=\int_A e^{i\lambda k}Z_\xi(d\lambda).$$

因此，解方程 (42) 等价于解方程

$$Z_\eta(A)=\int_A P(e^{i\lambda})Z_\xi(d\lambda). \tag{43}$$

如 $Z_\xi(A)$ 是 (43) 的解，则

$$\xi(n)=\int_\Pi e^{i\lambda n}Z_\xi(d\lambda) \tag{44}$$

是 (43) 的解．(42) 有解的充分与必要条件是

$$\int_\Pi \frac{F_\eta(d\lambda)}{|P(e^{i\lambda})|^2}<\infty, \tag{45}$$

这时可以定义

$$Z_\xi(A)=\int_A \frac{1}{P(e^{i\lambda})}Z_\eta(d\lambda)\ \ (A\in\Pi\mathcal{B}_1), \tag{46}$$

于是 (44),(46) 给出 (42) 的一个解；如果 $P(e^{i\lambda})$ 在 Π 上无零点，此解是唯一的，如果有零点为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 则除此解外，还有由 (44) 及 (40) 所给出的解 (这时 (40) 中的 $Z_\xi(A)$ 由 (46) 定义，又 $A\in\Pi\mathcal{B}_1$)．

§8.5　大数定理；相关函数与谱函数的估计

（一） 我们还需要另一种随机积分，其中被积函数是随机的，收敛性用均方收敛．

设 $y_t(t\in R_1)$ 是二级绝对矩有穷的随机变量，即

$$E|y_t|^2<\infty. \tag{1}$$

引理 1 极限 $\underset{t\to0}{\text{l.i.m}}\, y_t$ 存在的充分与必要条件是：不论 t,h 以何种方式都趋于 0. 极限 $\lim\limits_{\substack{t\to0\\h\to0}} Ey_t\overline{y}_h$ 存在．

证 必要性：设 $y = \underset{t\to 0}{\text{l.i.m}}\ y_t$, 由 Hilbert 空间中内积的连续性，得

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ h\to 0}} Ey_t\overline{y}_h = E|y|^2.$$

充分性：设 $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ h\to 0}} Ey_t\overline{y}_h = a$, 则

$$\begin{aligned}E|y_t-y_h|^2 &= E|y_t|^2 - Ey_t\overline{y}_h - E\overline{y}_t y_h + E|y_h|^2\\ &\to a-a-a+a=0\ \ (t\to 0,\ h\to 0).\ \square\end{aligned}$$

现在来定义所需的随机积分．设 $\{\xi_t, t\in R_1\}$ 为二级矩过程，即 $E|\xi_t|^2<\infty$ 对 $t\in R_1$ 成立．考虑复值函数 $f(t)$ $(t\in R_1)$ 以及有穷区间 $[a,b]$. 对 $[a,b]$ 的任一有穷分割 Δ

$$\Delta: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b,$$

令 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, 并在 $[t_{i-1},t_i]$ 中行选一点 $\widetilde{t}_i$, 作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\widetilde{t}_i)\xi_{\widetilde{t}_i}\Delta t_i$, 它是一随机变量，如果当 $|\Delta| = \max\limits_i \Delta t_i \to 0$ 时，此和在均方收敛意义下有极限，而且这极限不依赖于分点及 $\widetilde{t}_i$ 的取法，就记此极限为 $\int_a^b f(t)\xi(t)dt$.

如果当 $a\to -\infty$, $b\to\infty$ 时，$\int_a^b f(t)\xi(t)dt$ 均方收敛于某一极限，则记此极限为 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\xi(t)dt$.

定理 1 (i) 积分 $\int_a^b f(t)\xi(t)dt$ $(-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty)$ 存在的充分条件是 Riemann 积分

$$\int_a^b\int_a^b B(t,s)f(t)\overline{f(s)}dtds \tag{2}$$

存在；(ii) 如令 $\eta(t) = \int_{t_0}^t f(\tau)\xi(\tau)d\tau$, 则

$$E\eta(t)\overline{\eta(s)} = \int_{t_0}^t\int_{t_0}^s B(u,v)f(u)\overline{f(v)}dudv. \tag{3}$$

这里 $B(t,s) = E\xi(t)\overline{\xi(s)}$.

证 根据引理 1, 当 $[a,b]$ 为有穷区间时，为使积分存在，充分与必要条件是对 $[a,b]$ 的任意二分割 Δ_1 及 Δ_2, 当 $|\Delta_1|\to 0, |\Delta_2|\to 0$ 时

$$E\left(\sum_{i=1}^{n_1} f(\widetilde{t}_i)\xi(\widetilde{t}_i)\Delta t_i\right)\overline{\left(\sum_{j=1}^{n_2} f(\widetilde{s}_j)\xi(\widetilde{s}_j)\Delta s_j\right)} \tag{4}$$

有极限．然而 (4) 式中的数值等于

$$\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} f(\widetilde{t}_i)\overline{f(\widetilde{s}_j)}B(\widetilde{t}_i,\widetilde{s}_j)\Delta t_i\delta s_j,$$

故由 Riemann 积分定义即知如 (2) 中积分存在，则上述极限存在，故 (i) 对有穷区间 $[a,b]$ 正确. 其次，依照上面的证明，得

$$E\Big(\int_{a_1}^{b_1} f(\tau)\xi(\tau)d\tau\overline{\int_{a_2}^{b_2} f(s)\xi(s)ds}\Big)$$

$$=\lim_{\substack{|\Delta_1|\to 0\\ |\Delta_2|\to 0}} E\Big(\sum_{i=1}^{n_1} f(\widetilde{t}_i)\xi(\widetilde{t}_i)\Delta t_i\Big)\overline{\Big(\sum_{j=1}^{n_2} f(\widetilde{s}_j)\xi(\widetilde{s}_j)\Delta s_j\Big)}$$

$$=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} B(u,v)f(u)\overline{f(v)}dudv,$$

这里 Δ_1,Δ_2 分别表 $[a_1,b_1]$ 及 $[a_2,b_2]$ 的分割. 上式的特殊情形是 (3). 在上式中令 $a_1,a_2\to -\infty$, $b_1,b_2\to\infty$, 再用一次引理 1, 便知对无穷区间，(i) 也正确. □

(二) **定理 2** 设 $\{\xi_t, t\in R_1\}$ 为均方连续弱平稳过程，其谱测度为 $F(A), A\in\mathcal{B}_1$, 随机测度为 $Z(A), A\in\mathcal{B}_1$. 于是

$$\underset{T\to 0}{\text{l.i.m}}\ \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)dt = Z(\{0\}), \tag{5}$$

$$E|Z(\{0\})|^2 = F(\{0\}) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T B(\tau)\,d\tau, \tag{6}$$

其中 $\{a\}$ 表只含点 a 的单点集，$B(\tau)$ 为相关函数.

证 由定理 1 及 $B(\tau)$ 的有界连续性知积分 $\int_0^T \xi(t)dt$ 存在. 试证

$$\int_0^T \xi(t)dt = \int_{R_1}\Big(\int_0^T e^{i\lambda t}dt\Big)Z(d\lambda). \tag{7}$$

为此作 $[0,T]$ 的有穷分割 Δ, 由定义

$$\underset{|\Delta|\to 0}{\text{l.i.m}}\sum_{j=1}^n \xi(\widetilde{t}_j)\Delta t_j = \int_0^T \xi(t)dt;$$

另方面，由过程的谱展式及 §8.2 D.2

$$E\Big|\sum_{j=1}^n \xi(\widetilde{t}_j)\Delta t_j - \int_{R_1}\Big(\int_0^T e^{i\lambda t}dt\Big)Z(d\lambda)\Big|^2$$

$$= E\Big|\int_{R_1}\Big(\sum_{j=1}^n e^{i\lambda\widetilde{t}_j}\Delta t_j - \int_0^T e^{i\lambda t}dt\Big)Z(d\lambda)\Big|^2$$

$$=\int_{R_1}\Big|\sum_{j=1}^n e^{i\lambda\widetilde{t}_j}\Delta t_j - \int_0^T e^{i\lambda t}dt\Big|^2 F(d\lambda)\to 0,\quad |\Delta|\to 0.$$

后一极限过渡用到控制收敛定理. 这说明 (7) 中两方值都等于 $\underset{|\Delta|\to 0}{\text{l.i.m}}\sum_{j=1}^n \xi(\widetilde{t}_j)\Delta t_j$, 故 (7) 成立. 于是

$$\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)dt = \int_{R_1}\frac{e^{i\lambda T}-1}{i\lambda T}Z(d\lambda). \tag{8}$$

然而右方被积函数的绝对值有界，不超过 1, 而且 [1]

$$\lim_{T\to\infty}\frac{e^{i\lambda T}-1}{i\lambda T}=\chi_{\{0\}}(\lambda)=\begin{cases}0, & \text{如}\lambda\neq 0,\\ 1, & \text{如}\lambda=0.\end{cases} \tag{9}$$

显然，上式在关于 $F(d\lambda)$ 均方收敛意义下也成立，故

$$E\left|\int_{R_1}\Big(\frac{e^{i\lambda T}-1}{i\lambda T}-\chi_{\{0\}}(\lambda)\Big)Z(d\lambda)\right|^2$$
$$=\int_{R_1}\left|\frac{e^{i\lambda T}-1}{i\lambda T}-\chi_{\{0\}}(\lambda)\right|^2F(d\lambda)\to 0\ \ (T\to\infty).$$

于是由 (8) 即得

$$\underset{T\to\infty}{\text{l.i.m}}\frac{1}{T}\int_0^T\xi(t)dt=\int_{R_1}\chi_{\{0\}}(\lambda)Z(d\lambda)=Z(\{0\}),$$

这就是 (5), (6) 中前一等式是明显的，后式则因

$$\frac{1}{T}\int_0^T B(\tau)d\tau=\frac{1}{T}\int_0^T\left(\int_{R_1}e^{i\lambda\tau}F(d\lambda)\right)d\tau$$
$$=\frac{1}{T}\int_{R_1}\left(\int_0^T e^{i\lambda\tau}d\tau\right)F(d\lambda)=\int_{R_1}\frac{e^{i\lambda T}-1}{i\lambda T}F(d\lambda),$$

其中用到 Fubini 定理. 由 (9) 及控制收敛定理即完全证明了 (6). □

由定理 2 可见，如 $F(\{0\})=0$, 则由 (6) 知

$$E|Z(\{0\})|^2=0,\quad Z(\{0\})=0\ \ (\text{a.s.}). \tag{10}$$

于是 (5) 化为

$$\underset{T\to\infty}{\text{l.i.m}}\frac{1}{T}\int_0^T\xi(t)dt=0. \tag{11}$$

由 (6) 还可看到，如果 $\lim\limits_{\tau\to\infty}B(\tau)=0$ 或者 $\int_0^\infty|B(\tau)|d\tau<\infty$, 则 $F(\{0\})=0$.

回顾定理的证明，可见 (5),(6) 中的 $\frac{1}{T}\int_0^T$ 换为 $\frac{1}{2T}\int_{-T}^T$ 甚至换为 $\frac{1}{T-S}\int_S^T(T-S\to\infty)$, 结论仍然是正确的. (比较平稳过程的大数定理!)

系 1 在定理 2 的条件与记号下，对于任一实数 μ, 有

$$\underset{T-S\to\infty}{\text{l.i.m}}\frac{1}{T-S}\int_S^T\xi(t)e^{-it\mu}dt=Z(\{\mu\}), \tag{12}$$

$$E|Z(\{\mu\})|^2=F(\{\mu\})=\lim_{T-S\to\infty}\frac{1}{T-S}\int_S^T B(\tau)e^{-i\tau\mu}d\tau. \tag{13}$$

证 令 $\widetilde{\xi}(t)=\xi(t)e^{-it\mu}$, 则

$$E\widetilde{\xi}(t+\tau)\overline{\widetilde{\xi}(t)}=e^{-i\tau\mu}B(\tau) \tag{14}$$

[1] 由于 $\frac{e^{i\lambda T}-1}{i\lambda T}=\frac{1}{T}\int_0^T e^{i\lambda t}dt$ 是 λ 的连续函数，故应定义 $\left.\frac{e^{i\lambda T}-1}{i\lambda T}\right|_{\lambda=0}=\lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{e^{i\lambda T}-1}{i\lambda T}=1$.

与 t 无关而且对 τ 连续，故 $\{\widetilde{\xi}(t), t \in R_1\}$ 是均方连续弱平稳过程，其谱展式可如下求得：

$$\widetilde{\xi}(t) = \int_{R_1} e^{-it\mu} e^{it\lambda} Z(d\lambda) = \int_{R_1} e^{it(\lambda-\mu)} Z(d\lambda) = \int_{R_1} e^{it\nu} \widetilde{Z}(d\nu), \tag{15}$$

其中 $\widetilde{Z}(A) = Z(A+\mu)$ 是它的随机测度，这里集 $A + \mu = (\lambda + \mu : \lambda \in A)$. 类似地，它的相关函数 $\widetilde{B}(\tau)$ 由 (14) 为

$$\widetilde{B}(\tau) = \int_{R_1} e^{it(\lambda-\mu)} F(d\lambda) = \int_{R_1} e^{it\nu} \widetilde{F}(d\nu), \tag{16}$$

故它的谱测度为 $\widetilde{F}(A) = F(A+\mu)$. 从而

$$\widetilde{Z}(\{0\}) = Z(\{\mu\}), \quad \widetilde{F}(\{0\}) = F(\{\mu\}).$$

于是系 1 立刻从定理 2 及其下的说明推出. □

类似地，对于弱平稳序列，我们有

定理 3 设 $\{\xi_n, n \in N\}$ 是弱平稳序列，则对任一实数 $\mu \in [-\pi, \pi]$, 有

$$\underset{n-m\to\infty}{\text{l.i.m}} \frac{1}{n-m+1} \sum_{j=m}^{n} \xi_j e^{-ij\mu} = Z(\{\mu\}), \tag{17}$$

$$E|Z(\{\mu\})|^2 = F(\{\mu\}) = \lim_{n-m\to\infty} \frac{1}{n-m+1} \sum_{j=m}^{n} B(j) e^{-ij\mu}. \tag{18}$$

证 先设 $\mu = 0$. 令 $\Pi = [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-m+1} \sum_{j=m}^{n} \xi_j &= \int_{\Pi} \frac{1}{n-m+1} \sum_{j=m}^{n} e^{ij\lambda} Z(d\lambda) \\ &= \int_{\Pi} \frac{e^{im\lambda}}{n-m+1} \cdot \frac{1-e^{i(n-m+1)\lambda}}{1-e^{i\lambda}} Z(d\lambda); \end{aligned} \tag{19}$$

类似有

$$\frac{1}{n-m+1} \sum_{j=m}^{n} B(j) = \int_{\Pi} \frac{e^{im\lambda}}{n-m+1} \cdot \frac{1-e^{i(n-m+1)\lambda}}{1-e^{i\lambda}} F(d\lambda). \tag{20}$$

上二式右方被积函数的绝对值不超过 1, 而且当 $n - m \to \infty$ 时，被积函数趋于 $\chi_{\{0\}}(\lambda)$, 这收敛性是处处收敛 (在 Π 中), 也可以是关于 $F(d\lambda)$ 均方收敛. 于是由 (19) 及 §8.2 D.2 得证 (17), 由 (20) 得证 (18)($\mu = 0$ 时). 对一般的 μ, 证明与系 1 的证类似. □

现在对系 1 与定理 3 进行些讨论. 由它们可见，使 $F(\{\mu\}) \neq 0$ 的点 μ 起着特殊的作用，以后称这种点 μ 为过程 (或谱测度，或谱函数) 的 **离散谱**. 为确定起见，试考虑 (12) 式. 任意固定 T 而令 $S \to -\infty$,(12) 左方显然只依赖于 T 以前的 $\xi(t), t \leqslant T$, 如果这均方极限非零的概率为正，于是 $P(Z(\{\mu\}) \neq 0) > 0$, 则由 (13) 可知 $F(\{\mu\}) > 0$, 即 μ 是过程的离散谱. 既然 μ 任意，便得到结论：过程的一切离散谱 μ(它最多只有可列多个) 以及 $Z(\{\mu\})$ 完全被过程的过去 $\{\xi(t), t \leqslant T\}$ 所决定，这里 T 任意固定.

设谱测度完全集中在离散谱上，亦即设 §8.4 中 $F(\lambda) = F_1(\lambda), F_2(\lambda) = F_3(\lambda) = 0$. 以 $\{\mu_j\}$ 表离散谱的集，由 §8.4(19), 这时过程的谱展式化为

$$\xi(t) = \sum_j e^{it\mu_j} Z(\{\mu_j\}) \quad (t \in R_1).$$

于是在任一点 t 上的 $\xi(t)$ 由 $\{Z(\{\mu_j\})\}$ 决定. 由此事实与上述结论，可见 $\{\xi(t), t \in R_1\}$ 完全被 $\{\xi(t), t \leqslant T\}$ 所决定，而且任一 $\xi(s)$ 可自 $\{\xi(t), t \leqslant T\}$ 经线性运算得到. 换言之

$$\{\xi_t, t \in R_1\} \subset \overline{L}\{\xi_t, t \leqslant T\} \quad (T \in R_1 \text{ 任意}).$$

以上讨论也适用于 $\{\xi_n, n \in N\}$ 总之，得

系 2 (i) 设 $\{\xi_t, t \in R_1\}$(或 $\{\xi_n, n \in N\}$) 为任意均方连续弱平稳过程 (或弱平稳序列),$\{\mu_j\}$ 是它的离散谱集，则 $\{\mu_j\}$ 完全被 $\{\xi_t, t \leqslant T\}$(或 $\{\xi_n, n \leqslant M\}$ 所决定，而且

$$\begin{gathered} Z(\{\mu_j\}) \in \overline{L}\{\xi_t, t \leqslant T\} \quad (T \in R_1 \text{ 任意}) \\ (\text{ 或} Z(\{\mu_j\}) \in \overline{L}\{\xi_n, n \leqslant M\} \quad (M \in N \text{ 任意})). \end{gathered} \tag{21}$$

(ii) 如此过程 (或序列) 的谱测度完全集中在 $\{\mu_j\}$ 上，则

$$\begin{gathered} \{\xi_t, t \in R_1\} \subset \overline{L}\{\xi_t, t \leqslant T\} \\ (\text{ 或} \{\xi_n, n \in N\} \subset \overline{L}\{\xi_n, n \leqslant M\}). \end{gathered} \tag{22}$$

(i), (ii) 中的 $\{\xi_t, t \leqslant T\}$ (或 $\{\xi_n, n \leqslant M\}$) 可换为 $\{\xi_t, t \geqslant M\}$ (或 $\{\xi_n, n \geqslant M\}$).

证 只要证最后一论断，为此只要在 (12)(或 (17)) 中，固定 S(或 m) 而令 $T \to \infty$(或 $n \to \infty$), 再令 $S = T$(或 $m = M$). □

(三) 作为 (二) 中定理的应用，试研究如何由样本序列 (或样本函数) 来估计相关函数 $B(\tau)$ 及谱测度 $F(A)$. 考虑弱平稳序列 $\{\xi_n, n \in N\}$, 并固定 τ, 作一新序列 $\{\eta_n, n \in N\}$,

$$\eta_n = \xi_{\tau+n}\overline{\xi}_n. \tag{23}$$

假定 $\{\eta_n, n \in N\}$ 也是一弱平稳序列，即设

$$E|\eta_n|^2 = E|\xi_{\tau+n}\overline{\xi}_n|^2 < \infty \quad (n \in N),$$

$$B_\eta(m) = E\{\eta_{n+m}\overline{\eta}_n\} = E\{\xi_{\tau+n+m}\overline{\xi_{n+m}}\overline{\xi_{\tau+n}\overline{\xi}_n}\}$$

不依赖于 $n(m \in N)$, 于是 $B_\eta(m)$ 是 $\{\eta_n\}$ 的相关函数. 自然希望

$$\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} \eta_j = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} \xi_{\tau+j}\overline{\xi}_j \tag{24}$$

可以作为 $B(\tau)$ 的估计值，这猜想在一定条件下正确.

定理 4 (i) 设 $\{\xi_n, n \in N\}, \{\eta_n, n \in N\}$ 都是弱平稳序列，则存在极限

$$\underset{n-m\to\infty}{\text{l.i.m}} \frac{1}{n-m+1}\sum_{j=m}^{n} \eta_j; \tag{25}$$

当而且只当

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}B_{\eta}(j)=|B(\tau)|^2 \tag{26}$$

时，(25) 中极限等于 $B(\tau)$ (a.s.); (ii) 如果 $\{\xi_n, n\in N\}$ 还是平稳序列，$m=0$, 则 (25) 中极限也是概率 1 收敛意义下的极限，如补设 $\{\xi_n, n\in N\}$ 是遍历序列，则这极限等于 $B(\tau)$.

证 由假定

$$E\eta_n=E\xi_{\tau+n}\bar{\xi}_n=B(\tau) \tag{27}$$

不依赖于 n, 因而 $\{\eta_n-B(\tau), n\in N\}$ 也是弱平稳序列而且数学期望为 0. 按定理 3, 极限

$$\underset{n-m\to\infty}{\text{l.i.m}}\frac{1}{n-m+1}\sum_{j=m}^{n}[\eta_j-B(\tau)]=\underset{n-m\to\infty}{\text{l.i.m}}\frac{1}{n-m+1}\sum_{j=m}^{n}\eta_j-B(\tau)$$

存在. 再由 (18), 这极限以概率 1 等于 0, 从而 (25) 中极限以概率 1 等于 $B(\tau)$ 的充分与必要条件是

$$\lim_{n-m\to\infty}\frac{1}{n-m+1}\sum_{j=m}^{n}E(\eta_j-B(\tau))\overline{(\eta_0-B(\tau))}=0,$$

由 (27), 此式当 $m=0$ 时化为 (26)(注意 (25) 中极限与 $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\ \frac{1}{n+1}\cdot\sum\limits_{j=0}^{n}\eta_j$ 同时存在而且相等).

如果 $\{\xi_n, n\in N\}$ 平稳，则 $\{\eta_n, n\in N\}$ 也平稳，既然 $E|\eta_n|\leqslant E\{|\xi_0|^2\}$, 故由平稳序列的强大数定理，以概率 1 存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\eta_j=E(\eta_0\mid\mathcal{U}),$$

$\mathcal{U}$ 为 $\{\eta_n, n\in N\}$ 的不变集 σ 代数. 如 $\{\xi_n, n\in N\}$ 遍历，则 $\{\eta_n, n\in N\}$ 亦然，而

$$E(\eta_0\mid\mathcal{U})=E\eta_0=B(\tau).\ \square$$

现在研究谱函数 $F(\lambda)=F((-\infty,\lambda])$ 的估计问题. 在一定条件下，可以证明结论:

(A) 在 $F(\lambda)$ 的任一对连续点 $\mu_1,\mu_2(\mu_1\leqslant\mu_2)$ 上，以概率 1 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\mu_1}^{\mu_2}\frac{1}{n+1}\left|\sum_{j=0}^{n}\xi_je^{-ij\lambda}\right|^2d\lambda=F(\mu_2)-F(\mu_1). \tag{28}$$

这里积分指 Lebesgue 积分.

下面证明，如果弱平稳序列 $\{\xi_n, n\in N\}$ 满足条件

(B) 对任意整数 τ, 以概率 1 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\xi_{j+\tau}\bar{\xi}_j=B(\tau), \tag{29}$$

则 (A) 正确.

注意，由定理 4, 为使条件 (B) 满足，只要 $\{\xi_n, n\in N\}$ 也是遍历的平稳序列.

定理 5 如果条件 (B) 满足，则结论 (A) 正确；如果 (29) 只在依概率收敛下满足，则 (28) 也在依概率收敛意义下正确.

证 定义函数

$$F_n(\lambda)=\int_{-\pi}^{\lambda}\frac{1}{n+1}\Big|\sum_{j=0}^{n}\xi_j e^{-ij\mu}\Big|^2 d\mu,$$

这里用的是 Lebesgue 积分. $F_n(\lambda)$ 与 ω 有关. 当 $|t|<n$ 时

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}e^{it\lambda}F_n(d\lambda)&=\int_{-\pi}^{\pi}e^{it\lambda}\frac{1}{n+1}\Big|\sum_{j=0}^{n}\xi_j e^{-ij\lambda}\Big|^2 d\lambda\\&=\frac{1}{n+1}\sum_{j,k=0}^{n}\xi_j\bar{\xi}_k\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(t+k-j)\lambda}d\lambda\\&=\frac{2\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n-t}\xi_{k+t}\bar{\xi}_k.\end{aligned}\tag{30}$$

由条件 (B) 得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{it\lambda}F_n(d\lambda)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-t}\xi_{k+t}\bar{\xi}_k\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-t+1}\sum_{k=0}^{n-t}\xi_{k+t}\bar{\xi}_k=B(t)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{it\lambda}F(d\lambda)\ \ \text{(a.s.)}.\end{aligned}\tag{31}$$

这表示函数 $\frac{1}{2\pi}F_n$ 的 Fourier-Lebesgue 变换值趋于 F 的 Fourier- Lebesgue 变换值. 故由 Lévy 关于单调函数的收敛定理即得证第一结论.

如果 (29) 只依概率收敛正确，那么 (31) 也只在依概率收敛意义下成立，于是对 $\{n\}$ 的任一子列必存在后者的子列 $\{m_n\}$, 使

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{it\lambda}F_{m_n}(d\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{it\lambda}F(d\lambda)\ \ \text{(a.s.)}.$$

从而 (28) 对子列 $\{m_n\}$ 正确，这便证明了 (28) 在依概率收敛意义下成立 (参看附篇 (三)B).
□

对于均方连续弱平稳过程，可以得到与定理 4, 5 完全类似的结果，只要把其中有穷项和的平均换成对有穷区间的积分的平均. 例如 (28) 应改为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\mu_1}^{\mu_2}\frac{1}{t}\Big|\int_0^t\xi_s e^{-is\lambda}ds\Big|^2 d\lambda=F(\mu_2)-F(\mu_1).\tag{32}$$

§8.6 补充与习题

1. 试造一弱平稳过程，它不是均方连续的.

提示：考虑独立同分布、平均值为 0 、方差为 1 的实值过程.

2. 设随机变量 ξ 满足 $E|\xi|^2<\infty$. 定义 $\xi_n\equiv\xi$, 试证 $\{\xi_n,n\in N\}$ 为弱平稳序列，并求它的相关函数与谱测度.

提示： $B(n)=E|\xi|^2, F(A)$ 集中在点 0 上，质量为 $E|\xi|^2$.

3. 设实值均方连续弱平稳过程 $\{\xi_t,t\in R_1\}$, $E\xi_t\equiv 0$, 有谱密度为

$$f_a(\lambda)=\begin{cases}c\ (c>0), & \text{如}|\lambda|\leqslant a\quad (a>0);\\ 0, & \text{如}|\lambda|>a.\end{cases}$$

试证相关函数 $B_a(\tau)$ 满足

$$\lim_{a\to\infty}\frac{B_a(\tau)}{B_a(0)}=\begin{cases}0, & \text{如}\tau\neq 0,\\ 1, & \text{如}\tau=0.\end{cases}$$

而

$$\lim_{a\to\infty}f_a(\lambda)=c.$$

物理及工程上称谱密度恒等于常数的随机过程为 **白噪声**. 这种过程的研究不能纳入本章的理论以内，因为它的谱测度 $F(A)$ 不是有穷的， $F(R_1)=\infty$.

4. 白噪声也可用下列方法得到：设 $\{y(t),t\in R_1\}$ 为任意均方连续实值弱平稳过程，$Ey(t)\equiv 0$, 有谱密度为 $f_y(t), f_y(0)=c>0$. 对 $\lambda>0$, 定义

$$z_\lambda(t)=\sqrt{\lambda}y(\lambda t),$$

则 $\{z_\lambda(t),t\in R_1\}$ 的相关函数为

$$B_z(\tau)=\lambda B_y(\lambda\tau),$$

其中 $B_y(\tau)$ 是 $y(t)$ 的相关函数. 又 $z_\lambda(t)$ 的谱密度为

$$\begin{aligned}f_z(t)&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty B_z(\tau)\cos t\tau d\tau=\frac{\lambda}{\pi}\int_0^\infty B_y(\lambda\tau)\cos t\tau d\tau\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty B_y(s)\cos\Big(\frac{t}{\lambda}s\Big)ds=f_y\Big(\frac{t}{\lambda}\Big),\end{aligned}$$

令 $\lambda\to\infty$, 则

$$\lim_{\lambda\to\infty}f_z(t)=f_y(0)=c.$$

5. 设 η 为实随机变量，分布为 F, 试证 $\xi(t)=e^{it\eta}$ 是弱平稳过程，谱测度重合于 F.

6. 不能用 §8.5 (28) 来估计谱密度 $f(\lambda)$; 也就是说，即使谱密度 $f(\lambda)$ 存在，也未必有

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{n+1}\Big|\sum_{j=0}^n\xi_je^{-ij\lambda}\Big|^2\xrightarrow{P}f(\lambda). \tag{1}$$

例 设 $\{\xi_n,n\in N\}$ 实值、相互独立、有相同分布 $N(0,1)$.$B(0)=1, B(n)=0\ (n\neq 0), f(\lambda)\equiv\frac{1}{2\pi}, \lambda\in[-\pi,\pi]$. 特别， $f(0)=\frac{1}{2\pi}$. 但

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{n+1}\Big|\sum_{j=0}^n\xi_je^{-ij\lambda}\Big|^2=\frac{1}{2\pi}\Big(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{j=0}^n\xi_j\Big)^2,$$

既然 $\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{j=0}^{n}\xi_j$ 仍有 $N(0,1)$ 分布，故 (1) 式不可能成立.

7. 试求弱平稳过程

$$x_t=\int_{R_1} f(t-s)y(ds)\quad (t\in R_1)$$

的相关函数 $B(\tau)$, 其中 $\{y(s), s\in R_1\}$ 是有参数 $\sigma=1$ 的 Wiener 过程，而

$$f(s)=\begin{cases} ce^{-\alpha s}\sin\omega s, & s\geqslant 0\ (c>0,\ \omega\neq 0);\\ 0, & s<0.\end{cases}$$

解 利用 §8.2(49) 及 $B(\tau)$ 的偶性，得

$$B(\tau)=c_1e^{-\alpha|\tau|}\Big(\cos\omega|\tau|+\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega|\tau|\Big)\quad \omega\neq 0,$$

其中 $c_1=\frac{c^2\omega^2}{4\alpha(\alpha^2+\omega^2)}$.

实际上，当 $\omega\neq 0, \tau>0$ 时， $B(\tau)$ 等于

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty c^2e^{-\alpha s}\sin\omega se^{-\alpha(s+\tau)}\sin(s+\tau)\omega ds\\
&=c^2e^{-\alpha\tau}\int_0^\infty e^{-2\alpha s}\frac{1}{2}[\cos\omega\tau-\cos(2\omega s+\omega\tau)]ds\\
&=\frac{c^2}{2}e^{-\alpha\tau}\Big[\frac{1}{2\alpha}\cos\omega\tau-\int_0^\infty e^{-2\alpha s}\cos(2\omega s+\omega\tau)ds\Big]\\
&=\frac{c^2}{2}e^{-\alpha\tau}\Big\{\frac{1}{2\alpha}\cos\omega\tau-\mathrm{Re}\int_0^\infty e^{-2\alpha s}e^{i(2\omega s+\omega\tau)}ds\Big\}\\
&=\frac{c^2}{2}e^{-\alpha\tau}\Big[\frac{1}{2\alpha}\cos\omega\tau-\mathrm{Re}\Big\{e^{i\omega\tau}\frac{1}{2(\alpha-i\omega)}\Big\}\Big]\\
&=\frac{c^2}{2}e^{-\alpha\tau}\Big[\frac{1}{2\alpha}\cos\omega\tau-\mathrm{Re}\Big\{e^{i\omega\tau}\frac{\alpha+i\omega}{2(\alpha^2+\omega^2)}\Big\}\Big]\\
&=\frac{c^2}{2}e^{-\alpha\tau}\Big[\frac{1}{2\alpha}\cos\omega\tau-\frac{\alpha}{2(\alpha^2+\omega^2)}\cos\omega\tau+\frac{\omega}{2(\alpha^2+\omega^2)}\sin\omega\tau\Big]\\
&=\frac{c^2}{2}e^{-\alpha\tau}\Big[\frac{\omega^2}{2\alpha(\alpha^2+\omega^2)}\cos\omega\tau+\frac{\omega}{2(\alpha^2+\omega^2)}\sin\omega\tau\Big]\\
&=c_1e^{-\alpha\tau}\Big(\cos\omega\tau+\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega\tau\Big).\ \square
\end{aligned}$$

8. **Karhunen-Loève 定理** 设 $\xi_t(t\in[a,b])$ 是均方连续的实值过程, $E|\xi_t|^2<\infty, B(s,t)=E\xi_s\xi_t$, 则

$$\xi_t=\sum_{n=1}^\infty\frac{\psi_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}}\eta_n,$$

其中级数为均方收敛， $E\eta_n\eta_m=\delta_{nm},\eta_n$ 是实随机变量，而 λ_n 是积分方程

$$\psi(t)=\lambda\int_a^b B(t,s)\psi(s)ds$$

的特征值， $\psi_n(t)$ 是相应的特征函数.

证 由$\xi_{t+u}\xrightarrow{2}\xi_t, \xi_{s+v}\xrightarrow{2}\xi_s, u\to 0, v\to 0$, 得$B(s+v,t+u)=E\xi_{s+v}\xi_{t+u}\to E\xi_s\xi_t=B(s,t)$, 故 $B(s,t)$ 是 $[a,b]\times[a,b]$ 上的连续函数. 根据 Mercu 定理 (斯米尔诺夫: 高等数学教程, 卷 4,27) 知

$$B(s,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(s)\psi_n(t)}{\lambda_n},$$

其中 ψ_n,λ_n 如上定义. 令

$$f(t,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\psi_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}}, & \text{当}\lambda=n\text{ 时, } n=1,2,\cdots,\\ 0, & \text{当 }\lambda\text{ 非正整数时,}\end{cases}$$

则 $B(s,t)=\int_{R_1}f(s,\lambda)f(t,\lambda)F(d\lambda)$, 其中 F 是集中在正整数集上的测度, $F(\{n\})=1$. 利用 Karhunen 定理 (注意此定理对 σ 有穷测度 F 也正确, 证明不变, 只要限制证明中出现的 A,B 等满足 $F(A)<\infty, F(B)<\infty$), 即得所欲证. □

9. 设周期为 2π 的连续实值函数 $f(t)$ 可展为收敛于 $f(t)$ 的 Fourier 级数: $f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{int}$, 考虑在 $[-\pi,\pi]$ 上均匀分布的随机变量 ξ, 定义 $\xi_t=f(t+\xi)$. 试证 $\{\xi_t,t\in R_1\}$ 是弱平稳过程, 并求谱展式等等.

提示: 利用 f 的周期性及 ξ 的均匀分布性, 得 $E\xi_s\xi_{s+t}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)f(x+t)dx$. 谱展式为

$$\xi_t=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{int}a_ne^{in\xi},$$

故随机测度是离散的. $Z(A)=\sum\limits_{n\in A}a_ne^{in\xi}, F(A)=\sum\limits_{n\in A}|a_n|^2$. 关于 Fourier 级数可见斯米尔诺夫: 高等数学教程, 卷 2,161.

10. 设 $\psi(n)$ 为正交规范化序列, 即有相关函数 $B(\tau)=1,\tau=0; B(\tau)=0,\tau\neq 0$, 因而有谱密度为 $f_\psi(\lambda)=\frac{1}{2\pi}$. 考虑差分方程

$$Q(s)\xi(n)=P(s)\psi(n),$$

其中 $P(s)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_is^i, Q(s)=\sum\limits_{i=0}^{m}b_is^i$, 又 $Q(e^{i\lambda})$ 在 $\Pi=[-\pi,\pi]$ 上无零点, 试求 $\xi(n)$ 的谱测度.

提示: 相应于 §8.4(38), 对方程 (42) 也有

$$F_\xi(A)=\int_A\frac{F_\eta(d\lambda)}{|P(e^{i\lambda})|^2},$$

如 $F_\eta(A)=\int_Af_\eta(\lambda)d\lambda$, 则

$$f_\xi(\lambda)=\frac{f_\eta(\lambda)}{|P(e^{i\lambda})|^2}.$$

令 $\eta(n)=P(s)\psi(n)$, 由上式得 $f_\eta(\lambda)=\frac{1}{2\pi}|P(e^{i\lambda})|^2$; 再用一次上式即得 $f_\xi(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\frac{|P(e^{i\lambda})|^2}{|Q(e^{i\lambda})|^2}$.

11. 设 $\{x_t, t\in R_1\}$ 为弱平稳过程， a_k 为复常数， s_k 为实常数，试证

$$y_t=\sum_{k=1}^{n} a_k x_{t+s_k},\quad t\in R_1$$

也是弱平稳过程. 如 $\{x_t, t\in R_1\}$ 均方连续，有随机测度为 $Z_x(A)$, 谱测度为 $F_x(A)$, 试证 $\{y_t, t\in R_1\}$ 也均方连续，并求相应诸量.

提示：$Ey_t\overline{y}_s=\sum\limits_{i,j} a_i\overline{a}_j B_x(t-s+s_i-s_j)$, 其中 $B_x(\tau)$ 是 $\{x_t, t\in R_1\}$ 的相关函数. 如 $B_x(\tau)=\int_{R_1} e^{i\tau\lambda}F_x(d\lambda)$, 则 $B_y(\tau)=\int_{R_1} e^{i\tau\lambda}\left|\sum\limits_k a_k e^{i\lambda s_k}\right|^2 F_x(d\lambda)$, 故 $F_y(A)=\int_A \left|\sum\limits_k a_k e^{i\lambda s_k}\right|^2 F_x(d\lambda)$. 又 $Z_y(A)=\int_A\left(\sum\limits_k a_k e^{i\lambda s_k}\right)Z_x(d\lambda)$.

附记. 本章中限于叙述弱平稳过程的基本知识，关于这方面的文献见 [2], 那里的叙述所需的准备知识较少. 更全面而又较严密的叙述见 [16]. 对弱平稳过程的微分与差分方程则取材于 Колмогоров 的随机过程讲义 (1959).

参 考 文 献

[1] 郑曾同，随机测度与随机积分，数学学报， 11:2(1961), 133-140.

[2] 雅格龙，平稳随机函数导论，数学进展， 2:1(1956), 3-153.

第九章 弱平稳过程中的几个问题

§9.1. 作为酉算子群的弱平稳过程

(一) 上章中，我们以谱展开为中心，叙述了弱平稳过程的基本理论．本章将就几个专题，进一步叙述这方面的理论，每个专题构成每节的内容．

类似于保测变换与平衡过程间的关系，试研究 Hilbert 空间中酉算子群与弱平稳过程间的关系．

设 $\xi(\omega)$ 为定义于概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的复值随机变量，令

$$H=(\xi(\omega):E|\xi(\omega)|^2<\infty), \tag{1}$$

考虑 (复)Hilbert 空间 H, 其中任二元 ξ,η 的内积定义为

$$(\xi,\eta)=E\xi\overline{\eta}, 故(\xi,\xi)=\|\xi\|^2=E|\xi|^2. \tag{2}$$

这空间在上章中已遇到过多次．把 H 变到 H 中的线性算子 T 称为 **等距的** [1]，如对任二 $\xi,\eta\in H$, 有

$$(T\xi,T\eta)=(\xi,\eta); \tag{3}$$

等距算子如把 H 变到 H 之上 (而不仅是变到 H 的真子空间之上), 则称它为 **酉算子**, 它有逆算子．

考虑酉算子集 $\{T_t,t\in R_1\}$, 如对任二 $s\in R_1,t\in R_1$, 有

$$T_{s+t}=T_sT_t=T_tT_s,\quad T_0=I \tag{4}$$

(I 为恒等算子，即 $I\xi=\xi,\xi\in H$), 则称 $\{T_t,t\in R_1\}$ 为 **酉算子群**; **称此群为连续的**，如对任意 $\xi\in H$, 有

$$\lim_{t\to 0}\|T_t\xi-\xi\|=0. \tag{5}$$

设 $\mathcal{M}\subset H$ 为任一闭线性子空间，类似地可以定义把 $\mathcal{M}$ 变到 $\mathcal{M}$ 的等距算子、酉算子等等．

定理 1 (i) 设 $\{T_t,t\in R_1\}$ 为 H 上的连续酉算子群，$\xi_0\in H$ 任意，则

$$\{\xi_t,t\in R_1\}\quad(\xi_t=T_t\xi_0) \tag{6}$$

是一均方连续弱平稳过程；

(ii) 反之，设 $\{\xi_t,t\in R_1\}$ 是均方连续弱平稳过程，则在 $\overline{L}\{\xi_t,t\in R_1\}$ 上存在唯一的连续酉算子群 $\{T_t,t\in R_1\}$ 使

$$\xi_t=T_t\xi_0. \tag{7}$$

[1] 注意，在 H 中，如 $E|\xi-\eta|^2=0$, 即 $\xi=\eta$(a.s.) 时，ξ,η 是同一元．因此，如 $\xi_1=T\eta$, 则 $\xi_2=T\eta$ 的充分与必要条件是 $\xi_1=\xi_2$ (a.s.).

证 (i) 此因

$$\begin{aligned} E\xi_{t+h}\overline{\xi}_t &= (\xi_{t+h},\xi_t) = (T_{t+h}\xi_0, T_t\xi_0) \\ &= (T_tT_h\xi_0, T_t\xi_0) = (T_h\xi_0,\xi_0) = E\xi_h\overline{\xi}_0; \\ E|\xi_{t+h}-\xi_t|^2 &= \|\xi_{t+h}-\xi_t\|^2 = \|T_tT_h\xi_0 - T_t\xi_0\|^2 \\ &= \|T_h\xi_0 - \xi_0\|^2 \to 0 \quad (h\to 0). \end{aligned}$$

(ii) 简记 $\Xi = \{\xi_t, t\in R_1\}, L = L\{\xi_t, t\in R_1\}, \overline{L} = \overline{L}\{\xi_t, t\in R_1\}$, 逐步于 $\Xi, L, \overline{L}$ 上定义 $\{T_t, t\in R_1\}$.

(A) 对 $\xi_s \in \Xi$, 定义

$$T_t\xi_s = \xi_{s+t}. \tag{8}$$

(B) 如 $\eta = \sum\limits_{i=1}^n a_i\xi_{t_i} \in L$, 则定义

$$T_t\eta = \sum_{i=1}^n a_iT_t\xi_{t_i} = \sum_{i=1}^n a_i\xi_{t+t_i}. \tag{9}$$

为使如此定义的 T_t 单值，要证 $T_t\eta$ 与 η 之表现无关. 首先注意一般事实

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\xi_{t+t_i}, \sum_{j=1}^m b_j\xi_{t+s_j}\right) = \sum_{i,j} a_i\overline{b}_jB(t_i-s_j) = \left(\sum_{i=1}^n a_i\xi_{t_i}, \sum_{j=1}^m b_j\xi_{s_j}\right). \tag{10}$$

因此，如 η 另有一表达式为 $\eta = \sum\limits_{j=1}^m b_j\xi_{s_j}$, 则由 (10) 立得

$$\begin{aligned} \|\sum_{i=1}^n a_i\xi_{t+t_i} - \sum_{j=1}^m b_j\xi_{t+s_j}\| &= \|\sum_{i=1}^n a_i\xi_{t_i} - \sum_{j=1}^m b_j\xi_{s_j}\| \\ &= \|\eta-\eta\| = 0, \end{aligned}$$

此得证 T_t 的单值性.

$T_t(t\in R_1)$ 在 L 上具有性质

B.1. $T_t(a\xi + b\eta) = aT_t\xi + bT_t\eta$.

B.2. $(T_t\xi, T_t\eta) = (\xi,\eta)$, $\|T_t\xi\|^2 = \|\xi\|^2$.

B.3. $T_{s+t}\xi = T_sT_t\xi = T_tT_s\xi$, $T_0\xi = \xi$.

B.4. $T_s^{-1} = T_{-s}$.

实际上， B.1,B.3,B.4 由 (9) 直接看出，而 B.2 则由 (10) 推出.

(C) 今在 $\overline{L}$ 上定义 T_t. 对 $\xi \in \overline{L}$, 任取 $\{\xi_n\}\subset L$, 使 $\|\xi_n - \xi\| \to 0$, 并定义

$$T_t\xi = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, T_t\xi_n. \tag{11}$$

完全象在 §8.2 中定义 $I(f)$ 时一样，可见极限 $T_t\xi$ 总存在；其值与趋于 ξ 的序列的选择无关；而且 B.1 与 B.2 在 $\overline{L}$ 上也成立. (在 §8.2 中，我们只利用那里的 C.1 与 C.2, 而对 $I(f)$ 证明了此三事实；既然 B.1,B.2 相当于 C.1,C.2, 故易见这些事实对 $T_t\xi$ 也正确.)

其实在 $\overline{L}$ 上还保留 B.3. 这是因为，由 (11) 及 B.3 在 L 上的正确性得

$$T_{s+t}\xi = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, T_{s+t}\xi_n = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, T_s(T_t\xi_n),$$

然而 $T_t\xi = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, T_t\xi_n$, 故再用定义 (11) 即知右方项等于 $T_sT_t\xi$, 即 $T_{s+t}\xi = T_sT_t\xi$. 由对称性得 $T_{s+t}\xi = T_tT_s\xi$. 最后

$$T_0\xi = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, T_0\xi_n = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, \xi_n = \xi.$$

在 $\overline{L}$ 上甚至还保留 B.4. 这由于

$$T_{-s}T_s\xi = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, T_{-s}T_s\xi_n = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, \xi_n = \xi.$$

总之，我们已经证明了 $\{T_t, t\in R_1\}$ 是 $\overline{L}$ 上的酉算子群. 试证它是连续的.

它在 L 上连续：如 $\xi\in L$, 则

$$\begin{aligned}\|T_t\xi-\xi\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i(\xi_{t+t_i}-\xi_{t_i})\right\| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}|a_i|\|\xi_{t+t_i}-\xi_{t_i}\| = \sum_{i=1}^{n}|a_i|\|\xi_t-\xi_0\| \to 0\ (t\to 0).\end{aligned}$$

它在 $\overline{L}$ 上连续：如 $\xi\in\overline{L}$, 对 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta\in L$, 使 $\|\eta-\xi\|<\frac{\varepsilon}{3}$, 由此群在 L 上的连续性，知存在 $\delta>0$, 使 $|t|<\delta$ 时， $\|T_t\eta-\eta\|<\frac{\varepsilon}{3}$. 故

$$\begin{aligned}\|T_t\xi-\xi\| &\leqslant \|T_t\xi-T_t\eta\|+\|T_t\eta-\eta\|+\|\eta-\xi\| \\ &= 2\|\xi-\eta\|+\|T_t\eta-\eta\|<\varepsilon.\end{aligned}$$

最后证唯一性：设有二连续酉算子群 $T_t, T_t'(t\in R_1)$, 都满足 (7), 则由 (9) 及算子的线性它们必在 L 上重合. 故对任意 $\xi\in\overline{L}$, 由 (11) 及线性算子的连续性得

$$T_t\xi = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, T_t\xi_n = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, T_t'\xi_n = T_t'\xi. \quad \square$$

关于弱平稳序列，类似地有

定理 2 (i) 设 T 为 H 上的酉算子， $\xi_0\in H$ 任意，则

$$\{\xi_n, n\in N\},\ \text{其中}\xi_n = T^n\xi_0 \tag{12}$$

是一弱平稳序列；

(ii) 反之，设 $\{\xi_n, n\in N\}$ 是弱平稳序列，则在 $\overline{L}\{\xi_n, n\in N\}$ 上存在唯一的酉算子 T, 使

$$\xi_n = T^n\xi_0. \tag{13}$$

这定理的证与上定理的证类似，故从略 (参看平稳序列的相应定理).

由此可见，均方连续弱平稳过程 (或弱平稳序列) 无非是特殊 Hilbert 空间上的连续酉算子群 (或酉算子), 因而可以利用一般的酉算子的理论来研究它们. 事实上可以从这里出

发来叙述上章中的许多结果. 然而我们不愿这样作，以免过多地依靠泛函分析的知识. 作为一例，试利用关于一般酉算子的 Stone 定理来重新证明 §8.3 中的谱展式.

(二) 仍然考虑 (1) 中的 H. 把 H 变到 H 中的线性算子 E 称为 **投影算子**, 如对任意 $\xi \in H, \eta \in H$, 有

$$(E\xi, \eta) = (\xi, E\eta), \ E^2\xi = E\xi. \tag{14}$$

二投影算子 E_1, E_2, 如对任意 $\xi \in H$, 有

$$E_1E_2\xi = E_2E_1\xi = E_1\xi, \tag{15}$$

则记作 $E_1 \leqslant E_2$. 今设对每实数 λ, 存在一投影算子 $E(\lambda)$, 如果集 $\{E(\lambda), \lambda \in R_1\}$ 满足下列三条件，就称它为 **单位分解**:

(a) 如 $\lambda \leqslant \mu$, 则 $E(\lambda) \leqslant E(\mu)$;

(b) $E(\lambda + 0) = E(\lambda)$ (右连续性);

(c) [1] $E(-\infty) = 0, \ E(+\infty) = I$,

其中 $0\xi = 0(\text{a.s.}), I\xi = \xi(\text{a.s.})$.

对于任一有穷或无穷区间 Δ, 如下定义 $E(\Delta)$:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta = [\alpha, \beta]: \ E(\Delta) = E(\beta) - E(\alpha - 0); \\ &\Delta = (\alpha, \beta): \ E(\Delta) = E(\beta - 0) - E(\alpha); \\ &\Delta = (\alpha, \beta]: \ E(\Delta) = E(\beta) - E(\alpha); \\ &\Delta = [\alpha, \beta): \ E(\Delta) = E(\beta - 0) - E(\alpha - 0), \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

则可证 $E(\Delta)$ 也是投影算子，而且

$$E(\Delta)E(\Delta') = E(\Delta \cap \Delta'),$$

当 $\Delta\Delta' = \phi$ 时

$$E(\Delta)E(\Delta') = 0. \tag{17}$$

任意固定 $\xi \in H$ 而定义 $\xi_t = E(t)\xi$, 则 $\{\xi_t, t \in R_1\}$ 是正交增量过程. 事实上，对 $t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4$, 由 (14),(17)

$$\begin{aligned} (\xi_{t_4} - \xi_{t_3}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}) &= ((E(t_4) - E(t_3))\xi, (E(t_2) - E(t_1))\xi) \\ &= (E((t_3, t_4])\xi, E((t_1, t_2])\xi) \\ &= (\xi, E((t_3, t_4])E((t_1, t_2])\xi) = (\xi, 0) = 0. \end{aligned}$$

根据 (b), 这过程是均方意义下的右连续过程，故按 §8.2 定理 1 及其注 1, 知它在 $(R_1, \mathcal{B}_1)$ 上决定一随机测度 $Z_\xi(A), A \in \mathcal{B}_1$. 以 $F_\xi(A)$ 表此测度的均方测度，那么后者的广义分布函

[1] 在条件 (a) 下，如 $\lambda_n \uparrow \infty$(或 $\lambda_n \downarrow -\infty$), 则对每 $\xi \in H$, 存在 $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, E(\lambda_n)\xi$, 记此极限为 $E(+\infty)\xi$(或 $E(-\infty)\xi$), 它与 $\{\lambda_n\}$ 之选择无关，而且 $E(+\infty), E(-\infty)$ 也是投影算子. 当 $\lambda_n \uparrow \lambda$(或 $\lambda_n \downarrow \lambda$) 而 λ 有穷时类似结果也成立. 所得算子记为 $E(\lambda - 0)$(或 $E(\lambda + 0)$). 证见关肇直：泛函分析讲义， 1958,398 页. 以下有关泛函分析事实，无特别声明时均见此书.

数为

$$\begin{aligned}F_\xi(\lambda)=F_\xi((-\infty,\lambda])&=E|E((-\infty,\lambda])\xi|^2\\&=(E((-\infty,\lambda])\xi,E((-\infty,\lambda]\xi))\\&=(\xi,E((-\infty,\lambda]\xi)).\end{aligned}\tag{18}$$

总结上述，得

引理 1 对任一单位分解 $\{E(\lambda),\lambda\in R_1\}$ 及任一 $\xi\in H$, 在 $(R_1,\mathcal{B}_1,F_\xi)$ 上存在唯一随机测度 $Z_\xi(A),A\in\mathcal{B}_1$, 满足

$$Z_\xi((\lambda,\mu])=E((\lambda,\mu])\xi\quad(\lambda<\mu),\tag{19}$$

而 $F_\xi(\lambda)$ 则由 (18) 决定.

由 §8.2, 对 $f(\lambda)\in L^2(R_1,\mathcal{B}_1,F_\xi)$ 可以定义随机积分

$$\int_{R_1}f(\lambda)Z_\xi(d\lambda).\tag{20}$$

今从另一角度来考虑 (20): 固定 $\{E(\lambda),\lambda\in R_1\}$, 如 $f(\lambda)$ 属于一切 $L^2(R_1,\mathcal{B}_1,F_\xi)(\xi\in H)$, 则 (20) 对一切 $\xi\in H$ 有意义，于是可以定义变换 $\int_{R_1}f(\lambda)E(d\lambda)$:

$$\int_{R_1}f(\lambda)E(d\lambda)\cdot\xi=\int_{R_1}f(\lambda)Z_\xi(d\lambda),\tag{21}$$

它是把 H 变到 H 中的变换.

这样的 $f(\lambda)$ 中，特别重要的有二：

1° $f_1(\lambda)=\chi_A(\lambda)$, A 为 $\mathcal{B}_1$ 中任一集. 这时自然地记 $\int_{R_1}\chi_A(\lambda)E(d\lambda)$ 为 $E(A)$, 因而由 (21) [1]

$$E(A)\xi=\int_{R_1}\chi_A(\lambda)E(d\lambda)\cdot\xi=\int_{R_1}\chi_A Z_\xi(d\lambda)=Z_\xi(A).\tag{22}$$

2° $f_2(\lambda)=e^{it\lambda},t\in R_1$ 为常数. 这时由 (21)

$$\int_{R_1}e^{it\lambda}E(d\lambda)\cdot\xi=\int_{R_1}e^{it\lambda}Z_\xi(d\lambda).\tag{23}$$

至此已叙述完必要的预备知识. 注意，在上面所说的一切当中， H 当然可换为 H 中任一闭线性子空间 $\overline{\mathcal{M}}$, 因而可以得到把 $\overline{\mathcal{M}}$ 变到 $\overline{\mathcal{M}}$ 中的投影算子及单位分解等等. 下面还要用到

Stone **定理** 设 $\{T_t,t\in R_1\}$ 为定义在 $\overline{\mathcal{M}}$ 上的连续酉算子群，那么它必可展为

$$T_t=\int_{R_1}e^{it\lambda}E(d\lambda),\tag{24}$$

其中 $\{E(\lambda),\lambda\in R_1\}$ 为某单位分解，由 $\{T_t,t\in R_1\}$ 唯一决定.

现在可以重新证明 §8.3 定理 2 中关于均方连续弱平稳过程的谱展式如下：

[1] $E(A)$ 也是投影算子，证见上引讲义， 406 页.

设已给如此的过程 $\{\xi_t, t \in R\}$, 由定理 1 (ii), 存在 $\overline{L} = \overline{L}\{\xi_t, t \in R_1\}$ 上的唯一的连续酉算子群 $\{T_t, t \in R_1\}$, 使 (7) 成立. 由 (24) 及 (23) 得

$$\xi_t = T_t\xi_0 = \int_{R_1} e^{it\lambda} E(d\lambda) \cdot \xi_0 = \int_{R_1} e^{it\lambda} Z_{\xi_0}(d\lambda), \tag{25}$$

由谱展式的唯一性及 (22) 知 $Z_{\xi_0}(A) = E(A)\xi_0$ 是过程的随机测度.

反之, 设已给 H 中一单位分解 $\{E(\lambda), \lambda \in R_1\}$ 及一 $\xi \in H$. 定义

$$\xi_t = \int_{R_1} e^{it\lambda} E(d\lambda) \cdot \xi = \int_{R_1} e^{it\lambda} Z_\xi(d\lambda), \tag{26}$$

其中 $Z_\xi(A)(A \in \mathcal{B}_1)$ 是由引理 1 所决定的随机测度, 其均方测度为 $F_\xi(A)$, 则由 §8.2 D.2, 知

$$E\xi_{t+\tau}\overline{\xi}_t = \int_{R_1} e^{i\tau\lambda} F_\xi(d\lambda)$$

与 t 无关而且对 $\tau \in R_1$ 连续, 故由 (26) 定义的 $\{\xi_t, t \in R_1\}$ 是均方连续弱平稳过程.

对弱平稳序列不难类似地重新证明它的谱展式, 为此只要用定理 2(ii) 及泛函分析中的下列定理 (以代替 Stone 定理), 即

酉算子的谱分解定理 任一定义在 $\overline{\mathcal{M}}$ 上的酉算子 T 必可展为

$$T = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda} E(d\lambda), \tag{27}$$

其中的单位分解由 T 唯一决定, 而且满足条件

$$E(-\pi) = 0, \; E(\pi) = I. \tag{28}$$

总结以上所述, 并综合定理 1 与 §8.3 定理 2, 可见下面的四种观点是一致的:

1) 已给均方连续弱平稳过程 $\{\xi_t, t \in R_1\}$.

2) 已给 $(R_1, \mathcal{B}_1, F)$ 上随机测度 $Z(A), A \in \mathcal{B}_1$, 这里 $F(R_1) < \infty$.

3) 已给某 $\overline{\mathcal{M}}(\subset H)$ 中连续酉算子群 $\{T_t, t \in R_1\}$ 及某 $\xi_0 \in \overline{\mathcal{M}}$.

4) 已给某 $\overline{\mathcal{M}}(\subset H)$ 中单位分解 $E(A), A \in \mathcal{B}_1$ 及某 $\xi_0 \in \overline{\mathcal{M}}$.

这四种观点间的联系是

$$\xi_t = \int_{R_1} e^{it\lambda} Z(d\lambda) = T_t\xi_0 = \int_{R_1} e^{it\lambda} E(d\lambda) \cdot \xi_0;$$

$$\begin{aligned} \overline{L}\{\xi_t, t \in R_1\} &= \overline{L}\{Z(A), A \in \mathcal{B}_1\} = \overline{L}\{T_t\xi_0, t \in R_1\} \\ &= \overline{L}\{\int_{R_1} e^{it\lambda} E(d\lambda)\xi_0, t \in R_1\}. \end{aligned}$$

关于弱平稳序列也有类似结果, 不重复.

(三) 试指出由 (22) 所定义的算子 $E(A)$ 与 §8.4 中所述线性运算的关系. 设已给均方连续弱平稳过程 $\{\xi_t, t \in R_1\}$, 它通过自己的酉算子群 $\{T_t, t \in R_1\}$ 而唯一决定一单位分解 $\{E(\lambda), \lambda \in R_1\}$, 后者按 (22) 定义一变换 $E(A), A \in \mathcal{B}_1$ 任意固定. 由 (22) 知

$$E(A)\xi_0 = Z_{\xi_0}(A). \tag{29}$$

因而 $E(A)$ 把 ξ_0 变到过程的随机测度在 A 上的值 $Z_{\xi_0}(A)$. 试问 $E(A)$ 把 $\xi_t(t \in R_1)$ 又变到哪里去了呢？为了回答这问题，注意一方面由 (25) 得

$$\xi_{t+s} = \int_{R_1} e^{it\lambda} e^{is\lambda} Z_{\xi_0}(d\lambda); \tag{30}$$

另方面，象证明 (25) 一样，得

$$\xi_{t+s} = T_t \xi_s = \int_{R_1} e^{it\lambda} Z_{\xi_s}(d\lambda), \tag{31}$$

由于谱展式中随机测度的唯一性，比较 (30) 及 (31) 即得

$$Z_{\xi_s}(A) = \int_A e^{is\lambda} Z_{\xi_0}(d\lambda). \tag{32}$$

于是由 (22) 得

$$E(A)\xi_t = Z_{\xi_t}(A) = \int_A e^{it\lambda} Z_{\xi_0}(d\lambda), \tag{33}$$

右方值恰好与 §8.4(13) 右方值一致 (注意 $Z_{\xi_0}(A)$ 是过程的随机测度). 由此可见：$\{E(A)\xi_t, t \in R_1\}$ 是对 $\{\xi_t, t \in R_1\}$ 进行线性运算 $c(\lambda) = \chi_A(\lambda)$ 后所得的均方连续弱平稳过程；或者说，$\chi_A(\lambda)$- 运算与投影变换 $E(A)$ 一致.

§9.2. 弱平稳序列的 Wold 分解与线性预测

(一) 设 $\{\xi(n), n \in N\}$ 为弱平稳序列，记

$$\begin{aligned} H_\xi^n &= \overline{L}\{\xi_k, k \leqslant n\}, S_\xi = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} H_\xi^n, \\ H_\xi &= \overline{L}\{\xi_k, k < \infty\} = \overline{L}\{\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} H_\xi^n\}, \end{aligned} \tag{1}$$

这里 $\overline{L}\{\cdots\}$ 表括号中一切随机变量的线性闭包，收敛性用均方收敛. 如前所述，引入内积

$$(\xi, \eta) = E\xi\overline{\eta} \tag{2}$$

后，H_ξ^n, H_ξ 都成为 Hilbert 空间，而且显然

$$H_\xi^n \subset H_\xi^{n+1} \subset H_\xi. \tag{3}$$

以 R_ξ 表闭线性子空间 S_ξ 在 H_ξ 中的正交补集，此补集也是闭线性子空间 [1]，即

$$R_\xi = (\eta : \eta \in H_\xi, \eta \perp S_\xi) \tag{4}$$

("⊥" 的意义见 §8.3), 此关系也记为

$$H_\xi = R_\xi \oplus S_\xi \text{ 或 } R_\xi = H_\xi \ominus S_\xi. \tag{5}$$

[1] 参见上引讲义，124 页.

对任意元 $\eta \in H_\xi$, 必存在唯一的 $\eta_r \in R_\xi, \eta_s \in S_\xi$, 使

$$\eta = \eta_r + \eta_s, \tag{6}$$

分别称 η_r, η_s 为 η 在 R_ξ 及 S_ξ 上的 **投影** [1].

根据 R_ξ, S_ξ 可将弱平稳序列分类.

如 $R_\xi = 0$($0 = \{0\}$ 表只含 0 的单点集), 则称序列 $\{\xi_n, n \in N\}$ 为 **奇异** 的; 如 $R_\xi \neq 0$, 称为 **非奇异** 的; 非奇异序列称为 **规则** 的, 如 $S_\xi = 0$.

由 (6), 以 $\xi_r(n), \xi_s(n)$ 表 $\xi(n)$ 在 R_ξ, S_ξ 上的投影, 则

$$\xi(n) = \xi_r(n) + \xi_s(n) \ (n \in N). \tag{7}$$

引理 1 若弱平稳序列 $\{\xi(n), n \in N\}$ 非奇异, 则 $\{\xi_r(n), n \in N\}$ 与 $\{\xi_s(n), n \in N\}$ 分别是规则的与奇异的弱平稳序列; 此二序列正交:

$$(\xi_r(n), \xi_s(m)) = 0 \ (n, m \in N). \tag{8}$$

证 由于 $R_\xi \perp S_\xi$ 及 $\xi_r(n) \in R_\xi, \xi_s(m) \in S_\xi$ 故 (8) 是显然的.

以 T 表 $\{\xi_n, n \in N\}$ 所对应的酉算子, 则 T 及 T^{-1} 都把 S_ξ 变到自身. 为证此, 任取 $\eta \in S_\xi$, 则 $\eta \in H_\xi^n$(对一切 n). 因而 $T\eta \in H_\xi^{n+1}, T^{-1}\eta \in H_\xi^{n-1}$(对一切 n). 这表示 $T\eta \in S_\xi, T^{-1}\eta \in S_\xi$.

试证 T 及 T^{-1} 也都把 R_ξ 变到自身. 任取 $\eta \in R_\xi$, 令

$$T\eta = y_r + y_s \ (y_r \in R_\xi, y_s \in S_\xi). \tag{9}$$

由于 T 是酉算子, 故 $(T\eta, y_s) = (\eta, T^{-1}y_s)$. 由于 $\eta \in R_\xi$ 并根据上面已证明的事实, $T^{-1}y_s \in S_\xi$, 故

$$(y_r + y_s, y_s) = (T\eta, y_s) = (\eta, T^{-1}y_s) = 0. \tag{10}$$

然而 $(y_r, y_s) = 0$, 由 (10) 即得 $\|y_s\|^2 = 0$, 或 $y_s = 0$. 于是由 (9) 得 $T\eta = y_r \in R_\xi$, 即 T 把 R_ξ 变到自身. 类似可证 T^{-1} 也把 R_ξ 变到自身.

根据 (7) 得

$$\xi_r(n) + \xi_s(n) = \xi(n) = T^n\xi(0) = T^n\xi_r(0) + T^n\xi_s(0),$$

既然 $\xi_r(n), T^n\xi_r(0) \in R_\xi, \xi_s(n), T^n\xi_s(0) \in S_\xi$, 由 $\xi(n)$ 的投影的唯一性及上式即得

$$\xi_r(n) = T^n\xi_r(0); \ \xi_s(n) = T^n\xi_s(0). \tag{11}$$

再根据 §9.1 定理 2, 可见 $\{\xi_r(n), n \in N\}$ 及 $\{\xi_s(n), n \in N\}$ 都是弱平稳序列.

既然已证 $\xi_s(n) \in S_\xi$ (对一切 n), 故 $H_{\xi_s} \subset S_\xi$; 另方面, 注意 S_ξ 在 s_ξ 上的投影仍是 S_ξ, 故由 $S_\xi \subset H_\xi^n$ 得 $S_\xi \subset H_{\xi_s}^n$, 于是 $H_{\xi_s} \subset S_\xi \subset H_{\xi_s}^n \subset H_{\xi_s}$. 再由定义 $S_{\xi_s} = \bigcap\limits_{n=-\infty}^{\infty} H_{\xi_s}^n$, 即得

$$S_\xi = S_{\xi_s} = H_{\xi_s}^n = H_{\xi_s}, \ R_{\xi_s} = 0.$$

---

[1]这定义适用于任意 Hilbert 空间中任意两个正交的闭线性子空间.

这便证明了 $\{\xi_s(n), n \in N\}$ 是奇异的.

其次因对任意 n, 由上式有 $H_\xi^n = H_{\xi_r}^n \oplus S_\xi$, 又 $\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} H_\xi^n = S_\xi$, 故 $S_{\xi_r} = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} H_{\xi_r}^n = 0$; 从而 $R_{\xi_r} = H_{\xi_r}$. 注意 $R_\xi \oplus S_\xi = H_\xi = H_{\xi_r} \oplus H_{\xi_s}, S_\xi = H_{\xi_s}$, 故 $H_{\xi_r} = R_\xi$. 由假定 $R_\xi \neq 0$, 于是 $R_{\xi_r} \neq 0$ 而得证 $\{\xi_r(n), n \in N\}$ 规则. □

以下简记 H_{ξ_r} 为 H_r.

考虑非奇异情形, 即设 $R_\xi \neq 0$. 方才已证明, 此时 $\{\xi_r(n), n \in N\}$ 规则, 故 H_r^n 不能同时对一切 n 都重合于 H_r^{n-1}; 从而 [1] 可证对任一 $n, H_r^n \neq H_r^{n-1}$. 于是 $\xi_r(n) = \sigma(n) + \varphi(n)$, 其中 $\varphi(n) \in H_r^{n-1}$ 而 $\sigma(n) \perp H_r^{n-1}$, 并且空间 $H_r^n \ominus H_r^{n-1}$ 是由 $\sigma(n)$ 所产生的一维子空间, $\|\sigma(n)\| > 0$. 将 $\sigma(n)$ 规范化而令 $\psi(n) = \frac{\sigma(n)}{\|\sigma(n)\|}$ 因而 $\|\psi(n)\| = 1, \psi(n) \in H_r^n, \psi(n) \perp H_r^{n-1}$. 特别, $\psi(n) \perp \psi(m), n \neq m$. 此外 $\psi(n) \perp \xi_s(m), n, m \in N; \psi(n) \perp \xi(m), n > m$.

现在可将分解式深化. 注意, 如 $\{\xi(n), n \in N\}$ 是奇异的, 则由上述, $\xi(n) = \xi_s(n)$, 此情况过于简单, 故只要考虑非奇异的序列.

定理 1 设 $\{\xi(n), n \in N\}$ 为非奇异的弱平稳序列, 则 $\xi(n)$ 可分解为

$$\xi(n) = \xi_r(n) + \xi_s(n) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \psi(n-j) + \xi_s(n), \tag{12}$$

其中 $\{\xi_r(n), n \in N\}$ 是规则序列而 $\{\xi_s(n), n \in N\}$ 是奇异的. 又

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2 < \infty, \quad c_0 > 0, \\ &E\psi(n)\overline{\psi(m)} = \delta_{nm},\ E\psi(n)\overline{\xi_s(m)} = 0\ (n, m \in N), \\ &\psi(n) \in H_\xi^n, \psi(n) \perp H_\xi^{n-1},\ \xi_s(n) \in S_\xi. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

满足这些条件的 $\{c_n\}$ 与 $\{\psi(n)\}$ 是唯一的.

证 为证 (12), 由 (7) 及引理 1, 只要证

$$\xi_r(n) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \psi(n-j). \tag{14}$$

先设 $n = 0$. 如上所述

$$\xi_r(0) = \sigma(0) + \varphi_1(0) = c_0\psi(0) + \varphi_1(0)\ (c_0 = \|\sigma(0)\| > 0),$$

其中因

$$\varphi_1(0) \in H_r^{-1},\ 故\ \varphi_1(0) = c_1\psi(-1) + \varphi_2(0);$$

---

[1] 如对某 $n, H_r^n = H_r^{n-1}$, 则由 $\{\xi_r(n), n \in N\}$ 的弱平稳性, 此式对一切 n 正确. 此因: 由 $\underset{k\to\infty}{\text{l.i.m}} \sum_{i=1}^{l_k} a_i^{(k)} \xi(m_i^{(k)}) = \xi(n)$ $(m_i^{(k)} \leqslant n-1)$ 可得

$$\underset{k\to\infty}{\text{l.i.m}} \sum_{i=1}^{l_k} a_i^{(k)} \xi(m_i^{(k)} + 1) = \xi(n+1),$$

故 $H_r^{n+1} = H_r^n$. 类似可得 $H_r^{n-2} = H_r^{n-1}$, 于是诸 H_r^n(对一切 n) 重合.

其中因

$$\varphi_2(0)\in H_r^{-2},\ 故\ \varphi_2(0)=c_2\psi(-2)+\varphi_3(0);\cdots;$$

故

$$\xi_r(0)=c_0\psi(0)+c_1\psi(-1)+\cdots+c_n\psi(-n)+\varphi_{n+1}(0), \tag{15}$$

而 $\varphi_{n+1}(0)\in H_r^{-(n+1)}$. 由于 $\{\psi(-k),\varphi_{n+1}(0),0\leqslant k\leqslant n\}$ 互相正交，故

$$\sum_{k=0}^{n}|c_k|^2\leqslant\|\xi_r(0)\|^2,\ \sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2<\infty,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k\psi(-k)\ 均方收敛.$$

其次，$\xi_r(0)-\sum\limits_{k=0}^{n}c_k\psi(-k)=\varphi_{n+1}(0)\in H_r^{-(n+1)}$; 又

$$E|\varphi_{n+m+1}(0)-\varphi_{n+1}(0)|^2=\sum_{k=n+1}^{n+m}|c_k|^2\to 0\ (n\to\infty),$$

故存在 $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\,\varphi_n(0)\in H_r^{-m}$ (对一切 m). 既然 $\bigcap\limits_{n=-\infty}^{\infty}H_r^{-n}=0$, 故 $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\,\varphi_n(0)=0$, 从而得证 (14) 对 $n=0$ 正确.

为证 (14) 对一般的 n 正确，先注意由

$$\sigma(n)+\varphi(n)=\xi_r(n)=T^n\xi_r(0)=T^n\sigma(0)+T^n\varphi(0)$$

及 $\sigma(n),T^n\sigma(0)\perp H_r^{n-1},\varphi(n),T^n\varphi(0)\in H_r^{n-1}$, 得 $\sigma(n)=T^n\sigma(0)$. 既然 T 是等距算子，我们有

$$\psi(n)=T^n\psi(0). \tag{16}$$

这说明也 $\{\psi(n),n\in N\}$ 也是弱平稳的 (其实还是规范化正交序列). 以 T^m 作用于 (15) 两方，利用 (11),(16) 得

$$\xi_r(m)=c_0\psi(m)+c_1\psi(m-1)+\cdots+c_n\psi(m-n)+T^m\varphi_{n+1}(0),$$

再注意 $\|T^m\varphi_{n+1}(0)\|=\|\varphi_{n+1}(0)\|\to 0(n\to\infty)$, 即得证 (14).

(13) 中除 $\psi(n)\in H_\xi^n,\psi(n)\perp H_\xi^{n-1}$ 未证外，其余都已证明. 由于 $H_\xi^n\ni\xi(n)=\xi_r(n)+\xi_s(n)$, 而 $\xi_s(n)\in S_\xi\subset H_\xi^n$, 故 $\xi_r(n)\in H_\xi^n$. 由此即得 $H_r^n\subset H_\xi^n$. 既然 $\psi(n)\in H_r^n$, 我们有 $\psi(n)\in H_\xi^n$. 其次，由 $\psi(n)\perp H_r^{n-1}$ 及 $\psi(n)\perp\xi_s(m)$ 得证 $\psi(n)\perp H_\xi^{n-1}$.

剩下只要证满足 (13) 的 $\{c_n\}$ 与 $\{\psi(n)\}$ 与的唯一性. 设 $\xi(n)$ 已分解为

$$\xi(n)=\sum_{i=0}^{\infty}c_j\psi(n-j)+\xi_s(n). \tag{17}$$

以 $\overline{\psi(n-j)}$ 乘两方，取数学期望，由 (13) 得

$$c_j=E\xi(n)\overline{\psi(n-j)}. \tag{18}$$

以 $\varphi_{n-v\,v}$ 表 ξ_n 在 H_ξ^{n-v} 上的投影，试证

$$\varphi_{n-v\,v} = \sum_{j=v}^{\infty} c_j \psi(n-j) + \xi_s(n). \tag{19}$$

实际上，由 (13) 知 $\varphi_{n-v\,v} \in H_\xi^{n-v}$, 而且

$$\xi_n - \varphi_{n-v\,v} = \sum_{j=0}^{v-1} c_j \psi(n-j) \perp H_\xi^{n-v}, \tag{20}$$

这便证明了 (19). 注意 (20) 左方为序列 $\{\xi_n, n \in N\}$ 决定. 特别 $c_0\psi(n) = \xi_n - \varphi_{n-1\,1}$ 由序列本身唯一决定. 然而 $|c_0|^2 = E|\xi_n - \varphi_{n-1\,1}|^2 > 0$, 否则 $\xi_n = \varphi_{n-1\,1} \in H_\xi^{n-1}, H_\xi^n = H_\xi^{n-1}$, 于是 $H_\xi = S_\xi, R_\xi = 0$ 而与序列为非奇异的假定矛盾，又由假定 $c_0 > 0$ 为正，从而 c_0 以及 $\psi(n)$ 都唯一决定 (对 $\psi(n)$ 允许在一零测集上自由取值). 再根据 (18) 便得证 $c_j (j > 0)$ 的唯一性. □

注 1 公式 (7) 以及 (12) 称为弱平稳序列的 Wold 分解. 这分解的几何意义非常明显. 事实上，将 H_ξ 分解为互垂空间 R_ξ, S_ξ 的直积后， $\xi(n)$ 便分解为在此二空间上投影的和. 然而在 R_ξ 上的投影 $\xi_r(n)$, 又可按此空间中规范正交系 $\{\psi(n)\}$ 展开为 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j\psi(n-j)$. 至于 $\xi_s(n)$ 则可解释为 ξ_n 在无穷远的分量. 直观上可比喻如下：以平面比作 H_ξ, x 轴， y 轴 (正交轴) 比作 R_ξ, S_ξ, 平面矢量比作 ξ_n, 矢量在此二轴上的投影比作 $\xi_r(n)$ 与 $\xi_s(n)$, 然后再设想 x 轴为无穷维空间.

注 2. 由定理 1 的证明可见

$$H_\xi \supset H_r = \overline{L}\{\psi(n), n \in N\}, \quad H_\xi \supset S_\xi. \tag{21}$$

其次， (12) 中后式尚可改写为

$$\xi(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} c_{n-k}\psi(k) + \xi_s(n). \tag{22}$$

(二) 根据 (21) 可见三弱平稳序列 $\psi(n), \xi_r(n)$ 及 $\xi_s(n), n \in N$, 都是自 $\{\xi_n, n \in N\}$ 经某三个线性运算得来. 以 $c_\psi(\lambda), c_r(\lambda)$ 及 $c_s(\lambda)$ 分别表此三运算的核 (见 §8.4), 因而如 $\{\xi_n, n \in N\}$ 的谱展式为

$$\xi_n = \int_\Pi e^{in\lambda} Z(d\lambda), \tag{23}$$

$\Pi = [-\pi, \pi]$, 则此三序列的谱展式应为

$$\left.\begin{aligned} \psi(n) &= \int_\Pi e^{in\lambda} c_\psi(\lambda) Z(d\lambda), \\ \xi_r(n) &= \int_\Pi e^{in\lambda} c_r(\lambda) Z(d\lambda), \\ \xi_s(n) &= \int_\Pi e^{in\lambda} c_s(\lambda) Z(d\lambda). \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

试求 $c_\psi(\lambda), c_r(\lambda), c_s(\lambda)$. 为此，我们从研究这三序列的谱测度 (或谱函数)F_ψ, F_r 及 F_s 开始.

引理 2 设 $\{\psi(n), n\in N\}$ 为任意规范化正交序列，即满足 $E\psi(n)\overline{\psi(m)}=\delta_{nm}$, 又 $\left\{y_n=\sum\limits_{j=0}^{\infty}c_j\psi(n-j), n\in N\right\}$ 是单边滑动和序列， $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|c_j|^2<\infty$, 则它们的谱测度 F_ψ, F_y 都绝对连续，分别有谱密度为

$$f_\psi(\lambda)=\frac{1}{2\pi}, \tag{25}$$

$$f_y(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\left|\sum_{j=0}^{\infty}c_je^{-ij\lambda}\right|^2\ (\lambda\in\Pi) \tag{26}$$

(参看 §8.1 例 3).

证 由于 $\{\psi(n), n\in N\}$ 的相关函数为

$$B_\psi(\tau)=\begin{cases}1, & \tau=0,\\ 0, & \tau\neq 0.\end{cases} \tag{27}$$

故得

$$f_\psi(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda\tau}B_\psi(\tau)=\frac{1}{2\pi}. \tag{28}$$

其次，由 §8.1 (26) 得

$$B_y(\tau)=\int_\Pi e^{i\tau\lambda}\cdot\frac{1}{2\pi}\left|\sum_{j=0}^{\infty}c_je^{-ij\lambda}\right|^2d\lambda,$$

从而得证 (26). □

由此引理可见，(12) 中的 $\psi(n), \xi_r(n)(n\in N)$ 都有绝对连续谱测度，它们的谱密度 $f_\psi(\lambda)$ 及 $f_r(\lambda)$ 分别由 (25),(26) 右方给出. 至于 F_s 则有

引理 3 存在具有勒贝格测度为 0 的集 $A(\subset\Pi)$, 使

$$F_s(A)=F_S(\Pi). \tag{29}$$

证 以 Z_ψ, Z_r, Z_s 分别表 $\psi(n), \xi_r(n), \xi_s(n)$ 的随机测度，由 (12)

$$\int_\Pi e^{in\lambda}Z(d\lambda)=\xi(n)=\int_\Pi e^{in\lambda}\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty}c_je^{-ij\lambda}\right)Z_\psi(d\lambda)+Z_s(d\lambda)\right],$$

既然谱展式中随机测度唯一，故

$$Z(A)=\int_A\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty}c_je^{-ij\lambda}\right)Z_\psi(d\lambda)+Z_s(d\lambda)\right].$$

由 (24) 得

$$\begin{aligned}\int_\Pi e^{in\lambda}Z_\psi(d\lambda)=\psi(n)&=\int_\Pi e^{in\lambda}c_\psi(\lambda)Z(d\lambda)\\&=\int_\Pi e^{in\lambda}c_\psi(\lambda)\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty}c_je^{-ij\lambda}\right)Z_\psi(d\lambda)+Z_s(d\lambda)\right].\end{aligned} \tag{30}$$

注意

$$\overline{L}\{Z_\psi(A), A\in\mathcal{B}_1\}=\overline{L}\{\psi(n), n\in N\}=H_r\subset R_\xi,$$
$$\overline{L}\{Z_s(A), A\in\mathcal{B}_1\}=\overline{L}\{\xi_s(n), n\in N\}\subset S_\xi,$$

因此二随机测度 Z_ψ, Z_s 相互正交. 由 (30) 及 (25) 得

$$\begin{aligned}0&=E\left|\int_\Pi e^{in\lambda}\left[1-c_\psi(\lambda)\sum_{j=0}^\infty c_je^{-ij\lambda}\right]Z\psi(d\lambda)-\int_\Pi e^{in\lambda}c_\psi(\lambda)Z_s(d\lambda)\right|^2\\&=\int_\Pi\left|1-c_\psi(\lambda)\sum_{j-0}^\infty c_je^{-ij\lambda}\right|^2\frac{d\lambda}{2\pi}+\int_\Pi|c_\psi(\lambda)|^2F_s(d\lambda),\end{aligned}$$

因此

$$c_\psi(\lambda)=\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^\infty c_je^{-ij\lambda}}\ (\text{a.s., 勒贝格测度})\tag{31}$$

$$c_\psi(\lambda)=0\quad(\text{a.s.,}F_s-\text{测度}).\tag{32}$$

为了使此二式可能同时成立，必须存在一勒贝格测度为 0 的集 A, 使 (29) 成立，否则便会产生矛盾. □

(29) 表示，谱测度 F_s 是奇异的.

现在可以解答上面的问题.

定理 2 关于 $\{\xi_n, n\in N\}$ 的谱测度 F 几乎处处有

$$c_\psi(\lambda)=\chi_{\overline{A}}(\lambda)/\sum_{j=0}^\infty c_je^{-ij\lambda},\tag{33}$$

$$c_r(\lambda)=\chi_{\overline{A}}(\lambda),\ c_s(\lambda)=\chi_A(\lambda)\quad(\lambda\in\Pi).\tag{34}$$

这里 A 满足 (29),χ_A 为 A 的示性函数， $\overline{A}=\Pi\setminus A$.

证 首先注意: $\widetilde{c}(\lambda), c(\lambda)$ 是同一线性运算的核的充分与必要条件是 $c(\lambda)=\widetilde{c}(\lambda)$, (a.s.$-F$). 此由

$$0=E\left|\int_\Pi e^{in\lambda}(c(\lambda)-\widetilde{c}(\lambda))Z(d\lambda)\right|^2=\int_\Pi|c(\lambda)-\widetilde{c}(\lambda)|^2F(d\lambda)$$

即得. 其次证

$$F(B)=F_r(B)+F_s(B)\ \ (B\in\Pi\mathcal{B}_1).\tag{35}$$

实际上，由 $\xi(n)=\xi_r(n)+\xi_s(n)$ 及 $\xi_r(n)\perp\xi_s(n)$, 立得 $B_\xi(\tau)=B_r(\tau)+B_s(\tau)$, 写出这些相关函数的谱展式，并利用谱测度的唯一性，比较所得展式的两方的测度后，便得到 (35).

由 (35) 可见，把 $\xi(n)$ 分解为 $\xi_r(n)$ 与 $\xi_s(n)$ 对应于把 F 分解为绝对连续部分 F_r 与奇异及跳跃部分 F_s.

考虑函数 $\widetilde{c}_\psi(\lambda)=\chi_{\overline{A}}(\lambda)\Big/\sum\limits_{j=0}^\infty c_je^{-ij\lambda}$, 显然，它满足 (31),(32). 今设 $c_\psi(\lambda)$ 为任一满足 (31),(32) 的可测函数，由于 F_r 绝对连续，可见它关于 F_r 几乎处处等于 $\widetilde{c}_\psi(\lambda)$; 对 F_s 也如

此. 故由 (35) 得

$$F(c_\psi(\lambda) \neq \widetilde{c}_\psi(\lambda)) = F_r(c_\psi(\lambda) \neq \widetilde{c}_\psi(\lambda)) + F_s(c_\psi(\lambda) \neq \widetilde{c}_\psi(\lambda)) = 0, \tag{36}$$

这证明了 (33). 由 (14) 及 (33) 即得 (34) 中前式. 将 (7) 中诸序列谱展开，并以此前式代入，便得 (34) 中后式. □

(三) 设 $\{\xi_n, n \in N\}$ 为弱平稳序列，我们仍然采用上段的记号 H_ξ^n, H_ξ 等等，由于本节以下只出现一个序列，故下标 ξ 没有必要而简写 H_ξ^n, H_ξ 为 H^n, H 等等. 现在来叙述预测理论.

预测问题的直观想法如下：固定整数 n 及 $v(>0)$，试根据已观察到的值 $\xi_{n-N}, \xi_{n-N+1}, \cdots, \xi_n$，以估计 ξ_{n+v}，这里 N 是非负整数. 换句话说，应该选择一个 $N+1$ 元函数 f，使 ξ_{n+v} 与 $f(\xi_{n-N}, \cdots, \xi_n)$ 在一定意义下最为接近. 所谓"一定意义"可以有多种解释，随具体问题的需要而定. 例如可理解为

$$\text{绝对差：} \quad |\xi_{n+v} - f(\xi_{n-N}, \cdots, \xi_n)|; \tag{37}$$

$$\text{方差：} \quad |\xi_{n+v} - f(\xi_{n-N}, \cdots, \xi_n)|^2; \tag{38}$$

$$\text{均方差：} \quad E|\xi_{n+v} - f(\xi_{n-N}, \cdots, \xi_n)|^2; \tag{39}$$

等等. 由于实际中常常根据多组观察来进行预测，也由于弱平稳序列的定义中仅涉及二次矩，所以我们自然选择均方差的大小来标志接近程序. 这便引导到问题的下列严格叙述：

考虑随机变量的集

$$\mathcal{F}(n, N) = (f(\omega) : f\text{为}\mathcal{F}\{\xi_{n-N}, \cdots, \xi_n\}\text{可测，而且}E|f|^2 < \infty), \tag{40}$$

试求 $g(\omega) \in \mathcal{F}(n, N)$，使

$$E|\xi_{n+v} - g|^2 = \inf_{f \in \mathcal{F}(n,N)} E|\xi_{n+v} - f|^2, \tag{41}$$

亦即要求使 $E|\xi_{n+v} - f|^2$ 达到下确界的 $g(\omega)$.

这样的 g 是否存在？如存在又是否唯一？

最好把上述问题用 Hilbert 空间的语言来叙述，答案就清楚了. 全体二级矩有穷的随机变量，如我们多次看到的，构成一 Hilbert 空间，显然 $\mathcal{F}(n, N)$ 是它的闭线性子空间. 根据 Hilbert 空间的一般理论[1]：ξ_{n+v} 在 $\mathcal{F}(n, N)$ 上的投影 (或称 **垂足**) g 是唯一的，而且是唯一的满足 (41) 和 $g \in \mathcal{F}(n, N)$ 的元；此外，g 由下列二条件决定：

$$g \in \mathcal{F}(n, N), \tag{42}$$

$$(\xi_{n+v} - g) \perp \mathcal{F}(n, N). \tag{43}$$

以上所述的是根据有穷个 (即 $N+1$ 个) 过去的量以预测将来. 当然也可根据全部过去来预测 ξ_{n+v}，这时只要在 (40),(41) 中，把 $\mathcal{F}(n, N)$ 换为 $\mathcal{F}(n)(= \mathcal{F}(n, \infty))$ 便得到相应问题的

[1] 见上引讲义 124-125 页.

准确数学提法. 以后只考虑根据全部过去的预测, 因为有穷情况比较简单. 称 g 为 ξ_{n+v} **关于** $\xi_n, \xi_{n-1}, \cdots$ **的预测量**, 它是 ω 的函数, 与 n, v 有关, 即 $g = g_{n\,v}(\omega)$.

定理 3 [1] $g_{n\,v}(\omega) = E(\xi_{n+v}|\mathcal{F}(n))$ (a.s.).

证 令 $\widetilde{g} = E(\mathrm{Re}\,\xi_{n+v}|\mathcal{F}(n))$, 即 ξ_{n+v} 的实部关于 $\mathcal{F}(n)$ 中全体变量的实虚部分所产生的 σ 代数 $\mathcal{F}\{\mathcal{F}(n)\}$ 的条件期望. 显然 $\widetilde{g}$ 为 $\mathcal{F}\{\mathcal{F}(n)\}$ 可测. 由 §1.4 引理 2

$$E|\widetilde{g}|^2 \leqslant E\{E[|\mathrm{Re}\,\xi_{n+v}|^2|\mathcal{F}(n)]\} = E|\mathrm{Re}\,\xi_{n+v}|^2 < \infty, \tag{44}$$

即知 $\widetilde{g}$ 满足 (42).(其中 $\mathcal{F}(n, N)$ 换成 $\mathcal{F}(n)$). 任取 $f \in \mathcal{F}(n)$, 则

$$\begin{aligned} &E[\mathrm{Re}\,\xi_{n+v} - E(\mathrm{Re}\,\xi_{n+v}|\mathcal{F}(n))]\overline{f} \\ &= E\mathrm{Re}\,\xi_{n+v}\overline{f} - E[E(\mathrm{Re}\,\xi_{n+v}\overline{f}|\mathcal{F}(n))] \\ &= E\mathrm{Re}\,\xi_{n+v}\overline{f} - E\mathrm{Re}\,\xi_{n+v}\overline{f} = 0. \end{aligned}$$

从而 (43) 对 $\widetilde{g}$ 也成立. 对虚部进行类似讨论, 即知 $E(\xi_{n+v}|\mathcal{F}(n))$ 满足 (42),(43)(其中 $\mathcal{F}(n, N)$ 换为 $\mathcal{F}(n)$). □

注 3. 上面的证明中未用到弱平稳性, 而且 $\mathcal{F}(n)$ 可换为任何一个二级矩随机变量的集.

(四) 定理 3 给出了预测问题理论上的解答, 然而要实际地写出 $g_{n\,v}(\omega)$ 的表达式时, 却感到很大困难. 于是退而缩小可取函数类 $\mathcal{F}(n)$ 到 H^n 以考虑线性预测, 即要求 $\varphi_{n\,v}(\omega)$ 使

$$\varphi_{n\,v} \in H^n; \tag{45}$$

$$E|\xi_{n+v} - \varphi_{n\,v}|^2 = \inf_{f \in H^n} E|\xi_{n+v} - f|^2. \tag{46}$$

如同上述, 这问题等价于求 ξ_{n+v} 在 H^n 中的投影 $\varphi_{n\,v}$. 后者由下列二条件决定:

$$\varphi_{n\,v} \in H^n; \tag{47}$$

$$(\xi_{n+v} - \varphi_{n\,v}) \perp H^n. \tag{48}$$

我们自然还关心最小误差

$$\sigma_v^2 = E|\xi_{n+v} - \varphi_{n\,v}|^2, \tag{49}$$

表面上 σ_v^2 似乎依赖于 n, 下面会证明 σ_v^2 与 n 无关. 在线性预测理论中, 重要的问题是求 $\varphi_{n\,v}$ 及 σ_v^2. 利用 (一),(二) 中的结果与记号, 可证

定理 4 对非奇异的弱平稳序列 $\{\xi_n, n \in N\}$

[1] 如 $\eta = \eta_1 + i\eta_2$, 定义 $E(\eta|\mathcal{B}) = E(\eta_1|\mathcal{B}) + iE(\eta_2|\mathcal{B})$. 注意, 显然有 $\mathcal{F}\{\xi_n, \xi_{n-1}, \cdots\} = \mathcal{F}\{\mathcal{F}(n)\}$, 故此式也可写为:

$$g_{n\,v}(\omega) = E(\xi_{n+v}|\xi_n, \xi_{n-1}, \cdots) \text{ (a.s.)}.$$

$$\varphi_{n\,v} = \sum_{j=v}^{\infty} c_j \psi(n+v-j) + \xi_s(n+v)$$

$$= \int_{\Pi} e^{in\lambda} \left[\frac{\sum\limits_{j=v}^{\infty} c_j e^{i(v-j)\lambda} \chi_{\overline{A}}(\lambda)}{\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j e^{-ij\lambda}} + e^{iv\lambda} \chi_A(\lambda) \right] Z(d\lambda); \tag{50}$$

$$\sigma_v^2 = \sum_{j=0}^{v-1} |c_j|^2; \tag{51}$$

$$\lim_{v \to \infty} \sigma_v^2 = E|\xi_r(n)|^2 > 0. \tag{52}$$

证 根据定理 1, 并回忆 (13) 中的 $H_\xi^n = H^n$, $S_\xi = \bigcap\limits_{n=-\infty}^{\infty} H^n$, 可见 $\widetilde{\varphi}_{n\,v} = \sum\limits_{j=v}^{\infty} c_j \varphi(n+v-j) + \xi_s(n+v) \in H^n$, 而且 $\xi_{n+v} - \widetilde{\varphi}_{n\,v} = \sum\limits_{j=0}^{v-1} c_j \psi(n+v-j) \perp H^n$, 故得证 $\widetilde{\psi}_{n\,v}$ 满足 (47),(48), 从而 $\varphi_{n\,v} = \widetilde{\varphi}_{n\,v}$. 再利用 (33),(34) 便完全证明了 (50). 既然按 (13) 知 $\{\psi(n)\}$ 为规范化正交序列, 故

$$\sigma_v^2 = E|\xi_{n+v} - \varphi_{n\,v}|^2 = E\left|\sum_{j=0}^{v-1} c_j \psi(n+v-j)\right|^2 = \sum_{j=0}^{v-1} |c_j|^2. \tag{53}$$

由此式可见 $\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2 \leqslant \cdots$, $\sigma_1^2 \geqslant c_0^2 > 0$.

$$\lim_{v \to \infty} \sigma_v^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2 = E\left|\sum_{j=0}^{\infty} c_j \psi(n-j)\right|^2 = E|\xi_r(n)|^2. \quad \square$$

定理 4 完全解决了非奇异序列的预测问题. 至于奇异序列, 则因 $R(=R_\xi) = 0, H = S = \bigcap\limits_{n=-\infty}^{\infty} H^n$, 可见 $H^n = H^{n+v}$, 故 $\xi_{n+v} \in H^n$,

$$\sigma_v^2 = \inf_{f \in H^n} E|\xi_{n+v} - f|^2 = 0 \quad (v = 1, 2, \cdots). \tag{54}$$

这说明: 对奇异序列, $\sigma_v^2 \equiv 0$; 或者说, 预测是完全精确的.

另一极端是规则序列, 它的均方误差的极限达到最大值. 为了说明这点, 先注意对任意弱平稳序列, 由于 $(\xi_{n+v} - \varphi_{n\,v}) \perp \varphi_{n\,v}$, 有

$$\begin{aligned} \sigma_v^2 &= E|\xi_{n+v} - \varphi_{n\,v}|^2 \leqslant E|\xi_{n+v} - \varphi_{n\,v}|^2 + E|\varphi_{n\,v}|^2 \\ &= E|\xi_{n+v} - \varphi_{n\,v} + \varphi_{n\,v}|^2 = E|\xi_{n+v}|^2 = E|\xi_0|^2. \end{aligned} \tag{55}$$

故 $\lim\limits_{v \to \infty} \sigma_v^2 \leqslant E|\xi_0|^2$. 如果 $\{\xi_n, n \in N\}$ 是规则的, 则 $\xi_n = \xi_r(n)$, 从而 (52) 化为

$$\lim_{v \to \infty} \sigma_v^2 = E|\xi(n)|^2 = E|\xi_0|^2 > 0. \tag{56}$$

对于一般非奇异序列，(52) 表示，上式左方极限等于此序列的规则部分的均方值.

§9.3. 平稳正确态过程

(一) 设 $\{\xi_t, t\in T\}$ 为正态过程. 本节中，如无特别声明，我们总假定：

1° $E\xi_t = 0\ (t\in T)$.

2° ξ_t 取实数值.

这些条件不再重述.

对正态过程，最好把 ξ_t 关于 $\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n}$ 的线性预测量 (即 ξ_t 在 $\overline{L}\{\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n}\}$ 上的投影) 记为 $\widetilde{E}(\xi_t|\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n})$. 理由是：对这类过程，我们有

定理 1 $E(\xi_t|\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n}) = \widetilde{E}(\xi_t|\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n})$ (a.s.).

证 取 $m(\leqslant n)$ 个随机变量 $e_1,\cdots,e_m$, 使满足

a. 每个 e_i 是 $\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_m}$ 的线性组合；

b. $Ee_ie_j = \delta_{ij}$;

c. 每个 ξ_{t_i} 是 $e_1,\cdots,e_m$ 的线性组合， $i=1,\cdots,n$. 这样的 $\{e_i\}$ 譬如说，可用下法找到：如果 ξ_{t_j} 等于 0 或者是 $\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_{j-1}}$ 的线性组合，那么就不考虑 ξ_{t_j}. 剩下的 ξ_{t_j} 设有 m 个，不妨就设为 $\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_m}$. 取 $e_1 = \xi_{t_1}/E|\xi_{t_1}|^2$, $E|\xi_{t_1}|^2 > 0$(否则 $\xi_{t_1} = 0$, 而我们已把它排出), 如 $e_1,\cdots,e_{k-1}$ 已取定，则令 $e_k = g_k/\|g_k\|$, 其中 $g_k = \xi_{t_k} - \sum\limits_{i=1}^{k-1}(E\xi_{t_k}e_i)e_i$. 由于 $\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_m}$ 线性无关，而且 e_i 是 $\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_i}$ 线性组合，故 $g_k\neq 0$. 不难验证， $\{e_i\}$ 满足 a,b,c.

令 $\beta_i = E\xi_te_i, i=1,\cdots,m$. 试证

$$E\left|\xi_t - \sum_{i=1}^m \beta_ie_i\right|^2 = \inf_f E|\xi_t - f|^2, \tag{1}$$

其中 inf 对 $f\in\mathcal{M}$ 而取，而

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= (f(\omega): f\text{为}\mathcal{F}\{\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n}\}\text{可测}; E|f|^2<\infty)\\ &= (f(\omega): f\text{为}\mathcal{F}\{e_1,\cdots,e_m\}\text{可测}; E|f|^2<\infty).\end{aligned}$$

如果能证明 (1), 那么便证明了 ξ_t 关于 $\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n}$ 的预测量是 $e_1,\cdots,e_m$ 的，因而也是 $\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n}$ 的线性函数 $\sum\limits_{i=1}^m\beta_ie_i$, 后者显然也是 ξ_t 关于 $\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n}$ 的线性预测量，这样便证明了两个预测量的重合. 再利用 §9.2 定理 3 即得定理结论.

为证 (1) 先注意

$$E\left(\xi_t - \sum_{i=1}^m\beta_ie_i\right)e_j = 0\ (j=1,\cdots,m) \tag{2}$$

既然 $\xi_t - \sum\limits_{i=1}^m\beta_ie_i$ 及 e_j 都有正态分布，由它们的不相关性可得独立性，故 $\xi_t - \sum\limits_{i=1}^m\beta_ie_i$ 与

$e_j(j=1,\cdots,m)$ 独立，从而也与 f 独立．于是

$$
\begin{aligned}
E|\xi_t-f|^2&=E\left|\left(\xi_t-\sum_{i=1}^m\beta_ie_i\right)+\left(\sum_{i=1}^m\beta_ie_i-f\right)\right|^2\\
&=E\left|\xi_t-\sum_{i=1}^m\beta_ie_i\right|^2+E\left|\sum_{i=1}^m\beta_ie_i-f\right|^2,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

最后一等号成立是由于

$$
E\left(\xi_t-\sum_{i=1}^m\beta_ie_i\right)=0. \tag{4}
$$

由 (3) 即得证 (1). □

重复一次：在上述证明过程中，我们附带证明了： ξ_t 关于 $\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n}$ 的预测量与线性预测量相等，它们重合于 $\sum\limits_{i=1}^m\beta_ie_i$.

现在来研究平稳正态过程．我们早已知道 (§8.1), 在条件 1°, 2° 下，正态过程是弱平稳 (因而也是平稳) 过程的充分与必要条件是相关函数 $E\xi_{t+\tau}\xi_t=B(\tau)$ 与 t 无关．

定理 2 对可分的平稳正态过程 $\{\xi_t,t\in R_1\}$, 如果存在常数 $\varepsilon>0,c\geqslant 0$, 使

$$
|B(\tau)-B(0)|\leqslant c|\tau|^\varepsilon, \tag{5}
$$

则它的样本函数以概率 1 连续．

证 这是 §3.2 系 3 的直接推论． □

为使 (5) 满足，例如，只要 $B(\tau)$ 在 0 点可导．

定理 3 设 $\{\xi_t,t\in R_1\}$ 是均方连续 Borel 可测的平稳正态过程，则它为遍历的充分与必要条件是：谱函数 $F(\lambda)$ 是连续函数．

证 如果 $\xi_t\equiv 0$, 定理是显然的．故以下不考虑退化情形．不妨设 $E|\xi_t|^2=1$. 令

$$
B(\tau)=\int_{R_1}e^{i\tau\lambda}F(d\lambda),\ B(0)=1 \tag{6}
$$

$\{\xi_t,t\in R_1\}$ 对应的保测变换记为 $T_t,t\in R_1$.

充分性：设 S 为不变集，对 $\varepsilon>0$, 取柱集

$$
C=\{\omega:(\xi_{\tau_1},\cdots,\xi_{\tau_n})\in B\},\ B\in\mathcal{B}_n,
$$

使 $P(C\Delta S)<\varepsilon$. 于是

$$
\begin{aligned}
P(C\cap T_tC)=&P(\{(\xi_{\tau_1},\cdots,\xi_{\tau_n})\in B\}\cap\{(\xi_{t+\tau_1},\cdots,\xi_{t+\tau_n})\in B\})\\
=&\frac{|\Lambda(t)|^{-\frac12}}{(2\pi)^{2n}}\underset{(x_1,\cdots,x_n)\in B}{\int\cdots\int}\ \underset{(x_{n+1},\cdots,x_{2n})\in B}{\int\cdots\int}e^{-\frac12Q(x)}dx_1\cdots dx_{2n},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

其中

$$\Lambda(t)=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & B(\tau_1-\tau_2) & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & D(t) \\ B(\tau_n-\tau_1) & B(\tau_n-\tau_2) & \cdots & 1 & \\ \hline B(t) & B(\tau_1+t-\tau_2) & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & & & A \\ B(\tau_n+t-\tau_1) & B(\tau_n+t-\tau_2) & \cdots & \cdots & \end{array}\right]$$

$$=\begin{pmatrix} A & D(t) \\ D(t)' & A \end{pmatrix}; \tag{8}$$

$$Q(x)=(x_1,\cdots,x_{2n})\Lambda(t)^{-1}(x_1,\cdots,x_{2n})',$$

这里不难看出 $\Lambda(t)^{-1}$ 的存在. 把一切 $\{\tau_i-\tau_j\}$ 记成 $t_1,t_2.\cdots,t_N$, 则

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sum_{i=1}^{N}|B(t_i+t)|^2dt=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sum_{i=1}^{N}\int_{R_1}\int_{R_1}e^{i(t_i+t)\lambda-i(t_i+t)\mu}F(d\lambda)F(d\mu)dt$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\int_{R_1}\int_{R_1}\frac{e^{i(t_i+T)(\lambda-\mu)}-e^{i(t_i-T)(\lambda-\mu)}}{2Ti(\lambda-\mu)}F(d\lambda)F(d\mu), \tag{9}$$

其中积分序可改变是由于绝对可积性. 令 $T\to\infty$, 上式右方趋于

$$N\cdot\int\int_{\lambda=\mu}F(d\lambda)F(d\mu)=N\cdot\sum_{\lambda_i}[F(\lambda_i+0)-F(\lambda_i-0)]^2,$$

$\sum$ 对 $F(\lambda)$ 的一切断点 λ_i 进行. 但由假定 $F(\lambda)$ 连续，故

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sum_{i=1}^{N}|B(t_i+t)|^2dt=0,$$

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\sum_{i=1}^{N}|B(t_i+t)|^2dt=0,$$

于是存在子列 t_v, 当 $v\to\infty,t_v\to\infty$ 时， $B(t_i+t_v)\to 0$. 根据 (7),(8) 及控制收敛定理，得

$$\lim_{v\to\infty}P(C\cap T_{t_v}C)=\frac{|\Lambda(t)|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n}}\int_{(x_1,\cdots,x_n)\in B}\cdots\int\int_{(x_{n+1},\cdots,x_{2n})\in B}\cdots\int e^{-\frac{1}{2}Q_0(x)}dx_1\cdots dx_{2n},$$

其中

$$\Lambda=\begin{pmatrix} A & 0 \\ o & A \end{pmatrix},$$

$$Q_0(x)=(x_1,\cdots,x_{2n})\Lambda^{-1}(x_1,\cdots,x_{2n})',$$

于是

$$\lim_{v\to\infty}P(C\cap T_{t_v}C)=P(C)^2.$$

因 S 为不变集，又 T_t 保测度，故

$$P(S\Delta CT_{t_v}C)=P(ST_{t_v}S\Delta CT_{t_v}C)$$

$$\leqslant P(S\Delta C)+P(T_{t_v}S\Delta CT_{t_v}C)=2P(S\Delta C)<2\varepsilon,$$

更有 $|P(S)-P(CT_{t_v}C)|<2\varepsilon$. 令 $v\to\infty$ 即得

$$|P(S)-P(C)^2|<2\varepsilon.$$

另方面，又有

$$|P(S)^2-P(C)^2|\leqslant 2|P(S)-P(C)|\leqslant 2P(S\Delta C)<2\varepsilon.$$

综合上二式，即得 $|P(S)-P(S)^2|<4\varepsilon$. 既然 $\varepsilon>0$ 任意，便得 $P(S)=P(S)^2$, 亦即 $P(S)=0$ 或 1.

必要性：考虑过程 $\{\xi_t^2, t\in R_1\}$. 因正态分布具有各级矩，故 ξ_t^2 具有有穷二级矩，而且平稳. 令 $\beta(\tau)=E(\xi_\tau^2-E\xi_\tau^2)(\xi_0^2-E\xi_0^2)$, 试证

$$\beta(\tau)=2(B(\tau))^2.$$

实际上，由正态性

$$E\{\exp i(u_1\xi_\tau+u_2\xi_0)\}=\exp\Big\{-\frac{1}{2}[a^2(u_1^2+u_2^2)+2B(\tau)u_1u_2]\Big\},$$

其中 $a^2=E\xi_0^2$. 以 $\frac{\partial^4}{\partial u_1^2\partial u_2^2}$ 作用两边，令 $u_1=u_2=0$, 得

$$\begin{aligned}E(\xi_\tau^2\xi_0^2)&=\frac{1}{2}(2a^4+4B^2(\tau))=a^4+2B^2(\tau),\\ \beta(\tau)&=E(\xi_\tau^2-a^2)(\xi_0^2-a^2)=2B^2(\tau).\end{aligned}\tag{10}$$

其次，根据 §7.3 定理 2, §7.3 (17) 及 §8.5 定理 2, 知以概率 1(同时也均方收敛地) 有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\xi^2(t)dt=\eta(\omega).$$

而且此极限的方差由 §8.5 定理 2 为

$$D\eta=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\beta(\tau)d\tau=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}2B^2(\tau)d\tau.$$

由 (9) 得

$$D\eta=2\sum_{\lambda_i}[F(\lambda_i+0)-F(\lambda_i-0)]^2.$$

如果 $\{\xi_t, t\in R_1\}$ 是遍历的，则 $\{\xi_t^2, t\in R_1\}$ 亦然，因之 $\eta(\omega)$ 以概率 1 等于某一常数，于是 $D\eta=0$, 由上式便得证 $F(\lambda)$ 连续. □

(二) 试研究什么时候满足 1°, 2° 的正态过程是马氏过程. 由于定理 1, 为使这种过程是马氏过程，必要与充分条件是：对任一组 $t_1<t_2<\cdots<t_n<t$, $t_i\in T$, $t\in T$

$$\widetilde{E}(\xi_t|\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n})=\widetilde{E}(\xi_t|\xi_{t_n})\quad\text{(a.s.)}\tag{11}$$

定义二元函数

$$R(s,t)=\begin{cases}E\xi_t\xi_s/E|\xi_s|^2, & \text{如}E|\xi_s|^2>0,\\ 0, & \text{如}E|\xi_s|^2=0,\end{cases}\tag{12}$$

我们有

定理 4 正态过程 $\{\xi_t, t\in T\}$ 当且仅当

$$R(s,u)=R(s,t)R(t,u) \quad (s<t<u) \tag{13}$$

时是马氏过程.

证 定义随机变量

$$\eta(t,u)=\xi_u-R(t,u)\xi_t, \tag{14}$$

则 $\eta(t,u)\perp\xi_t$, 此因如 $E|\xi_t|^2>0$ 则

$$E\eta(t,u)\xi_t=E(\xi_u-R(t,u)\xi_t)\xi_t=E\xi_u\xi_t-R(t,u)E|\xi_t|^2=0; \tag{15}$$

如 $E|\xi_t|^2=0, \xi_t=0$ (a.s.) 则结论是显然的.

必要性：如 $\{\xi_t, t\in T\}$ 是马氏的，由 (11)

$$\widetilde{E}(\xi_u|\xi_s,\xi_t)=\widetilde{E}(\xi_u|\xi_t)=R(t,u)\xi_t,$$

后一等号成立是因为 $R(t,u)\xi_t$ 是 ξ_u 在 $\overline{L}\{\xi_t\}$ 上的投影. 由上式可见 $\eta(t,u)\perp\xi_s$, 这表示

$$E\xi_u\xi_s-R(t,u)E\xi_t\xi_s=0, \tag{16}$$

而此式等价于 (13).

充分性：如 (13) 成立，则 (16) 成立. 而后者表示： $\eta(t,u)\perp\xi_s (s<t)$; 亦即

$$E(\xi_u-R(t,u)\xi_t)\xi_s=0.$$

特别， $\eta(t,u)\perp\xi_{t_i}, t_1<t_2<\cdots<t_n<t<u$, 因而由 (12) 上式显然对 $s=t$ 也成立，故

$$\widetilde{E}(\xi_u|\xi_t)=R(t,u)\xi_t=\widetilde{E}(\xi_u|\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n},\xi_t). \quad \square$$

注 1 由定理的证明可见， ξ_u 关于 $\{\xi_s, s\leqslant t\}(t<u)$ 的预测量 $R(t,u)\xi_t$ 只依赖于最后的 ξ_t, 这与马氏性相容而正是我们所预期的.

现在设 $\{\xi_t, t\in T\}$ 是马氏平稳正态过程.

由平稳性知 $R(s,t)$ 只依赖于 $t-s$, 记

$$R(t)=R(s,s+t). \tag{17}$$

由马氏性得

$$R(t_1+t_2)=R(t_1)R(t_2), \quad t_1>0,\ t_2>0. \tag{18}$$

如 T 为整数集，由 (18) 解得 $R(n)$ 必呈形式：

$$R(n)=a^n,\ a\text{为某常数}.$$

于是

$$B(\tau)=E\xi_\tau\xi_0=R(\tau)E|\xi_0|^2=ca^\tau\ (\tau\geqslant 0),$$

其中 $c = E|\xi_0|^2 \geqslant 0$. 估计到 $B(-\tau) = B(\tau)$, 得

$$B(\tau) = ca^{|\tau|},\ c \geqslant 0,\ |a| \leqslant 1. \tag{19}$$

$|a| \leqslant 1$ 的原因是 $|a| = |E\xi_1\xi_0|/E|\xi_0|^2 \leqslant 1$.

如 $T = (-\infty, \infty)$ 而且过程均方连续，因而 $R(t)$ 连续时，由 (18) 解得

$$B(\tau) = ce^{-\alpha|\tau|},\ c \geqslant 0,\ \alpha \geqslant 0. \tag{20}$$

特别，如 $c > 0, \alpha > 0$, 过程不可能退化 [1]，这类过程重合于由 §8.2 (49) 与 (50) 定义的过程类，因而它们可以通过对 Wiener 过程的随机积分来表达.

注意，由定理 2 及 (20) 可见，可分的均方连续的马氏平稳正态过程的样本函数以概率 1 连续.

总结上述，得

定理 5 设 $\{\xi_t, t \in T\}$ 为马氏平稳正态过程. 如 $T = N$, 则相关函数由 (19) 给出. 如 $T = (-\infty, \infty)$, 而且过程均方连续，则相关函数由 (20) 给出；若补设过程可分，那么它的样本函数以概率 1 连续；如果 (20) 中 $c > 0, \alpha > 0$, 则所考虑的过程类重合于 §8.2 中 (49) 与 (50) 所定义的过程类. 最后 Borel 可测的均方连续马氏平稳正态过程是遍历的.

证 只要证最后一结论. 如 (20) 中 $c = 0, B(\tau) \equiv 0$, 过程退化为 $\xi_t \equiv 0, \mathcal{F}'\{\xi_t, t \in R_1\}$ 只含概率为 0 或 1 的集而结论显然正确. 如 $c > 0$, 则它有谱密度，由 §8.2 (52) 给出，从而谱函数 $F(\lambda)$ 连续，于是结论由定理 3 得到. □

§9.4. 补充与习题

1. 设均方连续弱平稳过程 $\{\xi_t, t \in R_1\}$ 所对应的投影算子族为 $\{E(A), A \in \mathcal{B}_1\}$, 谱测度为 $F(A), A \in \mathcal{B}_1$, 又 $f(\lambda) \in L^2(R_1, \mathcal{B}_1, F)$, 试求 $E(A)\left[\int_{R_1} f(\lambda)Z(d\lambda)\right]$, 其中 $Z(A)$ 是过程的随机测度.

提示： $E(A)\left[\int_{R_1} f(\lambda)Z(d\lambda)\right] = \int_{R_1} f(\lambda)\chi_A(\lambda)Z(d\lambda)$.

2. 试证弱平稳序列奇异的充分与必要条件是由 (49) 所定义的 $\sigma_1^2 = 0$; 此时一切 $\sigma_v^2 = 0, v = 1, 2, \cdots$.

提示：一切 $H_\xi^n (n = 1, 2, \cdots)$ 当且仅当 $\sigma_1^2 = 0$ 时相重合.

附记. 通过弱平稳序列的谱函数 $F(\lambda)$ 来判别序列是否奇异，有下列结果：弱平稳序列非奇异的充分与必要条件是：对几乎一切 λ(关于勒贝格测度) $F'(\lambda) > 0$ 而且 $\int_{-\pi}^{\pi} \log F'(\lambda) d\lambda > -\infty$. 此外， §9.2 (51) 中的 c_j 还可由 $F'(\lambda)$ 求出，这里 $F'(\lambda)$ 表 $F(\lambda)$ 的导数，它对几乎一切 λ 有定义. 可惜这些结果的证明涉及较专门的复变函数理论，故只好从略，读者可参看 [16] 或 [19]. 在一些特殊情形下，如何实际求 σ_v^2 及 φ_{nv}, 可见本章文献 10, 11. 均方连续弱平稳过程的预测理论也见 [16]. 至于多维情况 (或随机变量的值是多维的，或参数 t 的值是多维的) 的预测理论则还是正在研究中的问题，目前也得到了不少结果，如见本章文献 4,5. 与弱平稳过程紧密有关的是平稳增量过程与广义平稳过程，见本章文献 3,7,12,14,17.

---

[1] 如 $c > 0$, 则必 $\alpha > 0$; 否则 $B(\tau) \equiv c, \xi_t \equiv \sqrt{c}$ (或 $-\sqrt{c}$), 再由 1° 即得 $c = 0$, 矛盾.

近年来弱平稳过程的统计理论有很大的进展，见本章文献 1,5,9; 以及书末书目 [18] 及 [19].

本章 §9.1 及 §9.2 的叙述方式属于 Колмогоров, 在 §9.3 及第八章若干部分的写作中，作者参考了江泽培的平稳过程讲义.

参 考 文 献

[1] 王寿仁，格子点上随机场的回归系数的估计问题，数学学报 8: 2(1958), 210–222.

[2] 王寿仁，关于广义随机过程的一个注记，科学记录， 2: 1 (1958), 15–17.

[3] 王梓坤，随机泛函分析引论，数学进展， 5: 1(1962), 45–71.

[4] 江泽培， О линейной экстраполяции непрерывного одноородного случайного поля, Теория вероятн. и её прим., 1: (2),1957,60–91.

[5] 江泽培， On the estimation of regression coefficients of a continuous paramrter time series with a stationary residual, Теория вероятн. и её прим., 4: 4(1958), 405–423.

[6] 江泽培，多维平稳过程的预测理论 (I),(II), 数学学报， 13 (1963), 269–298; 14 (1964), 438–450

[7] 郑绍濂，正则与奇异的平稳广义随机过程，科学记录，新辑， 8(3), 1959, 281–286.

[8] 郑绍濂，多维平稳广义随机过程的谱分析，复旦大学学报， 2, 1960, 203–210.

[9] 郑绍濂，陶宗英等，具有多维平稳随机扰动的回归系数的估计，数学学报， 11: 2(1961).

[10] 雅格龙，平稳随机函数导论，数学进展， 2: 1(1956), 3–153.

[11] 雅格龙，具有有理谱密度的平稳随机过程的外推，内插及过滤，数学进展， 2: 2(1956), 161–201.

[12] 雅格龙，具有随机平稳 n 级增量的过程的相关理论，数学进展， 2: (1956), 202–255.

[13] Wiener, N., Masani, P., The prediction theory of multivariate stochastic processes, I,II,III, *Acta Math.*, 98(1957), 111–150; 99(1958), 93–137.

[14] Гельфанд И. М., и Виленкин Н. Я., Обобщенные функции, 4, 1961.

[15] Добрушин Р. Л., Своёства выборочных функций Гауссовского стационарного процесса, Теория вероятн. и её прим., V (1) (1960), 132–134, 128–131.

[16] Розанов Ю. А., Спектральная теория многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем, Успехи матем. наук, 13:2 (80) (1958), 93–142.

[17] Itô K., Stationary random distributions, Mem. College Sci. Univ. Kyoto, ser. A, 28 (1953), 209–223 (俄译文见 Математика 1:3 (1957), 139–151).

第十章 随机微分方程与马尔科夫过程

§10.1 对 Wiener 过程的随机积分

(一) 至今所讲马氏过程主要是齐次的，研究一般马氏过程的一种有效工具是随机微分方程，它溯源于 C. H. Бернштейн, 后为伊藤清等所发展. 这种方法的实质是借助于简单的过程来造出一般过程的轨道. 本章中试就一维连续马氏过程来叙述. 当然，还可以用它来研究更一般的多维的过程.

大致想法如下：设 $\{B(t,\omega), t \geqslant 0\}$, 是有参数 $\sigma = 1$ 的 Wiener 过程，又 $a(t,x), b(t,x) \geqslant 0$ 是满足一定条件的函数，考虑在某种意义下的微分方程

$$d\xi(t) = a(t,\xi(t))dt + b(t,\xi(t))dB(t), \tag{1}$$

由此随机微分方程解出

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s,\xi(s))ds + \int_{t_0}^{t} b(s,\xi(s))dB(s) \quad (t_0 \geqslant 0), \tag{2}$$

然后证明 $\{\xi(t), t \geqslant t_0\}$ 是马氏过程.

(1) 的直观意义如下：如已知 $\xi(t) = x$, 则在时间 dt 内质点的位移 $d\xi(t)$ 由两部分构成：一部分是由具有速度 $a(t,\xi(t)) = a(t,x)$ 的决定性运动所产生的，即 $a(t,\xi(t))dt = a(t,x)dt$ 另一部分是随机位移，它等于 Wiener 过程[1] 在这段时间内的位移乘上 $b(t,\xi(t))\ (= b(t,x))$. 由于 $\{B(t,\omega), t \geqslant 0\}$ 以概率 1 连续，自然期望：对 $a(t,x), b(t,x)$ 加上一定条件后 $\{\xi(t,\omega), t \geqslant t_0\}$ 也以概率 1 连续.

这种方法的特点在于：它直接造出过程的轨道 $\xi(t)$. 而不是造出过程的某个特征如转移函数或无穷小算子等等；其次，自一维过程推广到高维过程时，不会产生本质性的困难.

为了正式叙述，需要作相当长的准备. 先从对 Wiener 过程的随机积分讲起. 如果被积函数 $f(t,\omega)$ 不依赖于 ω, 这种积分已在 §8.2 中作为特殊情况而有定义.

从逻辑上讲，本章应放在第六章之后，但从工具来看，由于要用随机积分，故只好延后. 其实本章除稍涉及 §8.2 外，并不依赖于七，，八，，九三章中的其他内容.

这一章里所遇到的随机变量与函数都是实数值的， Wiener 过程的参数 $\sigma = 1$ 以后不再声明.

(二) 设 $B(t,\omega), a \leqslant t \leqslant b$ 为可分 Wiener 过程，我们的目的是想对某些二元函数 $f(t,\omega)$, 定义积分

$$I(f,\omega) = \int_a^b f(\tau,\omega)dB(\tau,\omega). \tag{3}$$

设对每一 $t \in [a,b]$, 有一 σ 代数 $\mathcal{F}_t(\subset \mathcal{F})$ 与之对应，而且 σ 代数族 $\mathcal{F}_t(a \leqslant t \leqslant b)$ 满足条件

[1] 由于此部分位移可看成许多小的几乎独立的随机位移的和，有中心极限定理，自然可设它有 $N(0, \sqrt{b(t,x)dt})$ 正态分布. 这就是所以特别考虑 Wiener 过程的原因.

1) 对每一 $t_1 < t_2, \mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$;

2) 对每一 t, $B(t,\omega) - B(a,\omega)$ 关于 $\mathcal{F}_t$ 可测;

3) 对每一 t, 二 σ 代数 $\mathcal{F}_t$ 与 $\mathcal{F}\{B(s)-B(t), s \in [t,b]\}$ 是独立的. 换句话说, 如 $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F}_t$, 而 $B_1, \cdots, B_m$ 属于后一 σ 代数, 则

$$P(A_1 \cdots A_n B_1 \cdots B_m) = P(A_1 \cdots A_n) \cdots P(B_1 \cdots B_m). \tag{4}$$

例 1 作为这种 σ 代数族的例, 考虑取值于任意可测空间的随机变量 $A(\omega)$, 它与 $B(t,\omega) - B(s,\omega), (a \leqslant s \leqslant t \leqslant b)$ 独立, 取 $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}\{A(\omega); B(\tau,\omega) - B(a,\omega), a \leqslant \tau \leqslant t\}$ 则 $\mathcal{F}_t (a \leqslant t \leqslant b)$ 满足条件 1)-3).

定义 (3) 中积分的步骤仍然类似于定义 Lebesgue 积分.

称实值函数 $f(t,\omega)$ 为 **简单的**, 如果它具备下列性质:

(M.1). $f(t,\omega)$ 关于 (t,ω) 是 $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{F}$ 可测函数, 这里 $\mathcal{B}_1$ 表 $[a,b]$ 中全体一维 Borel 集.

(M.2). 当 $t \in [a,b]$ 固定时, $f(t,\omega)$ 关于 $\mathcal{F}_t$ 可测.

(S.3). 存在分割 $\Delta: a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b, a_i$ 不依赖于 ω, 使

$$f(t,\omega) = f(a_{i-1},\omega),\ a_{i-1} \leqslant t < a_i,\ i = 1, \cdots, n, \tag{5}$$

而且 $f(a_i,\omega)$ 均方可积, 即

$$\int_\Omega |f(a_i,\omega)|^2 P(d\omega) < \infty,\ i = 0, 1, \cdots, n. \tag{6}$$

全体简单函数的集记为 S.

对 $f(t,\omega) \in S$, 定义

$$I(f,\omega) = \sum_{i=1}^{n} f(a_{i-1},\omega)[B(a_i,\omega) - B(a_{i-1},\omega)]. \tag{7}$$

注意 $I(f,\omega)$ 依赖于 a, b; 表面上它还依赖于 Δ, 即 $I(f,\omega) = I_\Delta(f,\omega)$. 其实它与 Δ 的选择无关, 因为如有二分割 Δ_1, Δ_2 都使 (5) 成立, 利用 Δ_1, Δ_2 的所有分点而造一分割 Δ, 则 I_{Δ_1} 与 I_{Δ_2} 都等于 I_Δ.

由 (7) 可见, $I(f,\omega)$ 在 S 上具有下列性质:

a) $I(\alpha f + \beta g, \omega) = \alpha I(f,\omega) + \beta I(g,\omega)$,

其中 α, β 为任二实常数.

b) 对 $f(t,\omega) \in S$, 定义

$$\psi(t,\omega) = \begin{cases} 0, & \text{如} \max\limits_{a \leqslant s \leqslant t} |f(s,\omega)| = 0, \\ 1, & \text{如} \max\limits_{a \leqslant s \leqslant t} |f(s,\omega)| > 0, \end{cases} \tag{8}$$

则

$$|I(f,\omega)| \leqslant \psi(b,\omega) |I(f,\omega)|. \tag{9}$$

c)

$$EI(f,\omega)=0, \tag{10}$$

$$E|I(f,\omega)|^2=\int_a^b E|f(t,\omega)|^2dt. \tag{11}$$

证 a),b) 显然. 由 (7) 并注意独立性 3)

$$\begin{aligned}EI(f,\omega)&=E\sum_{i=1}^n f(a_{i-1},\omega)[B(a_i,\omega)-B(a_{i-1},\omega)]\\&=\sum_{i=1}^n Ef(a_{i-1},\omega)\cdot E[B(a_i,\omega)-B(a_{i-1},\omega)],\end{aligned}$$

然而 Wiener 过程增量的数学期望 $E[B(t,\omega)-B(s,\omega)]=0$, 故得证 (10). 其次, 利用增量的独立性, 并注意 $E[B(t,\omega)-B(s,\omega)]^2=t-s(t>s)$, 即得

$$\begin{aligned}E|I(f,\omega)|^2=&\sum_{i=1}^n E|f(a_{i-1},\omega)|^2E[B(a_i,\omega)-B(a_{i-1},\omega)]^2\\&+2\sum_{i<j}Ef(a_{i-1},\omega)[B(a_i,\omega)-B(a_{i-1},\omega)]\\&\times f(a_{i-1},\omega)\cdot E[B(a_i,\omega)-B(a_{i-1},\omega)]\\=&\sum_{i=1}E|f(a_{i-1},\omega)|^2(a_i-a_{i-1})=\int_a^b E|f(t,\omega)|^2dt.\ \square\end{aligned}$$

现在以 $\overline{S}$ 表满足条件 (M.1),(M.2) 及条件

($\overline{\text{S}}$.3) $\qquad \int_a^b E|f(t,\omega)|^2dt<\infty$

的函数 $f(t,\omega)$ 的全体. 显然 $\overline{S}\supset S$. 试拓展 $I(f,\omega)$ 的定义域到 $\overline{S}$ 上. 为此先证

引理 1 在依 $L^2([a,b]\times\Omega)$ 中的范

$$\|f(t,\omega)\|^2=\int_a^b E|f(t,\omega)|^2dt \tag{12}$$

收敛的意义下, S 稠于 $\overline{S}$.

证 以 $\chi_N(x)$ 表 $[-N,N]$ 的示性函数, 即

$$\chi_N(x)=\begin{cases}1, & 如x\in[-N,N],\\0, & 如x\overline{\in}[-N,N].\end{cases}$$

如果 $f(t,\omega)\in\overline{S}$, 则因

$$|f(t)-f(t)\chi_N(f(t))|\leqslant|f(t)|$$

$(f(t)=f(t,\omega))$ 及 ($\overline{\text{S}}$.3), 可用控制收敛定理而得

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^b E|f(t)-f(t)\chi_N(f(t))|^2dt=0. \tag{13}$$

因此，引理结论只要对有界的 $f(t,\omega)\in\overline{S}$ 证明，亦即只要证明，对 $\overline{S}$ 中有界的 $f(t,\omega)$, 存在 $f_n(t,\omega)\in S$, 使依 (12) 中范有

$$\|f(t,\omega)-f_n(t,\omega)\|\to 0\quad (n\to\infty). \tag{14}$$

为此，补定义 $f(t,\omega)=0$, 如 $t\overline{\in}[a,b]$; 并且令

$$\alpha_n(t)=\frac{j}{2^n},\ \frac{j}{2^n}\leqslant t<\frac{j+1}{2^n},\quad j=0,\pm1,\cdots,$$

则 $f[\alpha_n(t-s)+s,\omega]$ 是简单函数. 因而只需证明：可选择点 s, 使对某一子列 $\{n_j\}$ 有

$$\lim_{j\to\infty}\|f[\alpha_{n_j}(t-s)+s,\omega]-f(t,\omega)\|=0. \tag{15}$$

为证此先证一事实：如 $f(s)$ 是有界 Lebesgue 可测函数，在某有穷 s^- 区间之外等于 0, 则

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t+h)-f(s)|^2ds=0. \tag{15_1}$$

实际上，对每 $\varepsilon>0$ 存在连续函数 f_ε, 它在某有穷区间外为 0, 使

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(s)-f_\varepsilon(s)|^2ds\leqslant\varepsilon^2.$$

利用 Minkowski 不等式得

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(s+h)-f(s)|^2ds\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\overline{\lim_{h\to 0}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f_\varepsilon(s+h)-f_\varepsilon(s)|^2ds\right]^{\frac{1}{2}}+2\varepsilon=2\varepsilon,$$

于是得证 (15_1). 今利用此事实. 由 (15_1) 得

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(s+h,\omega)-f(s,\omega)|^2ds=0.$$

从而对任一固定的 t, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f[\alpha_n(t)+s,\omega]-f(t+s,\omega)|^2ds=0.$$

由于 Fubini 定理，$\int_{-\infty}^{\infty}|f[\alpha_n(t)+s,\omega]-f(t+s,\omega)|^2ds$ 对 (t,ω) 几乎处处 (关于 $L\times P, L$ 为勒贝格测度) 收敛于 0, 既然此 (t,ω) 的函数列有界 [1]，由几乎处处收敛可推出平均收敛，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f([\alpha_n(t)+s,\omega]-f(t+s,\omega)|^2dsdtP(d\omega)=0,$$

这说明被积函数对 (s,t,ω) 乘积测度也平均收敛于 0. 故存在整数列 $\{n_j\}$, 使对几乎一切 s 有

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega\int_{-\infty}^{\infty}|f([\alpha_{n_j}(t)+s,\omega]-f(t+s,\omega)|^2dtP(d\omega)=0.$$

[1] 其实可认为 t 只在一有穷区间中变动.

因此，总存在 $s_0 \in [0,1]$ 使

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega\int_{-\infty}^{\infty}|f[\alpha_{n_j}(t)+s_0,\omega]-f(t+s_0,\omega)|^2dtP(d\omega)$$
$$=\lim_{j\to\infty}\int_\Omega\int_{-\infty}^{\infty}|f[\alpha_{n_j}(t-s_0)+s_0,\omega]-f(t,\omega)|^2dtP(d\omega)=0.$$

这便证明了 (15)(取 $s=s_0$). □

由此引理，知对任意 $f(t)\in\overline{S}$, 存在一列 $f_n(t)\in S, n=1,2,\cdots$, 使

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b E|f(t)-f_n(t)|^2dt=0. \tag{16}$$

于是 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\int_a^b E|f_n(t)-f_m(t)|^2dt=0$. 由 c) 得

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}E|I(f_n,\omega)-I(f_m,\omega)|^2=0.$$

故 $I(f_n,\omega)$ 均方 (因而也依概率) 收敛于某随机变量. 我们便定义 $I(f,\omega)$ 为此随机变量. 注意 $I(f,\omega)$ 的值以概率 1 唯一确定，因为如另有一列 $\widetilde{f}_n(t)\in S$ 也使 (16) 成立，则必

$$\lim_{n\to\infty}E|I(f_n,\omega)-I(\widetilde{f}_n,\omega)|^2=\lim_{n\to\infty}\int_a^b E|f_n(t)-\widetilde{f}_n(t)|^2dt=0.$$

由极限过渡，不难看出在 $\overline{S}$ 上，性质 a),b),c) 仍然成立，只是在 b) 中 max 应换成 sup, 并理解为几乎处处. 由 b) 知，对可分过程 $f(t), t\in[a,b]$, 有

d) $$P(|I(f,\omega)|>0)\leqslant P(\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)|>0). \tag{17}$$

最后以 M 表全体满足 (M.1),(M.2) 及条件

(M.3) $$P\left(\int_a^b|f(t,\omega)|^2dt<\infty\right)=1$$

的函数 $f(t,\omega)$ 的集. 试拓展 $I(f,\omega)$ 的定义到 M 上.

仍以 $\chi_N(x)$ 表 $[-N,N]$ 的示性函数，如 $f(t)\in M$, 则函数

$$f_N(t)=f(t)\chi_N\left(\int_a^t|f(s)|^2ds\right)\in\overline{S},$$

这是因为

$$\int_a^b E|f_N(t)|^2dt=E\int_a^b|f_N(t)|^2dt\leqslant N. \tag{18}$$

注意如对固定的 ω, 有 $\int_a^b|f(s)|^2ds<N$, 则当 $N'>N$ 时， $f_N(t)\equiv f_{N'}(t), t\in[a,b]$, 亦即

$$\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|f_N(t)-f_{N'}(t)|=0. \tag{19}$$

因此，由 (17) 得

$$P(|I(f_N,\omega)-I(f_{N'},\omega)|>0)\leqslant P\left(\int_a^b |f(t)|^2\geqslant N\right),$$

此式右方项当 $N\to\infty$ 时由 (M.3) 趋于 0, 故 $I(f_N,\omega)$ 依概率收敛于某随机变量，我们便定义 $I(f,\omega)$ 为此随机变量. 根据此定义，不难看出，在 M 上，$I(f,\omega)$ 仍然具有性质 a),b),d).

(三) 令 $\chi_A(t)$ 为 $[a,b]$ 中 Borel 可测子集 A 的示性函数，设 $f(t)\in M$, 则 $f(t)\chi_A(t)\in M$, 定义

$$\int_A f(t)dB(t)=I(f\chi_A,\omega),$$
$$\int_a^s f(t)dB(t)=\int_{[a,s]} f(t)dB(t).$$

作为积分上限的函数，试研究随机过程 $\int_a^t f(s)dB(s), a\leqslant t$. 以下总假定它是可分过程 [1].

对任意 $f(t,\omega)\in M$, 依 (8) 定义 $\psi(t,\omega)$, 但 (8) 中的 max 应换成 sup. 应用性质 b) 于 $\int_a^t f(s)dB(s)$, 立得

$$\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t f(s)dB(s)\right|\leqslant\psi(b)\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t f(s)dB(s)\right|,\tag{20}$$

由此可见

$$P\left(\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t f(s)dB(s)\right|>0\right)\leqslant P(\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)|>0).\tag{21}$$

定理 1 如果 $f(t)\in\overline{S}$, 则过程

$$\zeta(t)=\int_a^t f(s)dB(s)$$

是鞅.

证 由性质 c) 知 $E|\zeta(t)|<\infty$. 由随机积分的定义知 $\zeta(t)$ 关于 $\mathcal{F}_t$ 可测，如能证

$$E\left(\int_t^{t+h} f(s)dB(s)|\,\mathcal{F}_t\right)=0\quad(h>0)\quad\text{(a.s.)},\tag{22}$$

则有

$$E(\zeta(t+h)|\,\mathcal{F}_t)=\zeta(t)\quad\text{(a.s.)}.$$

两边取 $E(-|\zeta(s),s\leqslant t)$, 得

$$E(\zeta(t+h)|\,\zeta(s),s\leqslant t)=\zeta(t)\quad\text{(a.s.)}.$$

因此只要证 (22) 成立；或者，证明与 (22) 等价的下式也可以：

$$\int_A\left[\int_t^{t+h} f(s)dB(s)\right]P(d\omega)=0\quad(\text{任意}A\in\mathcal{F}_t).\tag{23}$$

---

[1] 本质上这假定并未带来限制，因为 $\int_a^t f(s)dB(s)$ 对固定的 t 只是几乎处处确定，故可在一 0 测集上适当选定它的值以使过程可分，详见第三章.

先设 $f(t)\in S$, 这时对 $t\leqslant a_k$, 由 (M.2) 及 3) 得

$$\begin{aligned}E\{f(a_k)[B(a_{k+1})-B(a_k)]|\,\mathcal{F}_t\}&=E\{f(a_k)E[(B(a_{k+1})-B(a_k))|\,\mathcal{F}_{a_k}]|\,\mathcal{F}_t\}\\&=E\{f(a_k)E[B(a_{k+1})-B(a_k)]|\,\mathcal{F}_t\}=E\{f(a_k)\cdot 0|\,\mathcal{F}_t\}=0,\end{aligned}$$

由此及 (5) 可见 (22) 成立.

今设 $f(t)\in\overline{S}$. 由定义存在 $f_n(t)\in S$, 使在均方收敛意义下，有

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\int_t^{t+h}f_n(s)dB(s)=\int_t^{t+h}f(s)dB(s).$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\int_A\left\{\int_t^{t+h}[f_n(s)-f(s)]dB(s)\right\}P(d\omega)\right|&\leqslant E\left|\int_t^{t+h}[f_n(s)-f(s)]dB(s)\right|\\&\leqslant\left\{E\left|\int_t^{t+h}[f_n(s)-f(s)]dB(s)\right|^2\right\}^{\frac12}\to 0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

既然 (23) 对 $f_n(t)$ 正确，故由上式得 (23) 对 $f(t)$ 也正确. □

定理 2 对每 $f(t)\in M$, 可分随机过程

$$\zeta(t)=\int_a^t f(s)dB(s)\tag{24}$$

的样本函数以概率 1 连续.

证 回忆早已假定了的过程可分性. 如 $f(t)\in S$, 则由可分 Wiener 过程的概率 1 连续性以及

$$\zeta(t)=\sum_{i=1}^{k-1}f(a_{i-1})[B(a_i)-B(a_{i-1}]+f(a_{k-1})[B(t)-B(a_{k-1}],$$

其中 k 由 $a_{k-1}\leqslant t\leqslant a_k$ 决定，可见 $\zeta(t)$ 以概率 1 连续. 如 $f(t)\in\overline{S}$, 取 $f_n(t)\in S$ 使满足

$$\int_a^b E|f(t)-f_n(t)|^2dt\leqslant\frac{1}{n^4}.\tag{25}$$

令 $\zeta_n(t)=\int_a^t f_n(s)dB(s)$, 则如上述 $\zeta_n(t)$ 以概率 1 连续，而且

$$\zeta_n(t)-\zeta(t)=\int_a^t[f_n(s)-f(s)]\,dB(s)$$

是鞅. 利用 §1.4 引理 4 、可分性及 c) 得

$$P\left\{\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|\zeta(t)-\zeta_n(t)|\geqslant\frac1n\right\}\leqslant E\{|\zeta(b)-\zeta_n(b)|^2\}n^2\leqslant\frac{n^2}{n^4}=\frac{1}{n^2}.$$

因为 $\sum\frac{1}{n^2}<\infty$, 故由 Borel-Cantelli 引理 (见 §1.5 题 12), 可见对几乎一切 ω, 存在 $n_0(=n_0(\omega))$, 当 $n\geqslant n_0$ 时

$$|\zeta(t,\omega)-\zeta_n(t,\omega)|<\frac1n,\quad 一切t\in[a,b],$$

既然连续函数列 $\zeta_n(t,\omega)$ 均匀收敛于 $\zeta(t,\omega)$, 可见 $\zeta(t,\omega)$ 也连续, 于是得证定理结论对 $f(t)\in\overline{S}$ 正确.

今设 $f(t)\in M$. 根据 (21)

$$P\left\{\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t f(s)dB(s)-\int_a^t f(s)\chi_{_N}\left(\int_a^s |f(u)|^2du\right)dB(s)\right|>0\right\}$$
$$\leqslant P\left\{\int_a^b |f(t)|^2dt>N\right\}. \tag{26}$$

既然 $f(t)\chi_{_N}\left(\int_a^t|f(s)|^2ds\right)\in\overline{S}$, 故以概率 $1,\int_a^t f(s)\chi_{_N}\left(\int_a^s|f(u)|^2du\right)\times dB(s)$ 是 t 的连续函数. (26) 中右方项随 $N\to\infty$ 而趋于 0, 故几乎对一切 ω, 必存在一 $N_0(=N_0(\omega))$, 使对一切 $t\in[a,b]$, 当 $n\geqslant N_0$ 时

$$\int_a^t f(s)dB(s)=\int_a^t f(s)\chi_n\left(\int_a^s |f(u)|^2du\right)dB(s), \tag{27}$$

由于右方是 t 的连续函数, 故左方亦然. □

注 此证明揭示, 可以如下应用随机积分的定义: 对 $f(t)\in S$, 定义不变; 对 $f(t)\in\overline{S}$, 存在 $f_n(t)\in S$, 使对几乎一切 ω, 连续的样本函数列 $\int_a^t f_n(s)dB(s)$ $(n=1,2,\cdots)$ 均匀收敛于 $\int_a^t f(s)dB(s)$, 故后者也连续, 最后, 对 $f(t)\in M$, 则 $f(t)\chi_{_N}\left(\int_a^t|f(s)|^2ds\right)\in\overline{S}$, 而且对几乎一切 ω, 存在 $N_0=N_0(\omega)$, 使 $n\geqslant N_0$ 时, 对任一固定的 $t\in[a,b],\int_a^t f(s)\chi_n\left(\int_a^s|f(u)|^2du\right)dB(s)$ 是一常数 (不依赖于 $n\geqslant N_0$), 这常数值便是 $\int_a^t f(s)dB(s)$.

§10.2 随机微分

本节中的 $B(t,\omega)$ $(a\leqslant t\leqslant b),\mathcal{F}_t$ 仍如上节; 此外, 设实值随机过程 $a(t,\omega),b(t,\omega),x(t,\omega)$ 满足上节 $f(t,\omega)$ 所满足的条件 (M.1),(M.2), 并且

$$\int_a^b |a(t,\omega)|dt<\infty,\quad \int_a^b |b(t,\omega)|^2dt<\infty. \tag{1}$$

于是可定义

$$\int_s^t a(\tau,\omega)d\tau,\quad \int_s^t b(\tau,\omega)dB(\tau,\omega),\quad a\leqslant s\leqslant t\leqslant b,$$

前者对固定的 ω 是通常的 Lebesgue 积分, 后者则如上节定义.

我们说, 随机过程 $x(t,\omega)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 有随机微分 $dx(t)$, 而且

$$dx(t)=a(t)dt+b(t)dB(t), \tag{2}$$

如果对 $a\leqslant s\leqslant t\leqslant b$, 关系式

$$x(t,\omega)-x(s,\omega)=\int_s^t a(\tau,\omega)d\tau+\int_s^t b(\tau,\omega)dB(\tau,\omega) \tag{3}$$

对几乎一切 ω 成立, 而且 $x(t,\omega)$ 以概率 1 是 t 的连续函数.

引理 1 设 $f_n(t,\omega)\in M, f(t,\omega)\in M$, 又

$$\int_a^b |f_n(t,\omega)-f(t,\omega)|^2 dt \xrightarrow{P} 0, \tag{4}$$

则下列可分过程间有关系

$$\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t f_n(s)dB(s)-\int_a^t f(s)dB(s)\right| \xrightarrow{P} 0.$$

证 不失一般性，可设 $f(t,\omega)\equiv 0$. 考虑 $[-1,1]$ 的示性函数 $\chi_1(x)$, 令 $g_n(t,\omega)=f_n(t,\omega)\times\chi_1\left(\int_a^b |f_n(t,\omega)|^2dt\right)$, 则 $g_n(t,\omega)\in\overline{S}$, 并且

$$\int_a^b |g_n(t,\omega)|^2dt\leqslant 1,$$
$$\int_a^b |g_n(t,\omega)|^2dt\leqslant \int_a^b |f_n(t,\omega)|^2dt \xrightarrow{P} 0,$$

故 $\int_a^b E|g_n(t,\omega)|^2dt\to 0$, 因为对有界随机变量列，均方收敛与依概率收敛等价. 根据上节定理 1 及 §1.4 引理 4

$$P\left(\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t g_n(s)dB(s)\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\int_a^b E|g_n(t,\omega)|^2dt\to 0,$$

亦即

$$\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t g_n(s,\omega)dB(s,\omega)\right| \xrightarrow{P} 0.$$

但由假定 (4),$\int_a^b |f_n(t,\omega)|^2dt \xrightarrow{P} 0$, 故以充分接近于 1 的概率，在某 N 以后， $g_n(t,\omega)=f_n(t,\omega)$,$t\in[a,b]$, 故得证引理结论. □

这引理保证在一定条件下可在积分号下取极限.

引理 2 如果

$$dx(t)=a(t)dt+b(t)dB(t), \tag{5}$$

则

$$(x(t)-x(s))^2=\int_s^t [2(x(\tau)-x(s))a(\tau)+b^2(\tau)]d\tau$$
$$+\int_s^t 2[x(\tau)-x(s)]b(\tau)dB(\tau). \tag{6}$$

证 (i) 先设 $b(t)\in S$. 设 $b(t)$ 对应的分割为 $\Delta_0: s=t_0<t_1<\cdots<t_m=t$, 因而 $b(t)$ 在 $[t_i,t_{i+1})$ 间为常数 (ω 固定时). 另取分割列 $\Delta_n: s=t_{n0}<t_{n1}<\cdots<t_{n\alpha_n}=t$, $n\geqslant 1$, 并设 $\Delta_0\subset\Delta_1\subset\Delta_2\subset\cdots$, 即 Δ_i 的分点含于 Δ_{i+1} 的分点中. 又设 $|\Delta_n|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant\alpha_n}(t_{ni}-t_{n\,i-1})\to$

$0, n \to \infty$. 于是

$$
\begin{aligned}
(x(t)-x(s))^2 &= \left\{\sum_i [x(t_{ni})-x(t_{ni-1})]\right\}^2 \\
&= 2\sum_{j<i}[x(t_{nj})-x(t_{nj-1})][x(t_{ni})-x(t_{ni-1})]+\sum_i [x(t_{ni})-x(t_{ni-1})]^2 \\
&= 2\sum_i [x(t_{ni-1})-x(s)][x(t_{ni})-x(t_{ni-1})]+\sum_i [x(t_{ni})-x(t_{ni-1})]^2 \\
&= A_n^{(1)}+A_n^{(2)} \quad (\text{设}).
\end{aligned}
$$

分别考虑各项. 定义函数

$$\phi_n(t)=t_{ni-1} \quad (t_{ni-1}\leqslant t<t_{n\ i}),\ i=1,2,\cdots \alpha_n,$$

由 (3) 得

$$A_n^{(1)}=\int_s^t 2[x(\phi_n(\tau))-x(s)]a(\tau)d\tau+\int_s^t 2[x(\phi_n(\tau))-x(s)]b(\tau)dB(\tau).$$

既然 $x(t,\omega)$ 以概率 1 连续因而在 $[s,t]$ 上有界，故对第一积分用控制收敛定理，对第二积分用引理 1, 得知当 $n\to\infty$ 时， $A_n^{(1)}$ 依概率收敛于

$$\int_s^t 2[x(\tau)-x(s)]a(\tau)d\tau+\int_s^t 2[x(\tau)-x(s)]b(\tau)dB(\tau). \tag{7}$$

改写 $A_n^{(2)}$ 为

$$
\begin{aligned}
A_n^{(2)} &= \sum_i\left(\int_{t_{n\ i-1}}^{t_{n\ i}} a(\tau)d\tau\right)^2+2\sum_i\int_{t_{n\ i-1}}^{t_{n\ i}} a(\tau)d\tau\int_{t_{n\ i-1}}^{t_{n\ i}} b(\tau)dB(\tau) \\
&\quad +\sum_i\left(\int_{t_{n\ i-1}}^{t_{n\ i}} b(\tau)dB(\tau)\right)^2 \\
&= B_n^{(1)}+B_n^{(2)}+B_n^{(3)} \qquad (\text{设}),
\end{aligned}
$$

易见

$$
\begin{aligned}
B_n^{(1)} &\leqslant \max_i\left|\int_{t_{n\ i-1}}^{t_{n\ i}} a(\tau)d\tau\right|\int_s^t |a(\tau)|d\tau, \\
B_n^{(2)} &\leqslant 2\max_i\left|\int_{t_{n\ i-1}}^{t_{n\ i}} b(\tau)dB(\tau)\right|\int_s^t |a(\tau)|d\tau.
\end{aligned}
$$

因为以概率 $1,\int_s^u a(\tau)d\tau$ 及 $\int_s^u b(\tau)dB(\tau)$ 对 u 连续，故在 $[s,t]$ 上均匀连续，因而当 $n\to\infty$ 时， $B_n^{(1)}\to 0, B_n^{(2)}\to 0$ (a.s.).

至于 $B_n^{(3)}$, 则因 $\Delta_0\subset\Delta_n$, 故

$$B_n^{(3)}=\sum_i b(t_{i-1})^2\sum_j^{(i)}[B(t_{n\ j})-B(t_{n\ j-1})]^2,$$

其中 $\sum\limits_j^{(i)}$ 表对 $(j: t_{i-1} < t_{n\ j} \leqslant t_i)$ 求和. 由 Wiener 过程的性质可见

$$E\sum_j^{(i)}[B(t_{n\ j}) - B(t_{n\ j-1})]^2 = t_i - t_{i-1};$$

$$D\sum_j^{(i)}[B(t_{n\ j}) - B(t_{n\ j-1})]^2 = \sum_j^{(i)} D[B(t_{n\ j}) - B(t_{n\ j-1})]^2$$

$$= C\sum_j^{(i)}(t_{n\ j} - t_{n\ j-1})^2 \leqslant C(t_i - t_{i-1})|\Delta_n| \to 0,$$

其中 D 表方差, 而常数 $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x^2-1)^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$. 因而

$$\sum_j^{(i)}[B(t_{n\ j}) - B(t_{n\ j-1})]^2 \xrightarrow{P} t_i - t_{i-1},$$

$$B_n^{(3)} \xrightarrow{P} \sum_i b(t_{i-1})^2(t_i - t_{i-1}) = \int_s^t b(\tau)^2 d\tau.$$

于是存在子列 $B_{k_n}^{(3)} \to \int_s^t b(\tau)^2 d\tau$ (a.s.). 再取 $\{k_n\}$ 的子列 $\{l_n\}$ 使 $A_{l_n}^{(1)}$ 几乎处处收敛于 (7). 综合上述, 可见 (6) 式当 $b(t) \in S$ 时正确.

(ii) 对一般的 $b(t)$, 选 $b_n(t) \in S$, 使

$$\int_s^t |b_n(\tau) - b(\tau)|^2 d\tau \to 0 \quad \text{(a.s.)}. \tag{8}$$

(6) 式对 $b_n(t)$ 成立, 即

$$\begin{aligned}(x_n(t) - x_n(s))^2 = &\int_s^t [2(x_n(\tau) - x_n(s))a(\tau) + b_n^2(\tau)]d\tau \\ &+ \int_s^t 2[x_n(\tau) - x_n(s)]b_n(\tau)dB(\tau),\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $x_n(t)$ 是相应于 $b_n(t)$ 的 (5) 中的过程. 因此, 如能在上式各项中积分号下取极限, 便得所欲证. 由 (8) 及引理 1 得

$$x_n(\tau) - x_n(s) \to x(\tau) - x(s), \quad s \leqslant \tau \leqslant t,$$

这收敛是依概率一致收敛, 即

$$\sup_{s\leqslant\tau\leqslant t} |(x_n(\tau) - x_n(s)) - (x(\tau) - x(s))| \xrightarrow{P} 0,$$

故取子列后 (仍记此子列为 $\{n\}$), 得

$$\sup_{s\leqslant\tau\leqslant t} |(x_n(\tau) - x_n(s)) - (x(\tau) - x(s))| \to 0 \quad \text{(a.s.)}. \tag{10}$$

故

$$\int_s^t [x_n(\tau) - x_n(s)]a(\tau)d\tau \to \int_s^t [x(\tau) - x(s)]a(\tau)d\tau \text{ (a.s.)} \tag{11}$$

由 (8) 得

$$\int_s^t b_n^2(\tau)d\tau \to \int_s^t b^2(\tau)d\tau. \tag{12}$$

最后，由 (9),(8) 可见，如在下式积分号中同时增、减 $[x_n(\tau)-x_n(s)]b(\tau)$, 并利用 $(c+d)^2 \leqslant 2(c^2+d^2)$, 即得

$$\int_s^t \{[x_n(\tau)-x_n(s)]b_n(\tau)-[x(\tau)-x(s)]b(\tau)\}^2 \to 0 \text{ (a.s.)},$$

由引理 1

$$\int_s^t [x_n(\tau)-x_n(s)]b_n(\tau)dB(\tau) \xrightarrow{P} \int_s^t [x(\tau)-x(s)]b(\tau)dB(\tau). \tag{13}$$

取一次子列，即知上式对此子列 (仍记为 $\{n\}$) 在 (a.s.) 意义下也成立. 由 (9),(11),(12) 及 (13) 即得所欲证. □

引理 3 采用引理 2 中记号，当 $n\to\infty$ 时

$$\sum_i [x(t_{n\ i})-x(t_{n\ i-1})]^2 \xrightarrow{P} \int_s^t b^2(\tau)d\tau. \tag{14}$$

证 回忆函数 $\phi_n(t)$ 的定义，并利用 (6), 得上式左方等于

$$\begin{aligned}
&\sum_i \int_{t_{n\ i-1}}^{t_{n\ i}} \{2[x(\tau)-x(t_{n\ i-1})]a(\tau)+b^2(\tau)\}d\tau \\
&\quad + \sum_i \int_{t_{n\ i-1}}^{t_{n\ i}} 2[x(\tau)-x(t_{n\ i-1})]b(\tau)dB(\tau) \\
&= \int_s^t \{2[x(\tau)-x(\phi_n(\tau))]a(\tau)+b^2(\tau)\}d\tau \\
&\quad + \int_s^t 2[x(\tau)-x(\phi_n(\tau))]b(\tau)dB(\tau).
\end{aligned}$$

由于 $x(\tau,\omega)$ 以概率 1 连续，故在有穷区间中 $x(\tau)-x(\phi_n(\tau))$ 以概率 1 一致收敛于 0, 于是上式后方第一积分几乎处处趋于 $\int_s^t b^2(\tau)d\tau$; 再对第二积分用引理 1 即得所欲证. □

现在可以证明 K. Itô 的基本结果，它相当于普通复合函数的微分定理.

定理 1 设函数 $F(t,X)\equiv F(t,x_1,\cdots,x_m)$ 及其导数

$$\left.\begin{aligned}
F_0(t,X)&\equiv F_0(t,x_1,\cdots,x_m)=\frac{\partial}{\partial t}F(t,x_1,\cdots,x_m),\\
F_i(t,X)&\equiv F_i(t,x_1,\cdots,x_m)=\frac{\partial}{\partial x_i}F(t,x_1,\cdots,x_m),\\
F_{i\ j}(t,X)&\equiv F_{i\ j}(t,x_1,\cdots,x_m)=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}F(t,x_1,\cdots,x_m)
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

都是连续函数. 如果

$$dx_i(t)=a_i(t)dt+b_i(t)dB(t),\quad i=1,2,\cdots,m, \tag{16}$$

$$y(t)=F(t,X(t))\equiv F(t,x_1(t),\cdots,X_m(t)), \tag{17}$$

则

$$dy(t)=\left\{F_0(t,X(t))+\sum_i F_i(t,X(t))a_i(t)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{i,j}F_{i,j}(t,X(t))b_i(t)b_j(t)\right\}dt+\left\{\sum_i F_i(t,X(t))b_i(t)\right\}dB(t). \tag{18}$$

证 只要证明对 $y(t)$, 相应的 (3) 式成立. 由 Taylor 展开得

$$\begin{aligned}
&F(t+\Delta t,X+\Delta X)-F(t,X)\\
&=[F(t+\Delta t,X+\Delta X)-F(t,X+\Delta X)]+[F(t,X+\Delta X)-F(t,X)]\\
&=F_0(t+\theta\Delta t,X+\Delta X)\Delta t+\sum_i F_i(t,X)\Delta x_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j}F_{i,j}(t,X+\theta'\Delta X)\Delta x_i\Delta x_j\\
&=F_0(t+\theta\Delta t,X+\Delta X)\Delta t+\sum_i F_i(t,X)\Delta x_i\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i,j}F_{i,j}(t,X)\Delta x_i\Delta x_j+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\varepsilon_{i,j}(t,x,X+\Delta X)\Delta x_i\Delta x_j,
\end{aligned}$$

而且如 $t,X,X+\Delta X$ 在有界区域中变动, 由 $F_{i\ j}$ 的连续性, 知当 $\Delta X\to 0$ 时, $\varepsilon_{i\ j}(t,X,\Delta X)$ 均匀趋于 0. 仍然采用分割 Δ_n, 由上式得

$$\begin{aligned}
y(t)-y(s)&=\sum_v\{F(t_{n\ v},X(t_{n\ v}))-F(t_{n\ v-1},X(t_{n\ v-1}))\}\\
&=\sum_v F_0(t_{n\ v-1}+\theta(t_{n\ v}-t_{n\ v-1}),X(t_{n\ v}))(t_{n\ v}-t_{n\ v-1})\\
&\quad+\sum_i\sum_v F_i(t_{n\ v-1},X(t_{n\ v-1}))(X(t_{n\ v})-X(t_{n\ v-1}))\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\sum_v F_{i\ j}(t_{n\ v-1},X(t_{n\ v-1}))(x_i(t_{n\ v})-x_i(t_{n\ v-1}))(x_j(t_{n\ v})-x_j(t_{n\ v-1}))\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\sum_v \varepsilon_{i\ j}(t,X(t_{n\ v-1}),X(t_{n\ v}))\\
&\quad\times(x_i(t_{n\ v})-x_i(t_{n\ v-1}))(x_j(t_{n\ v})-x_j(t_{n\ v-1}))\\
&=A_n+B_n+\frac{1}{2}C_n+\frac{1}{2}D_n \qquad (\text{设}).
\end{aligned}\tag{19}$$

分别考虑各项. 因 $F_0(t,X)$ 对 (t,X) 连续, 又 $X(t)$ 以概率 1 连续, 故

$$A_n\to\int_s^t F_0(\tau,X(\tau))d\tau \quad (\text{a.s.}). \tag{20}$$

其次, 由 (3) 得

$$\begin{aligned}
B_n=&\sum_i\int_s^t F_i(\phi_n(\tau),X(\phi_n(\tau)))a_i(\tau)d\tau\\
&+\sum_i\int_s^t F_i(\phi_n(\tau),X(\phi_n(\tau)))b_i(\tau)dB(\tau).
\end{aligned}$$

仿照引理 2 的证法，得

$$B_n \xrightarrow{P} \sum_i \int_s^t F_i(\tau, X(\tau))a_i(\tau)d\tau + \sum_i \int_s^t F_i(\tau, X(\tau))b_i(\tau)dB(\tau). \tag{21}$$

为研究 C_n, 先在引理 2 中，以 $x_i(t), x_j(t)$ 及 $x_i(t)+x_j(t)$ 代替 $x(t)$, 所得的 (6) 式分别记成 $(6_1),(6_2),(6_3)$, 作 $[(6_3)-(6_1)-(6_2)]/2$ 的式子，即得

$$\begin{aligned}&[x_i(t)-x_i(s)][x_j(t)-x_j(s)]\\ &=\int_s^t \{[x_i(\tau)-x_i(s)]a_j(\tau)+[x_j(\tau)-x_j(s)]a_i(\tau)+b_i(\tau)b_j(\tau)\}d\tau\\ &\quad+\int_s^t \{[x_i(\tau)-x_i(s)]b_j(\tau)+[x_j(\tau)-x_j(s)]b_i(\tau)\}dB(\tau).\end{aligned} \tag{22}$$

以 (22) 代入 C_n 的表达式中，得

$$\begin{aligned}C_n =&\sum_{i,j}\int_s^t F_{i\ j}(\phi_n(\tau), X(\phi_n(\tau)))[(x_i(\tau)-x_i(\phi_n(\tau)))a_i(\tau)\\ &+(x_j(\tau)-x_j(\phi_n(\tau)))a_j(\tau)+b_i(\tau)b_j(\tau)]d\tau\\ &+\sum_{i,j}\int_s^t F_{i\ j}(\phi_n(\tau), X(\phi_n(\tau)))[(x_i(\tau)-x_i(\phi_n(\tau)))b_j(\tau)\\ &+(x_j(\tau)-x_j(\phi_n(\tau)))b_i(\tau)]dB(\tau),\end{aligned}$$

由 $x_k(t)$ 的均匀连续性及 $F_{i\ j}$ 的连续有界性，凡含 $x_k(t)-x_k(\phi_n(\tau))(k=i,j)$ 都趋于 0, 故

$$C_n \to \sum_{i,j}\int_s^t F_{i\ j}(\tau), x(\tau))b_i(\tau)b_j(\tau)d\tau. \tag{23}$$

最后， D_n 中的 $\varepsilon_{i\ j}$ 由于 $X(t)$ 的连续性以概率 1 对 v 一致地趋于 0, $n\to\infty$; 又由引理 3

$$\begin{aligned}&\left(\sum_v |x_i(t_{n\ v})-x_i(t_{n\ v-1})|\,|x_j(t_{n\ v})-x_j(t_{n\ v-1})|\right)^2\\ &\leqslant \sum_v (x_i(t_{n\ v})-x_i(t_{n\ v-1}))^2\cdot\sum_v (x_j(t_{n\ v})-x_j(t_{n\ v-1}))^2\\ &\xrightarrow{P}\int_s^t b_i^2(\tau)d\tau\int_s^t b_j^2(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

故得 $D_n \xrightarrow{P} 0$. 由此及 (20),(21),(23) 即得所欲证. □

§10.3 随机微分方程的马尔科夫过程解

(一) 设已给二元函数 $a(t,\xi)$ 及 $b(t,\xi), t\in[a,b], \xi\in R_1$, 对它们加上一定条件后，可以研究随机微分方程

$$dx(t,\omega)=a[t,x(t,\omega)]dt+b[t,x(t,\omega)]dB(t,\omega), \tag{1}$$

$$x(a,\omega)=A(\omega)\quad (开始条件), \tag{2}$$

其中 $x(t,\omega)(t\in[a,b])$ 是待求的过程， $B(t,\omega)(t\in[a,b])$ 是参数 $\sigma=1$ 的可分 Wiener 过程，$A(\omega)$ 是已给的随机变量. 如上节所述，解方程 (1),(2) 也就是要解随机积分方程

$$x(t)-x(a)=\int_a^t a[s,x(s)]ds+\int_a^t b[s,x(s)]dB(s), \tag{3}$$

$$x(a)=A \tag{4}$$

(ω 均略而不明写).

象解普通微分方程一样，自然地发生三个问题：什么时候解存在和唯一？解有什么性质？容易想象，应该对 $a(t,\xi),b(t,\xi)$ 及 A 加上足够的条件，才能使前两个问题有正确的答案，这时解的性质也依赖于所加的条件. 结果发现，这些条件一般地涉及 $a(t,\xi)$,$b(t,\xi)$ 的某种连续性，或对它们的大小加以控制，此外还假定某种李卜西兹条件. 在这些条件下，可以证明唯一的解是马氏过程.

下面便来正式叙述这方面的一些结果.

设已给满足下列条件的二元函数 $a(t,\xi),b(t,\xi),t\in[a,b],\xi\in R_1$:

H_1: 它们是 (t,ξ) 的二元 Borel 可测函数；

H_2: 存在常数 k, 使

$$|a(t,\xi)|\leqslant k(1+\xi^2)^{\frac{1}{2}},\quad 0\leqslant b(t,\xi)\leqslant k(1+\xi^2)^{\frac{1}{2}};$$

H_3: 关于 t 均匀地满足李卜西兹条件：

$$|a(t,\xi_2)-a(t,\xi_1)|\leqslant k|\xi_2-\xi_1|,$$
$$|b(t,\xi_2)-b(t,\xi_1)|\leqslant k|\xi_2-\xi_1|.$$

对已给的随机变量 $A(\omega)(\equiv x(a,\omega))$, 假定

A_1 : $A(\omega)$ 不依赖于一切 $B(t)-B(s)$, $s,t\in[a,b]$;

A_2 : $EA^2(\omega)<\infty$.

在这些条件下，我们希望寻求满足下列条件的随机过程 $x(t),t\in[a,b]$:

C_1 : $x(t)$ 的一切样本函数在 $[a,b]$ 上连续；

C_2 : $\int_a^b E|x(t)|^2dt<\infty$;

C_3 : 对每 $t\in[a,b],x(t)-x(a)$ 关于 σ 代数 $\mathcal{F}_t$ 可测：

$$\mathcal{F}_t=\mathcal{F}\{A(\omega);B(\tau)-B(a),\,a\leqslant\tau\leqslant t\}. \tag{5}$$

有时候还可以考虑 C_2 的加强条件

C_4 : $E\{\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}x(t,\omega)^2\}<\infty$.

为了保证以下用到的随机积分有意义，先证明下面的

引理 1 设 H_1,H_2,H_3 满足，而且过程 $x(t,\omega)$ 具有性质 C_1,C_2,C_3, 又 $x(a,\omega)=A(\omega)$, 则由

$$\widetilde{x}(t)=\int_a^t a[s,x(s)]ds+\int_a^t b[s,x(s)]dB(s) \tag{6}$$

所定义的任一过程 $\widetilde{x}(t)$ 具有性质 C_2,C_3. 对每个固定的 t, 可以适当地定义 (6) 中第二积分，使 $\widetilde{x}(t)$ 还有 C_1, 这时 $\widetilde{x}(t)$ 也有 C_4.

证 首先证明 (6) 中二积分有意义. 实际上, 由 H_1,H_3 及 C_1 可见对一切 ω, 第一个被积函数是在有界区间中有界的 Borel 可测函数, 故第一积分是 t 的连续函数; 其次, 由 H_1 及 C_1 易见 $b[s,x(s,\omega)]$ 满足 §10.1 中条件 (M.1); 关于 (5) 中的 $\mathcal{F}_t$, (M.2) 显然满足; 又由 H_2

$$\int_a^t E|b(s,x(s))|^2 ds \leqslant k^2 \int_a^b \{1+E|x_s|^2\} ds < \infty,$$

知 ($\bar{S}$.3) 也满足. 因而根据 §10.1 知随机积分 $\int_a^t b[s,x(s)]dB(s)$ 有意义, 它的值在一零测集 (依赖于 t) 上可自由选择.

(6) 中二积分由定义是 $x(s)$ 及 $B(s)-B(a)(a\leqslant s\leqslant t)$ 的可测函数, 由 C_3 知 $x(s)-x(a)$ 为 $\mathcal{F}_s$ 可测. 既然 $x(a)=A$, 故 $x(s)$ 也为 $\mathcal{F}_s$ 可测. 从而 $\widetilde{x}(t)$ 作为二积分的和, 也是 $\mathcal{F}_t$ 可测, 即 $\widetilde{x}(t)$ 也满足 C_3.

在 §10.1 中已证明: (6) 中第二积分当 t 变动时是鞅, 而且对每个 t, 适当选择它的值后可使 $\widetilde{x}(t)$ 以概率 1 连续, 故再在一个不依赖于 t 的零测集上改变它的值后, 可使 $\widetilde{x}(t)$ 具有 C_1. 这样选定的 $\widetilde{x}(t)$ 必定还有 C_4, 这可从下面二式看出:

$$E\left\{\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t a[s,x(s)]ds\right|^2\right\} \leqslant E\left\{\left[\int_a^b |a[s,x(s)]|ds\right]^2\right\}$$
$$\leqslant (b-a)k^2 \int_a^b E\{1+x^2(s)\}ds < \infty; \tag{7}$$

其次, 既然 (6) 中第二积分是鞅, 它的绝对值由 §1.4 例 5 是半鞅, 故由 §1.4 引理 5 及 §10.1c)

$$E\left\{\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t b[s,x(s)]dB(s)\right|^2\right\} \leqslant 4E\left\{\left[\int_a^b b[s,x(s)]dB(s)\right]^2\right\}$$
$$\leq 4\int_a^b E\{b[s,x(s)]^2\}ds \leqslant 4k^2\int_a^b [1+E\{x^2(s)\}]ds < \infty. \tag{8}$$

由 C_4 立得 C_2. 最后注意如 C_2 对一种选定的 $\widetilde{x}(t)$ 成立, 则对各种选择都成立, 因为对固定的 t, 最多只能在一零测集上, 选得与 $\widetilde{x}(t)$ 不同. □

定理 1 设已给满足 H_1,H_2,H_3 的函数 $a(t,\xi),b(t,\xi),t\in[a,b],\xi\in R_1$, 又随机变量 $A(\omega)$ 满足条件 A_1,A_2, 则存在方程 (3),(4) 的解 $x(t,\xi),t\in[a,b]$, 它是具有性质 C_1,C_2,C_3,C_4 的随机过程; 这解在下列意义下唯一: 如 $\widetilde{x}(t,\omega)\,(t\in[a,b])$ 是任一具有 C_1,C_2,C_3 的随机过程解, 则

$$P(x(t,\omega)=\widetilde{x}(t,\omega),\quad 一切t\in[a,b])=1. \tag{9}$$

证 用逐步逼近法解 (3),(4). 取 $x_0(t,\omega)$ 为任一满足 C_1,C_2,C_3 及 $x(a)=A$ 的过程 (例如可取 $x_0(t,\omega)\equiv A(\omega)$) 根据引理 1 可以逐次定义 $x_n(t)$:

$$x_n(t)=A+\int_a^t a[s,x_{n-1}(s)]ds+\int_a^t b[s,x_{n-1}(s)]dB(s), \tag{10}$$

并使每个 $x_n(t)$ 都具有 C_1,C_2,C_3,C_4. 现在证明: 几乎对一切 ω, 存在关于 t 均匀收敛的极限

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t,\omega)=x(t,\omega); \tag{11}$$

这极限 $x(t,\omega)\,(t\in[a,b])$ 是具有 C_1,C_2,C_3,C_4 的过程；而且以概率 1 关于 t 均匀地有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^t a[s,x_n(s)]ds=\int_a^t a[s,x(s)]ds, \tag{12}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^t b[s,x_n(s)]dB(s)=\int_a^t b[s,x(s)]dB(s), \tag{13}$$

从而 $x(t,\omega)$ 是 (3),(4) 的解.

为了证明这些结论，记

$$\left.\begin{aligned}\Delta_n x(t)&=x_n(t)-x_{n-1}(t),\\ \Delta_n a(t)&=a[t,x_n(t)]-a[t,x_{n-1}(t)],\\ \Delta_n b(t)&=b[t,x_n(t)]-b[t,x_{n-1}(t)].\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

由 H_3 得

$$|\Delta_n a(t)|\leqslant k|\Delta_n x(t)|,\qquad |\Delta_n b(t)|\leqslant k|\Delta_n x(t)|. \tag{15}$$

利用 Чебышев 不等式

$$\begin{aligned}P\left\{\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t\Delta_n a(s)ds\right|\geqslant 2^{-n}\right\}&\leqslant P\left\{\int_a^b k|\Delta_n x(s)|ds\geqslant 2^{-n}\right\}\\ &\leqslant 4^n E\left\{\left[\int_a^b k|\Delta_n x(s)|ds\right]^2\right\}.\end{aligned} \tag{16}$$

然而由 (10)

$$\Delta_n x(t)=\int_a^t\Delta_{n-1}a(s)ds+\int_a^t\Delta_{n-1}b(s)dB(s),$$

根据不等式

$$\left(\sum_{k=1}^n G_k\right)^2\leqslant n\sum_{k=1}^n G_k^2, \tag{17}$$

并利用 (15), 便得

$$\begin{aligned}E\{|\Delta_n x(t)|^2\}&\leqslant 2E\left\{\left|\int_a^t\Delta_{n-1}a(s)ds\right|^2\right\}+2E\left\{\left|\int_a^t\Delta_{n-1}b(s)dB(s)\right|^2\right\}\\ &\leqslant 2k^2(b-a+1)\int_a^t E\{|\Delta_{n-1}x(s)|^2\}ds\quad(n\geqslant 1);\end{aligned}$$

对 $E\{|\Delta_{n-1}x(s)|^2\}$ 再用此估计式，如此连用下去，可见对任意 $t\in[a,b]$, 由 C_4 有

$$\begin{aligned}E\{|\Delta_n x(t)|^2\}&\leqslant\left[2k^2(b-a+1)\right]^{n-1}\int_a^t\int_a^{t_1}\cdots\int_a^{t_{n-2}}E|\Delta_1 x(t_{n-1})|^2dt_{n-1}\cdots dt_1\\ &\leqslant[2k^2(b-a+1)]^{n-1}\cdot E\{\max_{a\leqslant t\leqslant b}(\Delta_1 x(t))^2\}\cdot\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}\leqslant\frac{c^{n-1}}{(n-1)!},\end{aligned} \tag{18}$$

其中 c 是某常数. 以 (18) 代入 (16), 得 (16) 最右方值不超过

$$\frac{4^n(b-a)k^2c^{n-1}}{(n-1)!},$$

而这是收敛级数的公项．因此，根据 Borel-Cantelli 引理，对几乎一切 ω, 存在正整数 $N(=N(\omega))$, 使 $n \geqslant N$ 时，有

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t \Delta_n a(s)ds\right| < 2^{-n}. \tag{19}$$

其次，按 §10.1 定理 1, 过程 $\int_a^t \Delta_n b(s)dB(s)$ $(t\in[a,b])$ 是鞅，它的绝对值成半鞅，由 §1.4 引理 4 得

$$P\left\{\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t \Delta_n b(s)dB(s)\right| \geqslant 2^{-n}\right\} \leqslant 4^n E\left\{\left|\int_a^b \Delta_n b(s)dB(s)\right|^2\right\},$$

再由 §10.1c) 及 (15),(18) 最后一项等于

$$4^n\int_a^b E\{|\Delta_n b(s)|^2\}ds \leqslant 4^n k^2\int_a^b E\{[\Delta_n x(s)]^2\}ds \leqslant \frac{4^n k^2 c^{n-1}}{(n-1)!}(b-a),$$

于是同上知：对几乎一切 ω, 存在 $N_1(=N_1(\omega))$, 当 $n\geqslant N_1$ 时

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t \Delta_n b(s)dB(s)\right| < 2^{-n}. \tag{20}$$

由 (19),(20) 可见 (10) 中右方二积分以概率 1 当 $n\to\infty$ 时，关于 t 均匀地趋于极限，故 (11) 中收敛也如此，于是 $x(t,\omega), t\in[a,b]$ 以概率 1 是连续函数．在一零测集 (不依赖于 t) 上改定义 $x(t), t\in[a,b]$, 可使 $x(t)$ 同时满足 C_1,C_3. 今证它还有 C_2, 从而再由引理 1, 知它也有 C_4. 实际上，对每个固定的 t, 当 $n>m, m\to\infty$ 时 [1]

$$\begin{aligned} E\{[x_n(t)-x_m(t)]^2\} &= E\left\{\left[\sum_{j=m+1}^n \Delta_j x(t)\right]^2\right\} \\ &\leqslant 2^{-m}\sum_{j=m+1}^n 2^j E\{[\Delta_j x(t)]^2\} \leqslant 2^{-m}\sum_j^\infty \frac{(2c)^j}{j!}\to 0, \end{aligned} \tag{21}$$

故存在极限 $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, x_n(t)$. 因为均方收敛极限与几乎处处收敛极限相同 (a.s.), 故在上式中令 $n\to\infty$ 便得

$$E\{[x(t)-x_m(t)]^2\} \leqslant 2^{-m}\sum_j^\infty \frac{(2c)^j}{j!},$$

这样便证明了： $x(t)$ 有 C_2.

今证 (12),(13) 以概率 1 关于 t 均匀成立．上面已证明 (12),(13) 中左方积分关于 t 均匀收敛 (a.s.), 于是由 (11) 及 H_3 得证 (12). (13) 则可由下列不等式及 Borel-Cantelli 引理推出：

$$\begin{aligned} &P\left\{\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t\{b[s,x(s)]-b[s,x_n(s)]\}dB(s)\right| \geqslant \frac{1}{n}\right\} \\ &\leqslant n^2\int_a^b E[\{b[s,x(s)]-b[s,x_n(s)]\}^2]ds \\ &\leqslant k^2n^2\int_a^b E\{[x(s)-x_n(s)]^2\}ds \leqslant k^2n^2 2^{-n}\sum_1^\infty \frac{(2c)^j}{j!}(b-a). \end{aligned} \tag{22}$$

---

[1] 利用不等式 $\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i\right)^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^n 2^i a_i^2$

现在证唯一性．设 $x(t)$,$\widetilde{x}(t)$ 是 (3),(4) 的两个解，而且都有性质 C_1, C_2,C_3. 利用证明 (18) 的方法，可得

$$E|x(t)-\widetilde{x}(t)|^2 \leqslant \frac{c^n}{n!}, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

于是 $P(x(t)=\widetilde{x}(t))=1$, 从而

$P(x(r)=\widetilde{x}(r)$ 对 $[a,b]$ 中一切有理点 r 成立$)=1$; 由此并利用 C_1 即得 (9). □

(二) 试进一步研究由定理 1 所确定的过程 $x(t,\omega)\,(t\in[a,b])$ 的性质．因为它是方程

$$x(t,\omega)=A(\omega)+\int_a^t a[s,x(s)]ds+\int_a^t b[s,x(s)]dB(s) \tag{23}$$

的解，故对任意 $\tau, a\leqslant\tau\leqslant t\leqslant b$, 有

$$x(t,\omega)=x(\tau,\omega)+\int_\tau^t a[s,x(s)]ds+\int_\tau^t b[s,x(s)]dB(s). \tag{24}$$

根据 C_3, $x(\tau)$ 关于 $\mathcal{F}_\tau$ 可测 (注意 $x(a,\omega)\equiv A(\omega)$), 因此，由 A_1 及 Wiener 过程增量的独立性得知， $x(\tau)$ 不依赖于 $B(t)-B(s)$, $s,t\in[\tau,b]$; 回忆 C_4, 可见对 $x(\tau)$, 条件 A_1(其中 $[a,b]$ 应换为 $[\tau,b]$) 及 A_2 都满足．因此 $x(\tau)$ 对 (24) 的作用，正如 $A(\omega)$ 对 (23) 一样．应用定理 1 于 (24), 由其中的 C_3 得知， $x(t,\omega)$ 是 $\mathcal{F}\{x(\tau,\omega),B(s,\omega)-B(\tau,\omega),\ \tau\leqslant s\leqslant t\}$ 的可测函数．故由附篇引理 6, 存在无穷维 Borel 可测函数 $f(x_0,x_1,x_2,\cdots)(x_i\in R_1)$ 及 $t_i\in[\tau,t], i=1,2,\cdots$, 使

$$x(t)=f(x(\tau),\,B(t_1)-B(\tau),\,B(t_2)-B(\tau),\cdots).$$

既然 $x(u,\omega)\,(u\leqslant t)$ 是 $\mathcal{F}\{A(\omega),B(v,\omega)-B(a,\omega),a\leqslant v\leqslant u\}$ 的可测函数，故 $B(s,\omega)-B(\tau,\omega),(\tau\leqslant s\leqslant t)$ 与 $x(u,\omega)(a\leqslant u\leqslant\tau)$ 独立．于是根据 §4.5 ,12 题及其注，便证明了 $x(t,\omega), a\leqslant t\leqslant b$ 是马氏过程．它的转移概率为

$$p(\tau,\xi,t,A)=P(x_\xi(t,\omega)\in A)\ (A\in\mathcal{B}_1), \tag{25}$$

这里 $x_\xi(t,\omega)$ 是方程 (24) 在条件 $P(x(\tau,\omega)=\xi)=1$ 下的解，这时概率 P 集中在 $(x(\tau,\omega)=\xi)$ 上．

现在来研究 $x(t,\omega), t\in[a,b]$ 的无穷小算子．对任意二次连续可微而且在有界集外等于 0 的函数 $f(\xi),\xi\in R_1$, 定义

$$A_\tau f(\xi)=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\int_{R_1}f(\eta)p(\tau,\xi,\tau+\Delta\tau,d\eta)-f(\xi)}{\Delta\tau}, \tag{26}$$

其中收敛是逐点意义下的，试证

$$A_\tau f(\xi)=a(\tau,\xi)f'(\xi)+\frac{1}{2}b(\tau,\xi)^2 f''(\xi). \tag{27}$$

实际上，记上述 $x_\xi(t,\omega)$ 为 $Y(t,\omega)$, 则由

$$\left.\begin{aligned} dY(t)&=a[t,Y(t)]dt+b[t,Y(t)]dB(t),\\ Y(t)&=\xi \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

及 §10.2 定理 1 得

$$
\begin{aligned}
&f(Y(\tau+\Delta\tau))-f(\xi)\\
&\quad=\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}\left\{f'(Y(t))a(t,Y(t))+\frac{1}{2}f''(Y(t))b(t,Y(t))^2\right\}dt\\
&\qquad+\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}f'(Y(t))b(t,Y(t))dB(t),\\
&Ef(Y(\tau+\Delta\tau))-f(\xi)\\
&\quad=\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}E\left\{f'(Y(t))a(t,Y(t))+\frac{1}{2}f''(Y(t))b(t,Y(t))^2\right\}dt,
\end{aligned}
$$

后式中用到 §10.1 性质 c); 这里可在积分号下取极限的原因是： $f'(\xi),f''(\xi)$ 都是在有界集外为 0 的连续函数，故被积函数是 (s,ω) 的有界函数.

根据上一段 (25) 式，有

$$
p(\tau,\xi,\tau+\Delta\tau,A)=P(Y(\tau+\Delta\tau)\in A),
$$

故

$$
E(f(Y(\tau+\Delta\tau))-f(\xi))=\int_{R_1}(f(\eta)-f(\xi))p(\tau,\xi,\tau+\Delta\tau,d\eta),
$$

于是

$$
\begin{aligned}
A_\tau f(\xi)&=\lim_{\Delta\tau\to0}\frac{1}{\Delta\tau}\int_{R_1}[f(\eta)-f(\xi)]p(\tau,\xi,\tau+\Delta\tau,d\eta)\\
&=\lim_{\Delta\tau\to0}\frac{1}{\Delta\tau}\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}E\left\{f'(Y(t))a(t,Y(t))+\frac{1}{2}f''(Y(t))b(t,Y(t))^2\right\}dt,
\end{aligned}
$$

然而 {} 中的函数有界，而且当 $\Delta\tau\to0$ 时趋于 $f'(\xi)a(\tau,\xi)+\frac{1}{2}f''(\xi)b(t,\xi)^2$ 此极限不依赖于 ω, 故得证 (27).

总结上述，得

定理 2 设 $x(t,\omega)\,(t\in[a,b])$ 是由定理 1 所确定的过程，则它是马氏过程；转移概率由 (25) 给出；而且 (27) 式成立，其中 f 是二次连续可微而且在有界集外等于 0 的函数；又如 $a(t,\xi)$, $b(t,\xi)$ 与 t 无关，则解 $x(t,\omega)\,(t\in[a,b])$ 的转移概率是齐次的.

证 只要证最后一结论. 由 (25), 只要证

$$
\begin{aligned}
x(t)&=\xi+\int_{\tau}^{t}a(x(s))ds+\int_{\tau}^{t}b(x(s))dB(s),\\
z(t+u)&=\xi+\int_{\tau+u}^{t+u}a(x(s))ds+\int_{\tau+u}^{t+u}b(x(s))dB(s)
\end{aligned}
$$

的解 $x(t)$ 与 $z(t+u)$ 有相同的分布. $x(t)$ 及 $z(t+u)$ 可看成自 $x_0(t)\equiv\xi$ 及 $z_0(t+u)\equiv\xi$ 出发 (即 0 次逼近) 的逐次逼近解. 第 n 次逼近式分别记成 $x_n(t),z_n(t+u)$, 对 n 用归纳法，可见 $x_n(t)$ 是 $(B(s)-B(\tau),\tau\leqslant s\leqslant t)$ 的可测函数， $z_n(t+u)$ 是 $(B(s+t)-B(\tau+u),\tau\leqslant s\leqslant t)$ 的可

测函数，而且二者有相同的形式，换句话说，存在无穷维 Borel 可测函数 $F_{nt}(\xi_S,\tau\leqslant s\leqslant t)$，使

$$x_n(t)=F_{nt}(B(s)-B(\tau),\tau\leqslant s\leqslant t)\qquad \text{(a.s.)},$$
$$z_n(t+u)=F_{nt}(B(s+u)-B(\tau+u),\tau\leqslant s\leqslant t)\quad \text{(a.s.)}.$$

既然 $(B(s)-B(\tau),\tau\leqslant s\leqslant t)$ 与 $(B(s+u)-B(\tau+u),\tau\leqslant s\leqslant t)$ 有相同的分布，故 $x_n(t),z_n(t+u)$ 也有相同的分布，于是它们的极限 $x(t)$ 及 $z(t+u)$ 也如此. □

(三) 例.

例 1 如 $b(t,\xi)\equiv 0$, 则 (1),(2) 化为

$$dx(t,\omega)=a(t,x(t,\omega))dt,$$
$$x(a,\omega)=A(\omega).$$

当 ω 固定时，上二方程是普通的微分方程，故可用通常的方法解之. 在这例中， Wiener 过程不出现.

例 2 如 $a(t,\xi)\equiv 0,\ b(t,\xi)=b(t)$ 不依赖于 ξ, 则 (3),(4) 可合写为

$$x(t,\omega)=A(\omega)+\int_a^t b(s)dB(s). \tag{29}$$

右方被积函数中不出现待求的过程，此积分重合于 §8.2 中所定义的关于 Wiener 过程的积分 (参看 §8.2 例 1). 只要 $b(s)$ 为 Borel 可测，而且

$$\int_a^b |b(s)|^2 ds<\infty,$$

(29) 中随机积分便有定义. 计算此积分后，加上 $A(\omega)$ 便得 $x(t,\omega),t\in[a,b]$.

由于 Wiener 过程的增量有正态分布，故 (29) 中随机积分也有正态分布，利用 §10.1 c), 得

$$E\int_a^t b(s)dB(s)=0,$$
$$E\left|\int_a^t b(s)dB(s)\right|^2=\int_a^t |b(s)|^2ds.$$

由此可见 $\int_a^t b(s)dB(s)$ 有正态分布 $\mathcal{N}(0,[\int_a^t |b(s)|^2ds]^{\frac{1}{2}})$.

为求转移概率，利用 (25)

$$p(\tau,\xi,t,A)=P(x_\xi(t,\omega)\in A)=P\left(\xi+\int_\tau^t b(s)dB(s)\in A\right)$$
$$=P\left(\int_\tau^t b(s)dB(s)\in A-\xi\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}}\int_{A-\xi}e^{-\lambda^2/2\Delta}d\lambda,$$

其中集 $A-\xi=(\eta-\xi:\eta\in A)$; 参数 Δ 为

$$\Delta=\int_\tau^t |b(s)|^2ds.$$

鉴于 (29) 的表达形式，自然称 $x(t,\omega)\,(t\in[a,b])$ 是从 Wiener 过程 **经时间变换** 而得到的马氏过程. 特别，如 $b(s)$ 恒等于常数，它还是齐次的.

例 3 郎之万(Langevin)方程 为

$$dx(t)=-\alpha x(t)dt+\beta dB(t), \tag{30}$$

其中 α,β 是二正常数. 利用 §10.2 定理 1, 取 $n=1$, $F(t,x)=e^{at}x$, 得

$$d(e^{at}x(t))=0\cdot dt+\beta e^{at}dB(t),$$

亦即

$$e^{at}x(t)-e^{a\tau}x(\tau)=\beta\int_{\tau}^{t}e^{as}dB(s), \tag{31}$$

或者

$$x(t)-e^{a(\tau-t)}x(\tau)=\beta\int_{\tau}^{t}e^{-a(t-s)}dB(s), \tag{32}$$

右方被积函数不依赖于 ω. 因为

$$\int_{-\infty}^{t}|e^{-a(t-s)}|^2ds<\infty,$$

故 (32) 右方项当 $\tau\to-\infty$ 时均方收敛于某随机变量，故存在均方极限 $y(\omega)=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\,e^{a\tau}x(\tau)$. 于是 (32) 化为

$$x(t)-e^{-at}y(\omega)=\beta\int_{-\infty}^{t}e^{-a(t-s)}dB(s). \tag{33}$$

如果假定所求的解满足条件："$\{E|x(t)|^2,\ t\in R_1\}$ 有界", 则 $y(\omega)=0$ (a.s.) 而 (33) 化为

$$x(t)=\beta\int_{-\infty}^{t}e^{-a(t-u)}dB(u). \tag{34}$$

于是得到了 Ornstein-Uhlenbeck 过程，我们已在 §8.2 例 1 及 §9.3 (二) 中遇到它. 以前已证明它是正态、平稳的马氏过程，甚至证明了它在一定意义下是具有这些性质的唯一过程，并求出了它的谱密度等等.

由于 $x(t)$ 是 (30) 的解，而 α,β 与 t 无关，故由定理 2 知 $x(t)$ 是齐次马氏过程，(27) 化为

$$A_\tau f(\xi)=-\alpha\xi f'(\xi)+\frac{1}{2}\beta^2f''(\xi).$$

附记. 自然，除 Wiener 过程外，随机积分还可以关于其它过程或随机测度而定义，详见 [16] 及下列文献 1,3. 在 1 中特别地证明了，如 $a(t,\xi)$, $b(t,\xi)$ 满足 H_3, 而且是 (t,ξ) 的连续函数，那么方程 (3),(4) 有唯一的连续的马氏过程解 $x(t,\omega)$, $t\in[a,b]$. 用随机微分方程的方法，还可研究更一般的所谓混合型马氏过程 (以间断型及扩散过程为特例), 见 1 及其中所引文献.

参 考 文 献

[1] Скороход, А. В., Исследования по теории случайных процессов, 1961

[2] Doob, J. L., *Martingales and one dimensional diffusion*, Trans. AMS, 78(1955), 168–208.

[3] Utô K., *On stochastic differential equations*, Mem. AMS, 4(1951), 1–51.

[4] Скороход, А. В., Стохастические уравнения для процессов диффузии с границами, I, II, Теория вероят. и её прим., 6:3(1961), 287–298; 7:1, 5–25.

[5] Гирсанов, И. В., Пример неединственности решения стохастического уравнения К. Ито, Теория вероят. и её прим., 1961, 336–342.

附篇　测度论的基本知识[1]

(一) 设 Ω 是抽象点 ω 的集， $\Omega = (\omega)$. Ω 的某些子集所成的集 $\mathcal{F} = \{A\}$ 称为 Ω 中的 **σ代数**[2]，如果

1.1. $\Omega \in \mathcal{F}$;

1.2. 如 $A \in \mathcal{F}$, 则 $\overline{A} = \Omega - A \in \mathcal{F}$;

1.3. 如 $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \cdots$, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

由此可以推知：

1.4. $\phi = \Omega - \Omega \in \mathcal{F}$;

1.5. 如 $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \cdots$, 则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i} \in \mathcal{F}$.

称集 Ω 为 **可测空间**, 如果在 Ω 上已确定了一 σ 代数 $\mathcal{F}$; 通常记此可测空间为 $(\Omega, \mathcal{F})$. $\mathcal{F}$ 中的集称为 **$\mathcal{F}$-可测集**; 如果没有其它的 σ 代数足以混淆时，就简称为 **可测集**.

定义在 $\mathcal{F}$ 上的集函数 $P(A)$ $(A \in \mathcal{F})$, 取实数及二无穷 ∞ 及 $-\infty$ 之一为值，如果 $P(\phi) = 0$; 而且具有 **完全可加性**, 即如

2.1. 对有穷或可列多个集 $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \cdots, A_iA_j = \phi, i \neq j$, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1} A_i\right) = \sum_{i=1} P(A_i), \tag{1}$$

就称 P 为 $\mathcal{F}$ 上的 **广义测度**; 非负的广义测度称为 **测度**, 满足条件：

2.2. $P(\Omega) = 1$ 的测度称为 **概率测度**, 或简称 **概率**.

把三个对象 $\Omega, \mathcal{F}$ 及 P 写在一起，称 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为 **测度空间**; 特别，当 P 为 $\mathcal{F}$ 上的概率时，称 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为 **概率空间**.

比 σ 代数较宽的概念是所谓代数. 称 Ω 的某子集系 $\mathcal{F}$ 为 Ω 上的 **代数**, 如果 $\mathcal{F}$ 满足条件

1.1′. $\Omega \in \mathcal{F}$;

1.2′. 如 $A \in \mathcal{F}$, 则 $\overline{A} \in \mathcal{F}$;

1.3′. 如 $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \cdots, n$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$, 这里 n 为任意正整数.

显然任何 σ 代数是一代数，而且上述 1.4 及 1.5 也对代数成立，但此时 1.5 中 i 只取有限多个值.

类似地可以定义代数 $\mathcal{F}$ 上的广义测度与测度 P, 只是 2.1 应修改为

2.1′. 对 $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \cdots, A_iA_j = \phi, i \neq j$, 又 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

---

[1]本篇叙述本书要用到的测度论知识. 凡是在 [20] 中能找到证明的定理，这里都不重新证明.

[2]如事先假定 $\mathcal{F}$ 不空，则条件 1.1 可自 1.2 与 1.3 推出. 又集 $(\omega : \omega \in A, \omega \in B)$ 记为 $A \cap B$ 或 AB. 集 $\overline{A}$ 称为 A 的 **补集**.

设 P 是代数 $\mathcal{F}$ 上的测度，$A \in \mathcal{F}$. 如 $P(A) < \infty$, 就说 A**有有穷测度**; 如存在一列集 $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$, 使

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ P(A_n) < \infty,\ n = 1, 2, \cdots,$$

就说 A**的测度是** σ **有穷的**. 如 $\mathcal{F}$ 中每一集 A(等价地，空间 Ω) 的测度有穷 (或 σ 有穷), 就说 **测度** P **是有穷的** (**或** σ **有穷的**). 称 P 是 **完全的**, 如果 $A \in \mathcal{F}$, $P(A) = 0$, $B \subset A$, 则 $B \in \mathcal{F}$, 因而 $P(B)$ 必等于 0.

以后我们称每个测度为 0 的集为 0**测集**.

完全可加性条件有时很难验证，试给出与它等价的条件.

定理 1 为使定义在 σ 代数 (或代数)$\mathcal{F}$ 上的非负，有穷函数 $P(A)$ 具有完全可加性 2.1, 充分必要条件是:

(i) 可加性：即对任意有穷多个 $A_i \in \mathcal{F}$, $A_iA_j = \phi$, $i \neq j$, $i = 1, \cdots, n$, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(ii) 连续性：即对任一列 $\{A_n\} \in \mathcal{F}$, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, 如果 $\bigcap_n A_n = \phi$, 则

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$$

条件 (ii) 称为 **连续性公理**.

设 Ω 的子集系为 $\mathcal{A} = (A)$, 它本身未必是一代数或 σ 代数. Ω 中一切包含 $\mathcal{A}$ 的 σ 代数的交仍然是包含 $\mathcal{A}$ 的 σ 代数，记此交所成的 σ 代数为 $\mathcal{F}\{\mathcal{A}\}$. 显然，$\mathcal{F}\{\mathcal{A}\}$ 具有如下的最小性：如 $\mathcal{F}$ 为任一含 $\mathcal{A}$ 的 σ 代数，则 $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}\{\mathcal{A}\}$. 因此，称 $\mathcal{F}\{\mathcal{A}\}$ 为 **含** $\mathcal{A}$ **的最小** σ **代数**, 有时也称 **由** $\mathcal{A}$ **所产生的** σ **代数**.

下面二定理非常重要，在实际中，起初常常是在一代数上定义一 σ 有穷测度，然后扩大它的定义域到某些更大的 σ 代数上去.

定理 2 (测度的扩张) 设 P 是代数 $\mathcal{A}$ 上的 σ 有穷测度，则在 $\mathcal{F}\{\mathcal{A}\}$ 上存在唯一的 σ 有穷测度 $\overline{P}$, 使对任意 $A \in \mathcal{A}$, 有 $\overline{P}(A) = P(A)$.

$\overline{P}(A)$ 称为 P 的 **扩张**.

定理 3 (测度的完全化) 设 μ 是 σ 代数 $\mathcal{F}$ 上的测度，则一切形如 [1] $A\Delta\mathcal{N}$ 的集构成含 $\mathcal{F}$ 的 σ 代数 $\widetilde{\mathcal{F}}$, 这里 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{F}$ 中某 0 测集的子集，$A \in \mathcal{F}$; 如定义集函数 $\overline{\mu}(A\Delta\mathcal{N}) = \mu(A)$, 则 $\overline{\mu}$ 是 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 上的完全化测度.

$\overline{\mu}$ 称为 μ 的完全化测度，而 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 称为 $\mathcal{F}$ 关于 μ 的 **完全化** σ **代数**. 注意 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 不仅依赖于 $\mathcal{F}$, 而且依赖于 μ. 显然，$\widetilde{\mathcal{F}} \supset \mathcal{F}$.

比代数及 σ 代数稍宽的概念是 **环** 与 σ**环**. 称非空集系 R 为环，如果由 $A_1 \in R$, $A_2 \in R$, 可推出 $A_1 \cup A_2 \in R$, $A_1 - A_2 \in R$. 称非空集系 S 为 σ 环，如果由 $A_i \in S$, $i = 1, 2$, 可推出 $A_1 - A_2 \in S$; 而且由 $A_i \in S$, $i = 1, 2, \cdots$, 有穷或可列多个，可推出 $\bigcup_{i=1} A_i \in S$.

环 (或 σ 环) 是代数 (或 σ 代数) 的充分必要条件是它包含 Ω.

---

[1] $A\Delta B$ 表集 A, B 的对称差，即集 $(A - B) \cup (B - A)$.

完全一样地可在环 (或 σ 环) 上定义广义测度与测度. 类似地定义测度的有穷性、σ 有穷性及完全性. 定理 1,2,3 中, 以 "环""σ 环" 分别替换 "代数" 与 "σ 代数" 后, 结论仍然成立.

然而, 以后我们很少遇到环或 σ 环.

(二) 作为可测空间的重要特例是 n **维** Borel **可测空间**$(R_n, \mathcal{B}_n)$, 这里 R_n 是 n 维实数空间, 即 R_n 中每一点是 n 维点 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, 其中每一坐标 $\lambda_i \in R_1$(全体实数空间), 而 $\mathcal{B}_n$ 是 R_n 中全体开集所成的子集系 $\mathcal{F}_0$ 所产生的 σ 代数, 即

$$\mathcal{B}_n = \mathcal{F}\{\mathcal{F}_0\}.$$

考虑 R_n 中以下各子集系:

$\mathcal{F}_1 = \{$全体闭集$\}$;

$\mathcal{F}_2 = \{$全体 n 维开或闭区间$\}$;

$\mathcal{F}_3 = \{$全体 n 维半无穷区间 $\prod_{j=1}^{n}(-\infty, \mu_j]\}$;

$\mathcal{F}_4 = \{$全体如下形集的有穷和 $\prod_{j=1}^{n}(\lambda_j, \mu_j]\}$ [1]. (在 $\mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$ 中, λ_i, μ_i 可取无穷值, 但如 $\mu_j = \infty$, 则 $(-\infty, \mu_j]$ 及 $(\lambda_j, \mu_j]$ 应改为 $(-\infty, \mu_j)$ 及 (λ_j, μ_j).) 可以证明

$$\mathcal{B}_n = \mathcal{F}\{\mathcal{F}_j\}, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4.$$

注意 $\mathcal{F}_4$ 是 R_n 中的代数.

以后称 $\mathcal{B}_n$ 中每一集为 n**维** Borel **可测集**, 当 $n = 1$ 时, 常将 "一维" 二字省去.

利用 n 维分布函数, 可以在 $\mathcal{B}_n$ 上造出一概率测度. 称 n 元实值函数 $F(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, $\lambda_j \in R_1$, 为 n**维分布函数**, 如果它具有下列性质 [2]:

3.1. 关于每个 λ_i 是不下降右连续函数.

3.2.

$$\lim_{\lambda_j \to -\infty} F(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = 0, \ j = 1, \cdots, n; \tag{2}$$

$$\lim_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n \to \infty} F(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = 1. \tag{3}$$

3.3. 如 $\lambda_j \leqslant \mu_j$ $(j = 1, \cdots, n)$, 则

$$\begin{aligned} &F(\mu_1, \cdots, \mu_n) - \sum_{j=1}^{n} F(\mu_1, \cdots, \mu_{j-1}, \lambda_j, \mu_{j+1}, \cdots, \mu_n) \\ &+ \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} F(\mu_1, \cdots, \mu_{j-1}, \lambda_j, \mu_{j+1}, \cdots, \mu_{k-1}, \lambda_k, \mu_{k+1}, \cdots, \mu_n) \\ &- \cdots + (-1)^n F(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4}$$

[1] $\prod_{j=1}^{n}(\lambda_j, \mu_j]$ 表 n 维点集 $\{(x_1, \cdots, x_n) : \lambda 1 < x_1 \leqslant \mu_1, \cdots, \lambda_n < x_n \leqslant \mu_n\}$.

[2] 如 $F(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 只满足 3.1 及 3.3, 便称为 n**维广义分布函数**, 它也在 $\mathcal{B}_n$ 上唯一决定测度 P_F, 满足 (5)(只是 P_F 未必是概率测度), 证明见关肇直: 泛函分析讲义, 1958,619 页.

可以证明，在 $\mathcal{B}_n$ 上存在唯一概率测度 P_F, 满足条件

$$P_F\left(\prod_{j=1}^{n}(-\infty,\mu_j]\right)=F(\mu_1,\cdots,\mu_n). \tag{5}$$

P_F 产生的步骤如下：对 $\mathcal{F}_3$ 中的集，用 (5) 定义 P_F; 对集 $\prod\limits_{j=1}^{n}(\lambda_j,\mu_j]$, 用 (4) 中左方值定义 P_F. 对 $\mathcal{F}_4$ 中任一集 A, 可表为有穷个互不相交的形如 $\prod\limits_{j=1}^{n}(\lambda_j,\mu_j]$ 的集的和，然后用加法定义 $P_F(A)$ 的值为诸 $P_F\left(\prod\limits_{j=1}^{n}(\lambda_j,\mu_j]\right)$ 的和. 在 $\mathcal{F}_4$ 上，P_F 是有穷测度 (其实，$P_F(R_n)=1$). 由扩张定理，可以将 P_F 唯一地开拓到 $\mathcal{B}_n$ 上，使 (5) 成立.

$\mathcal{B}_n$ 关于 P_F 的完全化 σ 代数记为 $\mathcal{B}_{n,F}$. 定义在 $\mathcal{B}_{n,F}$ 上的完全化测度仍记为 P_F, 并称为 **由 F 产生的** Lebesgue-Stieltjes **测度**, $\mathcal{B}_{n,F}$ 中的集称为 **关于 F 的可测集**. 有时候，简记完全化测度 P_F 为 F, 因此，F 或表分布函数，或表测度，这由上下文来看是不难区别的.

这样，便得到了测度空间 $(R_n,\mathcal{B}_n,F)$ 及它的完全化 $(R_n,\mathcal{B}_{n,F},F)$, $F(R_n)=1$.

进一步可考虑 **无穷维** Borel **可测空间**. 设 T 为任一实数集 [1], 试定义可测空间 $(R_T,\mathcal{B}_T)$.

令 $\lambda(t)(t\in T)$ 是以 T 为定义域的实值函数，全体这样的函数构成空间 R_T, 即

$$R_T=\{\lambda(t),t\in T\},$$

因此，R_T 中的一个点是 T 上的一个实值函数. 任取 n 个实值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 考虑 R_T 的子集

$$W_n=(\lambda(t):\lambda(t_1)\leqslant\lambda_1,\cdots,\lambda(t_n)\leqslant\lambda_n), \tag{6}$$

这里 $t_j\in T$ 任意固定，$j=1,\cdots,n$ (λ_j 可取为 ∞, 但此时 $\lambda(t_j)\leqslant\lambda_j$ 应改为 $\lambda(t_j)<\lambda_j$), 可见 $W_n=W_n(t_1,\cdots,t_n;\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 实际上依赖于 $t_1,\cdots,t_n;\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 因为 W_n 是由如下的函数 $\lambda(t)(t\in T)$ 所成的集，它在 t_j 上的值，或者说，它的"第 t_j 个"坐标，不超过 λ_j(小于 λ_j, 如 $\lambda_j=\infty$). 现在令 n,t_j 及 λ_j 分别在正整数集、T 及 $R_1\cup\{\infty\}$ 中变动，$j=1,\cdots,n$, 便得到 R_T 中一子集系 $W=(W_n)$, 我们定义 $\mathcal{B}_T=\mathcal{F}\{W\}$. 称 $\mathcal{B}_T$ 中任一集为 R_T **中** Borel **可测集**.

$\mathcal{B}_T$ 也可以由其它集系产生. 任意取一正整数 n, n 维 Borel 集 B_n 及 $t_j\in T, 1\leqslant j\leqslant n$. R_T 中子集

$$C_n=(\lambda(t):(\lambda(t_1),\cdots,\lambda(t_n))\in B_n) \tag{7}$$

称为 **以 B_n 为底的 n 维柱集**, 显然，(6) 中的 W_n 是以 $\prod\limits_{j=1}^{n}(-\infty,\lambda_j]$ 为底的 n 维柱集.

当 n,B_n 及 $t_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 变动时，所得的全体柱集的集记为 C, $C=(C_n)$. 容易看出 $\mathcal{B}_T=\mathcal{F}\{C\}$.

上面我们利用分布函数 $F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, 产生了 $\mathcal{B}_n$ 上一个概率测度 F, 对 $\mathcal{B}_T$, 自然会想到与此相当的问题. 然而，这时情况复杂得多.

我们先从反面的问题想起.

[1] 由下述 $(R_T,\mathcal{B}_T)$ 的造法可见，如 $T=(1,2,\cdots,n)$, 则 $(R_T,\mathcal{B}_T)$ 化为 $(R_n,\mathcal{B}_n)$.

假定在 $\mathcal{B}_T$ 上已有一概率测度 P, 对 T 中任意 n 个元 $t_1,\cdots,t_n$, 定义 n 元 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的实值函数 $F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 为

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=P(W_n), \tag{8}$$

这里 W_n 由 (6) 定义而 $t_1,\cdots,t_n$ 为参数. 容易看出, 作为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的函数, $F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 满足条件 3.1,3.2 及 3.3 (3.3 成立是因为 (4) 中左方值等于 $P(\bigcap\limits_{j=1}^{n}(\lambda(t):\lambda_j<\lambda(t_j)\leqslant\mu_j))$. 因此, 它是一个 n 维分布函数. 当 n 在正整数集而 t_j 在 $T(1\leqslant j\leqslant n)$ 中变动时, 由 P 通过 (8) 便得到一族有穷维分布函数

$$F=\{F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\}. \tag{9}$$

分布函数集 F 显然满足下列二条件 4.1 及 4.2, 以后称它们为 **相容性条件**:

4.1. 对 $(1,\cdots,n)$ 的任一排列 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 有

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=F_{t_{\alpha_1},\cdots,t_{\alpha_n}}(\lambda_{\alpha_1},\cdots,\lambda_{\alpha_n}). \tag{10}$$

4.2. 如 $m<n$, 则

$$F_{t_1,\cdots,t_m}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=\lim_{\lambda_{m+1},\cdots,\lambda_n\to\infty}F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n). \tag{11}$$

实际上, 由 (8),(6),(10) 式左方值等于

$$\begin{aligned}&P(\lambda(t):\lambda(t_1)\leqslant\lambda_1,\cdots,\lambda(t_n)\leqslant\lambda_n)\\&\quad=P(\lambda(t):\lambda(t_{\alpha_1})\leqslant\lambda_{\alpha_1},\cdots,\lambda(t_{\alpha_n})\leqslant\lambda_{\alpha_n})=F_{t_{\alpha_1},\cdots,t_{\alpha_n}}(\lambda_{\alpha_1},\cdots,\lambda_{\alpha_n}),\end{aligned}$$

此得证 4.1; 而 (11) 则因为

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda_{m+1},\cdots,\lambda_n\to\infty}P(\lambda(t):\lambda(t_1)\leqslant\lambda_1,\cdots,\lambda(t_n)\leqslant\lambda_n)\\&\quad=P(\lambda(t):\lambda(t_1)\leqslant\lambda_1,\cdots,\lambda(t_m)\leqslant\lambda_m).\end{aligned}$$

这样, 我们从 $\mathcal{B}_T$ 上已给的概率测度 P 出发, 得到了满足相容性条件的有穷维分布函数族 F.

现在回到原来的问题. 由于上述反面的分析, 自然地想到: 设已给一族满足相容性的有穷维分布函数族 F

$$F=\{F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),\ n>0,t_i\in T\}, \tag{12}$$

试问在 $(R_T,\mathcal{B}_T)$ 上是否存在概率测度 P_F, 使对一切可能的正整数 n, $t_i\in T$, $i=1,\cdots,n$, 有

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=P_F(W_n). \tag{13}$$

如果 P_F 存在, 它又是否唯一? 下述定理断定, 答案都是肯定的, 因而得到了与 n 维情形完全类似的结果, 只是 P_F 此时不是由一个分布函数而由一族相容的有穷维分布函数所产生.

定理 4 (A. H. Колмогоров) 设已给一族满足相容性的有穷维分布函数族 F(见 (12)), 则在 $(R_T, \mathcal{B}_T)$ 上必存在唯一概率测度 P_F, 使 (13) 成立.

证 (i) 为明确计, 记 (7) 中柱集 C_n 为 $C_{t_1,\cdots,t_n}(B_n)$. 当 $t_1,\cdots,t_n$ 固定时, 诸 n 维柱集 $C_{t_1,\cdots,t_n}(B_n)$ $(B_n \in \mathcal{B}_n)$ 构成 R_T 中一 σ 代数, 这由 "$\mathcal{B}_n$ 是 R_n 中的 σ 代数" 立即推出, 记此 σ 代数为 $C_{t_1,\cdots,t_n}$. 令 $\mathbf{C}$ 为全体有穷维柱集所成的集族, 即

$$\mathbf{C} = \bigcup_{\substack{t_i \in T \\ n>0}} C_{t_1,\cdots,t_n} \tag{14}$$

试证 $\mathbf{C}$ 是 R_T 中的代数. 实际上, $\mathbf{C}$ 显然具有性质 1.1′, 1.2′. 由于

$$C_{t_1,\cdots,t_n} \subset C_{t_1,\cdots,t_n,s_1,\cdots,s_m} \tag{15}$$

(增多足指数只会扩大 σ 代数), 因此, 对 $\mathbf{C}$ 中有穷多个集 $A_1,\cdots,A_l$, 总存在 $t_1,\cdots,t_n$, 使

$$A_i \in C_{t_1,\cdots,t_n} \quad (i = 1,\cdots,l),$$

从而由于 $C_{t_1,\cdots,t_n}$ 是 σ 代数, 即知

$$\bigcup_{i=1}^{l} A_i \in C_{t_1,\cdots,t_n} \subset \mathbf{C},$$

故 1.3′ 满足.

(ii) 已给的 n 维分布函数 $F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 在 $\mathcal{B}_n$ 上所产生的概率测度记为 $F_{t_1,\cdots,t_n}(B_n)$. 今在 $C_{t_1,\cdots,t_n}$ 上定义一概率测度 $P_{t_1,\cdots,t_n}$ 为

$$P_{t_1,\cdots,t_n}(C_{t_1,\cdots,t_n}(B_n)) = F_{t_1,\cdots,t_n}(B_n). \tag{16}$$

条件 4.1 保证 $P_{t_1,\cdots,t_n}$ 只与 $\{t_1,\cdots,t_n\}$ 中的元有关, 而与元的次序无关. 再在 $\mathbf{C}$ 上定义一集函数 P_F: 如 $A \in \mathbf{C}$, 由 $\mathbf{C}$ 的定义, 至少存在一组 $(t_1,\cdots,t_n) \subset T$, $B_n \in \mathcal{B}_n$, 使

$$A = C_{t_1,\cdots,t_n}(B_n). \tag{17}$$

定义

$$P_F(A) = P_{t_1,\cdots,t_n}(C_{t_1,\cdots,t_n}(B_n)). \tag{18}$$

以下为了简化记号, 缩写 $(t_1,\cdots,t_n)$ 为 t_n;$(s_1,\cdots,s_m)$ 为 s_m;$(t_1,\cdots,t_n,s_1,\cdots,s_m)$ 为 (t_n,s_m). 为了使定义 (18) 合理, 必须证明 $P_F(A)$ 是单值的, 即如 A 除 (17) 外, 还有另一表达式

$$A = C_{s_m}(B_m),$$

则必 $P_{t_n}(C_{t_n}(B_n)) = P_{s_m}(C_{s_m}(B_m))$. 实际上, 由 (15), 必存在一 $n+m$ 维 Borel 集 B_{n+m}, 使

$$C_{t_n}(B_n) = C_{s_m}(B_m) = C_{t_n,s_m}(B_{n+m}) = A.$$

根据相容性条件易见

$$P_{t_n}(C_{t_n}(B_n)) = P_{t_n,s_m}(C_{t_n,s_m}(B_{n+m})) = P_{s_m}(C_{s_m}(B_m)).$$

故得证 $P_F(A)$ 在 $\mathbf{C}$ 上的单值性. 由 (16),(18) 可见 (13) 成立.

(iii) 在 $\mathbf{C}$ 上, 显然 $P_F(A) \geqslant 0$, $P_F(R_T) = 1$, 如果还能证明 P_F 在 $\mathbf{C}$ 上完全可加, 因而 P_F 在 $\mathbf{C}$ 上是一测度, 则由扩张定理, 可把 P_F 的定义域扩大到 $\mathcal{B}_T$ 上, 使保持 (13), 而且这样的扩张是唯一的. 于是定理就会完全得以证明.

为了证明 P_F 在 $\mathbf{C}$ 上的完全可加性, 首先注意它在 $\mathbf{C}$ 上是可加的. 实际上, 设 $A_1 \in \mathbf{C}, A_2 \in \mathbf{C}$, 由 (15) 可设它们属于同一 σ 代数 C_{t_n}. 如 $A_1A_2 = \phi$, 则存在二 n 维 Borel 集 $B_n^{(1)}$, $B_n^{(2)}$, $B_n^{(1)}B_n^{(2)} = \phi$, 使

$$A_1 = C_{t_n}(B_n^{(1)}), \quad A_2 = C_{t_n}(B_n^{(2)}).$$

由于 P_{t_n} 是 C_{t_n} 上的概率测度, 故

$$\begin{aligned} P_F(A_1 \cup A_2) &= P_{t_n}(C_{t_n}(B_n^{(1)}) \cup C_{t_n}(B_n^{(2)})) \\ &= P_{t_n}(C_{t_n}(B_n^{(1)})) + P_{t_n}(C_{t_n}(B_n^{(2)})) = P_F(A_1) + P_F(A_2). \end{aligned}$$

因此, 为证 P_F 在 C 上完全可加, 由定理 1 只要证明它在 $\mathbf{C}$ 上的连续性, 即只要证如 $A_m \in \mathbf{C}$, $A_m \supset A_{m+1}$, $\bigcap\limits_m A_m = \phi$, 则 $P_F(A_m) \to 0$ $(m \to \infty)$; 或者, 等价地, 只要证明: 如 $P_F(A_m) > \varepsilon$, $m = 1, 2, \cdots$, 则 $\bigcap\limits_m A_m$ 不空, 这里 ε 是任一固定正数.

不失一般性, 可设存在一列 $t_1, t_2, \cdots$, 使 $A_m \in C_{t_1,\cdots,t_m}$. 实际上, 由 $A_m \in \mathbf{C}$, 知 $A_m \in C_{t_1^{(m)},\cdots,t_{n_m}^{(m)}}$. $t_1^{(m)}, \cdots, t_{n_m}^{(m)}$ 为 T 中某 n_m 个数. 把全体 $t_1^{(m)}, \cdots, t_{n_m}^{(m)}$ $(m = 1, 2, \cdots)$ 排成任何一个序列 $t_1, t_2, \cdots$. 由 (15) 必存在一正整数 p_m, 使 $A_m \in C_{t_1,\cdots,t_{p_m}}$. 仍然根据 (15), 可以假定 $p_m \geqslant m$. 再注意下列一般事实: 如果下降集列的某子列的交不空, 则原集列的交也不空. 在这个子列中, 还不妨加进元 R_T 或将某个元重覆有穷次. 这样就可假定 $A_m \in C_{t_1,\cdots,t_m}$ (有必要时只考虑某个经上述改变后的满足此关系的子列, 这种子列必定存在). 从而有 m 维 Borel 集 B_m, 使 $A_m = C_{t_m}(B_m)$.

对每个 $B_m \in \mathcal{B}_m$, 必存在有界闭集 $B'_m \subset B_m$, 使 $F_{t_m}(B_m - B'_m) < \varepsilon/2^{m+1}$, 于是如令 $A'_m = C_{t_m}(B'_m)$, 则

$$P_F(A_m - A'_m) = F_{t_m}(B_m - B'_m) < \varepsilon/2^{m+1}.$$

可惜未必 $A'_m \supset A'_{m+1}$, 故需再造 $D_m = A'_1 \cap \cdots \cap A'_m$, 则 $D_m \supset D_{m+1}$, 而且 $D_m \subset A'_m \subset A_m$. 由 $A_m - D_m \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} (A_i - A'_i)$, 得 $P_F(A_m - D_m) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} P_F(A_i - A'_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, 或

$$P_F(D_m) > P_F(A_m) - \frac{\varepsilon}{2} > \frac{\varepsilon}{2},$$

故知每 D_m 非空. 由此即可证明 $\bigcap\limits_m A_m$ 不空.

实际上, 既然 D_n 不空, 故可在其中选一点 $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots)$, 精确地说, $x^{(n)}$ 是这样的函数 $x^{(n)}(t)$, $t \in T$, 满足 $x^{(n)}(t_i) = x_i^{(n)}$ 由于 $D_1 \supset D_2 \supset \cdots$, 对每一 $q = 0, 1, 2, \cdots$, $x^{(m+q)} \in D_m \subset A'_m$, 从而 $(x_1^{(m+q)}, \cdots x_m^{(m+q)}) \in B'_m$. 因为每个 B'_m 有界, 可选一列正整数 $\{m_{1k}\}$, 使 $x_1^{m_{1k}} \to x_1$, $k \to \infty$. 在 $\{m_{1k}\}$ 中又可选一子列 $\{m_{2k}\}$, 使 $x_2^{m_{2k}} \to x_2$, $k \to \infty$ 等等. 用对角线手续可见点列 $x^{(m_{kk})} = (x_1^{(m_{kk})}, x_2^{(m_{kk})}, \cdots)$ 收敛于点 $x = (x_1, x_2, \cdots)$, 并且

$(x_1^{(m_{kk})},\cdots,x_n^{(m_{kk})})\to(x_1,\cdots,x_n)\in B_n'$, $n=1,2,\cdots$. 因此，点

$$x=(x_1,x_2,\cdots)\in A_n'\subset A_n,\quad x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n,$$

这里所谓点 x 是指函数 $x(t)$, $t\in T$, 它满足条件 $x(t_i)=x_i$, $i=1,2,\cdots$. 从而得证 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 不空. □

注 适当改变叙述方式后，定理 4 对较一般的乘积空间 $(R_T,\mathcal{B}_T)$ 也成立，这里 $(R,\mathcal{B})$ 是任意 σ 紧的距离可测空间 (定义见本附篇 (七) 段), 而 $(R_T,\mathcal{B}_T)$ 是 $(R,\mathcal{B})$ 的乘积空间 (见本附篇 (六) 段). 详见参考书 [5] 定理 1.2 及邓永录的论文：一类拓扑可测空间，中山大学学报，自然科学版， 1–2 (1963), 21–27 页.

$\mathcal{B}_T$ 关于 P_F 的完全化 σ 代数记为 $\mathcal{B}_{T,F}$. 有时简记 P_F 的完全化测度为 F, 于是便得到了测度空间 $(R_T,\mathcal{B}_T,F)$ 及它的完全化 $(R_T,\mathcal{B}_{T,F},F)$, $F(R_T)=1$.

$\mathcal{B}_{T,F}$ 上的概率测度有时也称为 **概率分布**(或 **分布**).

一般地，设 P 为 σ 代数 (或代数)$\mathcal{F}_1$ 上的测度， $\mathcal{F}_2\subset\mathcal{F}_1$ 也是 σ 代数 (或代数), 则 P 在 $\mathcal{F}_2$ 上也是一测度，它称为原测度的 **在 $\mathcal{F}_2$ 上的限制**.

(三) 定义在 Ω 上的实值函数 $x(\omega)$(可取 $\pm\infty$ 为值) 称为 $\mathcal{F}$ 可测的 ($\mathcal{F}$ 为 Ω 中 σ 代数) [1] 如对任意实数 $\lambda\in R_1$,

$$(\omega:x(\omega)\leqslant\lambda)\in\mathcal{F};\tag{19}$$

这条件等价于：对任意 $B\in\overline{\mathcal{B}}_1$($\overline{\mathcal{B}}_1$ 表含 $\mathcal{B}_1$ 中一切集及 $\{\infty\}$, $\{-\infty\}$ 的最小 σ 代数，它是 $\overline{R}_1=[-\infty,\infty]$ 中的 σ 代数), 有

$$(\omega:x(\omega)\in B)\in\mathcal{F};\tag{20}$$

也等价于：对任意 $\lambda\in R_1$

$$((\omega:x(\omega)<\lambda)\in\mathcal{F}.\tag{21}$$

以后 ω 集 $(\omega:x(\omega)\in B)$ 简记为 $(x(\omega)\in B)$.

最简单的可测函数是可测集 $A\in\mathcal{F}$ 的 **示性函数**$\chi_A(\omega)$:

$$\chi_A(\omega)=\begin{cases}1, & 如\omega\in A,\\ 0, & 如\omega\in\overline{A}.\end{cases}$$

有穷个可测集 A_i 的示性函数的线性组合

$$f(\omega)=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}(\omega)$$

称为 **简单函数**,$f(\omega)$ 可表为形式

$$f(\omega)=\sum_{j=1}^{m}b_j\chi_{B_j}(\omega),$$

[1]同样可定义对代数 $\mathcal{F}$ 可测的函数.

其中 $B_j \in \mathcal{F}$, $B_iB_j = \phi$.

下述定理可看作可测函数的另一定义：

定理 5 $f(\omega)$ 可测的充分与必要条件是：它是简单函数列的极限.

在非负情形，则有下面的

定理 6 非负可测函数是不下降的非负简单函数列的极限.

如果 $\{f_n(\omega)\}$ 是一列可测函数，则

$$\begin{aligned} h(\omega) &= \sup\{f_n(\omega) : n = 1, 2, \cdots\}, \\ g(\omega) &= \inf\{f_n(\omega) : n = 1, 2, \cdots\}, \\ \overline{f}(\omega) &= \overline{\lim_n} f_n(\omega), \\ \underline{f}(\omega) &= \underline{\lim_n} f_n(\omega) \end{aligned}$$

都是可测函数；使 $\{f_n(\omega)\}$ 收敛的 ω 所成的集 A, 即集 $(\overline{f}(\omega) = \underline{f}(\omega))$, 是可测集.

如 f_1, f_2 是可测函数，则 $\sum_{i=1}^{2} a_i f_i$, $f_1 f_2$, $|f|^a$ 都可测 $(a_i, a \in R_1)$.

作为可测函数的例是 n**元 Borel 可测函数** 及 n**元 Lebesgue 可测函数**, 前者是定义在 R_n 上的 $\mathcal{B}_n$ 可测函数，后者如下定义：

广义分布函数 $F(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \prod_{n=1}^{n} \lambda_i$ 在 $\mathcal{B}_n$ 上产生一测度 L, $\mathcal{B}_n$ 对 L 的完全化 σ 代数记为 $\mathcal{B}_{n,L}$, 在 $\mathcal{B}_{n,L}$ 上的测度 L 叫 n 维 Lebesgue 测度，定义在 R_n 上的 $\mathcal{B}_{n,L}$ 可测函数叫 n 元 Lebesgue 可测函数.

关于不同 σ 代数可测的函数间有下列常用的定理：

定理 7 设 R 为代数，含 R 的最小 σ 代数 $\mathcal{F}\{R\}$ 关于有穷测度 P 的完全化 σ 代数记为 $\widetilde{\mathcal{F}}\{R\}$, 则

(i) 对任意 $B \in \widetilde{\mathcal{F}}\{R\}$ 及 $\varepsilon > 0$, 必存在 $B_\varepsilon \in R$, 使 $P(B \Delta B_\varepsilon) < \varepsilon$;

(ii) 对任意 $\widetilde{\mathcal{F}}\{R\}$ 可测函数 $f(\omega)$ 及 $\varepsilon > 0$, 必存在 R 可测的简单函数 $f_\varepsilon(\omega)$, 使

$$P(|f(\omega) - f_\varepsilon(\omega)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

考虑测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 可测函数 $f(\omega)$ 及可测函数列 $\{f_n(\omega)\}$, 以后设 $P(\Omega) = 1$. 如果

$$P(\omega : \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)) = 1, \tag{22}$$

就说 $\{f_n(\omega)\}$**几乎处处**[1] 收敛于 $f(\omega)$, 并记作 $f_n(\omega) \to f(\omega)$, (a.s.), 或 $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$, (a.s.). 对有穷的可测函数列，这种收敛成立的充分与必要条件是：对每个 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\sup_{m \geqslant n} |f_m(\omega) - f(\omega)| \geqslant \varepsilon\} = 0. \tag{23}$$

如果下列较弱的条件满足：对每 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|f_n(\omega) - f(\omega)| \geqslant \varepsilon\} = 0. \tag{24}$$

[1] 一般地，如存在可测集 $\mathcal{N}$, $P(\mathcal{N}) = 0$, 使某涉及 ω 的性质 A 对一切 $\omega \overline{\in} N$ 都成立，就说 A 几乎处处成立，并记作 A (a.s.).

则说 $\{f_n(\omega)\}$**依测度** 收敛于 $f(\omega)$, 并记作 $f_n(\omega)\xrightarrow{P}f(\omega)$ 或

$$P\lim_{n\to\infty}f_n(\omega)=f(\omega). \tag{25}$$

另一种收敛如下：以 Ef 表积分 $\int_\Omega f(\omega)P(d\omega)$, 积分的定义见下段. 考虑常数 $r>0$. 如 $E|f_n|^r<\infty$, $E|f|^r<\infty$, 而且

$$\lim_{n\to\infty}E\{|f_n-f|^r\}=0, \tag{26}$$

则说 $\{f_n(\omega)\}$ r**方收敛** 于 $f(\omega)$, 并记作 $f_n\xrightarrow{r}f$. 特别，$r=2$ 时也称 **均方收敛**.

关于这三种收敛间的关系有下列事实：

A. 如 $f_n\to f$ (a.s.) 或 $f_n\xrightarrow{r}f$, 则必 $f_n\xrightarrow{P}f$.

B. $f_n\xrightarrow{P}f$ 的充分与必要条件是：$\{f_n(\omega)\}$ 的每一子列 $\{f'_n(\omega)\}$ 必含一几乎处处收敛于 $f(\omega)$ 的子子列 $\{f'_{k_n}(\omega)\}$.

为了叙述 r 方收敛与依测度收敛间的关系，先引入几个概念：

称可测函数列 $\{f_n(\omega)\}$ 的积分 **均匀连续**, 如果对每个 $\varepsilon>0$, 存在一个与 n 无关的常数 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使对任一满足 $P(B)<\delta$ 的可测集 B, 有 $\int_B|f_n(\omega)|P(d\omega)<\varepsilon$, 对一切 n. 称 $\{f_n(\omega)\}$ **均匀可积**, 如果对每个 $\varepsilon>0$, 存在一个与 n 无关的常数 $A=A(\varepsilon)>0$, 使 $a>A$ 时，对一切 n, 有 $\int_{(|f_n|\geqslant a)}|f_n(\omega)|P(d\omega)<\varepsilon$.

定理 8 $\{f_n(\omega)\}$ 均匀可积的充分与必要条件是它们的积分均匀有界而且均匀连续 [1].

C. 设 $E|f_n|^r<\infty$, $n=1,2,\cdots$. 于是 $f_n(\omega)\xrightarrow{r}f(\omega)$ 的充分与必要条件是 $f_n(\omega)\xrightarrow{P}f(\omega)$ 而且 $\{|f_n(\omega)|^r\}$ 的积分均匀连续；此时 $E|f|^r<\infty$.

注意如 $f_n\xrightarrow{r}f$, 则 $E|f_n|^r\to E|f|^r$.

(四) 现在来建立积分理论. 定义积分的函数类是逐步扩大的. 考虑测度空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$. 如 $f=\sum\limits_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}$ 是非负的简单函数，f 的积分定义为 [2]

$$\int_\Omega f(\omega)P(d\omega)=\sum_{i=1}^n a_iP(A_i); \tag{27}$$

如 f 是非负的有穷可测函数，积分定义为

$$\int_\Omega f(\omega)P(d\omega)=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(\omega)P(d\omega), \tag{28}$$

这里 $\{f_n(\omega)\}$ 是一列不下降的收敛于 $f(\omega)$ 的非负简单函数.

一般的可测函数 f 可表为二非负可测函数 f^+,f^- 的差，即 $f=f^+-f^-$, 其中 $f^+=f\chi_{(f\geqslant0)},f^-=-f\chi_{(f<0)}$ 如果二积分 $\int_\Omega f^+(\omega)P(d\omega)$ 及 $\int_\Omega f^-(\omega)P(d\omega)$ 中至少有一个有穷，就说 f 的积分存在，并定义

$$\int_\Omega f(\omega)P(d\omega)=\int_\Omega f^+(\omega)P(d\omega)-\int_\Omega f^-(\omega)P(d\omega). \tag{29}$$

---

[1] 定理 8 与下面 C 的证明见 [21],162–163 页.

[2] 约定 $(\pm\infty)\cdot0=0\cdot(\pm\infty)=0$.

最后，如 $f(\omega)$ 只是几乎处处有定义但可测时，即存在可测函数 $\overline{f}(\omega)$ 及某 0 测集 $\mathcal{N}$，当 $\omega \overline{\in} \mathcal{N}$ 有 $f(\omega)=\overline{f}(\omega)$ 时定义

$$\int_{\Omega} f(\omega)P(d\omega)=\int_{\Omega}\overline{f}(\omega)P(d\omega), \tag{30}$$

只要右方的积分存在．这时仍说 $f(\omega)$ 的积分存在．如果此积分有穷，就说 $f(\omega)$**可积**．

这样，我们便对一般的可测函数的积分下了定义．注意，上述定义是合理的，因为可以证明：(27) 中的积分值不依赖于 f 的表现；(28) 中的不依赖于上述的 $\{f_n(\omega)\}$ 的选择 (这种序列的存在见定理 6); (30) 中的 $\int_{\Omega} f(\omega)P(d\omega)$ 与上述 $\overline{f}(\omega)$ 的取法也没有关系．

设 $\int_{\Omega} f(\omega)P(d\omega)$ 存在，又 $A\in\mathcal{F}$, 定义

$$\int_{A} f(\omega)P(d\omega)=\int_{\Omega} f(\omega)\chi_{A}(\omega)P(d\omega). \tag{31}$$

积分有下列性质：设 f_i, f 可积，a_i 为常数，则

1. $\int_{\Omega}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i f_i\right)P(d\omega)=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\int_{\Omega} f_i P(d\omega)$;

2. $\int_{A_1\cup A_2} f(\omega)P(d\omega)=\sum\limits_{i=1}^{2}\int_{A_i} f(\omega)P(d\omega)$ $(A_i\in\mathcal{F},\ A_1A_2=\phi)$;

3. 如 $f_1\geqslant f_2$, 则 $\int_{\Omega} f_1(\omega)P(d\omega)\geqslant\int_{\Omega} f_2(\omega)P(d\omega)$;

4. f 可积的充要条件是 $|f|$ 可积，此时 f 几乎处处有穷；

5. 如 f 可测，g 可积，又 $|f|\leqslant|g|$ (a.s.), 则 f 可积；

6. 如 f 可积，$P(A)=0$, 则 $\int_{A} f(\omega)P(d\omega)=0$;

7. 设 f 为可积函数，$A\in\mathcal{F}$, f 在 A 上几乎处处为正，则由 $\int_{A} f(\omega)P(d\omega)=0$ 可得 $P(A)=0$;

8. 如 f 可积，且对每 $A\in\mathcal{F}$, $\int_{A} f(\omega)P(d\omega)$, 则 $f(\omega)=0$ (a.s.).

以上性质 1–2 表达积分的线性，3 表序性，4–5 为可积性，6–8 表示积分对 A 的依赖性，特别，6 表积分的绝对连续性．

关于积分的极限性质，则有下列著名的三个结果：

单调收敛定理 设 $\{f_n\}$ 是一列不减的非负可测函数，如 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega)=f(\omega)$ (a.s.), 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} f_n(\omega)P(d\omega)=\int_{\Omega} f(\omega)P(d\omega);$$

条件"非负可测"改为"可积"时，以上结论仍成立．

Fatou引理 设 $\{f_n\}, g, h$ 都是可积函数，如 $h\leqslant f_n$ (a.s.), 则 $\int_{\Omega}\underline{\lim} f_n P(d\omega)\leqslant\underline{\lim}\int_{\Omega} f_n P(d\omega)$; 如 $f_n\leqslant g$ (a.s.), 则 $\overline{\lim}\int_{\Omega} f_n P(d\omega)\leqslant\int_{\Omega}\overline{\lim} f_n P(d\omega)$.

控制收敛定理 设 $\{f_n\}$ 为可积函数列，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega)=f(\omega)$ (a.s.) 或 $P\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega)=f(\omega)$, 如果存在可积函数 $g(\omega)$ 使 $|f_n(\omega)|\leqslant|g(\omega)|$ (a.s.), $n=1,2,\cdots$, 则 $f(\omega)$ 可积而且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\Omega} f_n(\omega)P(d\omega)=\int_{\Omega} f(\omega)P(d\omega)$, 甚至有 $\int_{\Omega}|f_n(\omega)-f(\omega)|P(d\omega)\to 0$, 即 $\{f_n\}$ 平均收敛 (一次方收敛) 于 f.

(五) 下面叙述广义测度的几个定理．设 P 为 σ 代数 $\mathcal{F}$ 上的广义测度，称集 $E(\subset\Omega)$ 为 **正的**(关于 P), 如对任一可测集 A, $EA\in\mathcal{F}$ 而且 $P(EA)\geqslant 0$; 类似地称 E 为 **负的**, 如对任一可测集 A,$EA\in\mathcal{F}$ 而且 $P(EA)\leqslant 0$.

Hahn分解定理 对任一广义测度 P, 存在二不相交集 Ω_1,Ω_2, 使 $\Omega_1\cup\Omega_2=\Omega$, 而且关于 P,Ω_1 是正集, Ω_2 是负集.

称 Ω_1,Ω_2 构成 Ω 关于 P 的 Hahn**分解**, 这分解一般不唯一. 如 P 为测度. 则可取 $\Omega_2=\phi$.

在 $\mathcal{F}$ 上定义二测度 P^+ 及 P^-.

$$P^+(A)=P(\Omega_1A),\quad P^-(A)=-P(\Omega_2A),\quad A\in\mathcal{F} \tag{32}$$

(P^+ 及 P^- 的值不依赖于 Hahn 分解的选择), 则

$$P(A)=P^+(A)-P^-(A),\quad A\in\mathcal{F}. \tag{33}$$

称上式为 P 的 Jordon**分解**.

今设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上有二广义测度 μ 及 P, 令

$$|P|(A)=P^+(A)+P^-(A) \tag{34}$$

称 μ 关于 P**绝对连续**, 并记为 $\mu\ll P$, 如果对任一可测集 A, $|P|(A)=0$, 则 $\mu(A)=0$.

称 μ 关于 P(或 P 关于 μ) 为 **奇异的**, 如存在 Ω_1,Ω_2, $\Omega_1\Omega_2=\phi$, $\Omega_1\cup\Omega_2=\Omega$, 使对任一可测集 A, 有 $\Omega_1A\in\mathcal{F}$, $\Omega_2A\in\mathcal{F}$, 而且

$$|\mu|(\Omega_1A)=|P|(\Omega_2A)=0. \tag{35}$$

以下定理刻划了不定积分:

Radon-Nikodym定理 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是一测度空间, P 为 σ 有穷测度, 又 μ 为 $\mathcal{F}$ 上 σ 有穷广义测度 [1], 而且 $\mu\ll P$, 则存在一有穷可测函数 $f(\omega),\omega\in\Omega$, 使

$$\mu(A)=\int_A f(\omega)P(d\omega),\quad A\in\mathcal{F};$$

设另有一函数 g 也满足上述条件, 则关于 P 几乎处处有 $f(\omega)=g(\omega)$. 记 $f=\frac{d\mu}{dP}$.

关于广义测度的分解还有

Lebesgue分解定理 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为可测空间, μ 及 P 为 $\mathcal{F}$ 上二 σ 有穷广义测度, 则必唯一地存在二 σ 有穷广义测度 μ_1 及 μ_2, 它们的和是 μ, 而且 μ_1 关于 P 奇异, μ_2 关于 P 绝对连续.

计算积分时改变积分区域有时会带来很大方便. 为此先引进可测变换的观念, 它是可测函数的一般化, 设 $(\Omega_1,\mathcal{F}_1)(\Omega_2,\mathcal{F}_2)$ 是二可测空间, 定义在 Ω_1 上而取值于 Ω_2 的变换 (或者说, 抽象函数)T 称为 $\mathcal{F}_1$-$\mathcal{F}_2$**可测的**, 或简称 **可测的**, 如对任一 $F\in\mathcal{F}_2$, ω_1 集

$$T^{-1}(F)=(\omega_1:T(\omega_1)\in F)\in\mathcal{F}_1.$$

容易看出, 如果 G 是自 $(\Omega_2,\mathcal{F}_2)$ 到另一可测空间 $(\Omega_3,\mathcal{F}_3)$ 的可测变换, 那么变换

$$GT=G(T)$$

[1] 关于广义测度 P, 说集 A 的 P 有穷, 如 $|P(A)|<\infty$; 称集 $A\in\mathcal{F}$ 是 σ 有穷的, 如存在一列 $A_n\in\mathcal{F}$, 使 $A\subset\bigcup\limits_n A_n$, 而且 $|P(A_n)|<\infty$, $n=1,2,\cdots$, 如 $\mathcal{F}$ 中每一集都是 σ 有穷的, 就说 P 是 σ 有穷的. 类似地定义有穷广义测度.

是自 $(\Omega_1,\mathcal{F}_1)$ 到 $(\Omega_3,\mathcal{F}_3)$ 的可测变换.

设 $(\Omega_1,\mathcal{F}_1)$ 上定义了测度 P_1, 定义

$$P_2(F)=P_1(T^{-1}(F))\quad (F\in\mathcal{F}_2),$$

则 P_2 是 $\mathcal{F}_2$ 上的测度. 我们有下列重要的

积分变换定理 设 T 是自测度空间 $(\Omega_1,\mathcal{F}_1,P_1)$ 到可测空间 $(\Omega_2,\mathcal{F}_2)$ 的可测变换，又 g 是定义在 Ω_2 上的可测函数，则

$$\int_{\Omega_2} g(\omega_2)P_2(d\omega_2)=\int_{\Omega_1}(gT)(\omega_1)P_1(d\omega_1). \tag{36}$$

上式的意义是：如一方的积分存在，则它方的也存在，而且二者相等.

(六) 现在来研究 n 维乘积空间，它的特殊情形是 (二) 中的 n 维 Borel 可测空间. 设 $n=2$, 因为对一般 n, 情况完全类似.

设有二测度空间 $(X,S,\mu),(Y,T,\nu)$, $X=(x)$, $Y=(y)$, μ,ν 分别为 σ 代数 S,T 上的 σ 有穷测度. 造乘积空间 $(X\times Y,S\times T,\mu\times\nu)$, 其中

$$X\times Y=((x,y),x\in X,y\in Y). \tag{37}$$

$$S\times T=\mathcal{F}\{A\times B:A\in S,B\in T\}. \tag{38}$$

对任一集 $E\in S\times T$, 任意固定的点 $x\in X,y\in Y$, 定义

$$E_x=\{y:(x,y)\in E\},\quad E^y=\{x:(x,y)\in E\},$$

它们分别称为 E 的 **x截** 与 **y截**, 是 T 与 S 中的集. 定义

$$\mu\times\nu(E)=\int_X\nu(E_x)\mu(dx)=\int_Y\mu(E^y)\nu(dy), \tag{39}$$

则 $\mu\times\nu$ 是 $S\times T$ 上的测度，而且是满足条件

$$\mu\times\nu(A\times B)=\mu(A)\times\nu(B)\quad (A\in S,\ B\in T) \tag{40}$$

的唯一测度.

可以证明，如 μ,ν 都是 σ 有穷的，则 $\mu\times\nu$ 也是 σ 有穷的. 还可证明， E 有 $\mu\times\nu$ 测度为 0 的充分与必要条件是几乎一切 x 截 (或几乎一切 y 截) 有 ν(或 μ)0 测度.

现在来定义函数的截. 设 $f(x,y)$ 为 E 上的函数. 对固定的 x, 函数 $f_x(y)$:

$$f_x(y)=f(x,y)$$

是 E_x 上的函数，称为 **$f(x,y)$在 E 上的 x 截**. 同样可以定义 $f(x,y)$ 在 E 上的 y 截为

$$f^y(x)=f(x,y),$$

它是 E^y 上的函数.

如 $E=X\times Y$, 简称在 $X\times Y$ 上的截为截.

可测函数的任一截是可测函数[1].

关于截的可积性及积分序的改变有下面的

Fubini定理 设 $f(x,y)$ 是 $X\times Y$ 上的 $S\times T$ 可测函数，如果它非负或可积，则它的几乎一切截都是可积的. 令

$$h(x)=\int_Y f(x,y)\nu(dy),\quad g(y)=\int_X f(x,y)\mu(dx),\tag{41}$$

则 h 与 g 都是可积的，而且

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\mu\times\nu(dx,dy)=\int_X h(x)\mu(dx)=\int_Y g(y)\nu(dy).\tag{42}$$

自然想到要考虑无穷维乘积空间. 它的重要的特殊情形是 (二) 中已详细讨论过的 $(R_T,\mathcal{B}_T,F)$, 我们以后主要用到的也是这个空间.

设有参数集 T, 对每 $t\in T$, 存在可测空间 $(\Omega_t,\mathcal{F}_t)$, $\Omega_t=(\omega_t)$. 考虑定义在 T 上的抽象函数 $\lambda(t),t\in T$. 当 t 固定时， $\lambda(t)$ 是 Ω_t 中的元. 全体这样的函数构成空间 $\prod\limits_{t\in T}\Omega_t$. 在这空间中，包含一切具下列形状的有穷维柱集

$$(\lambda(t):\lambda(t_i)\in B_i,\ i=1,\cdots,n)\ \ n>0,t_i\in T,B_i\in\mathcal{F}_i$$

的最小 σ 代数记为 $\prod\limits_{t\in T}\mathcal{F}_t$. 我们称可测空间 $\left(\prod\limits_{t\in T}\Omega_t,\prod\limits_{t\in T}\mathcal{F}_t\right)$ 为 $(\Omega_t,\mathcal{F}_t),t\in T$ 的 **乘积空间**.

当 $T=(1,2,\cdots)$, 此空间也记为 $(\Omega_1\times\Omega_2\times\cdots,\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2\times\cdots)$.

特别，当 $(\Omega_t,\mathcal{F}_t)=(\Omega,\mathcal{F})$ 与 t 无关时，此乘积空间也记为 $(\Omega^T,\mathcal{F}^T)$.

在 $\left(\prod\limits_{t\in T}\Omega_t,\prod\limits_{t\in T}\mathcal{F}_t\right)$ 上如何产生测度？当 $(\Omega_t,\mathcal{F}_t)=(R_1,\mathcal{B}_1)$ 时，定理 4 给出了一个方法. 对一般的空间，定理 4 未必能用，因为证明中要求此空间具有拓扑结构 (涉及收敛性的缘故). 然而我们却有下面的定理.

考虑 $(\Omega_1\times\Omega_2\times\cdots,\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2\times\cdots)$. 设对每正整数 n, 已给一函数[2] $p_n(\omega_1,\cdots,\omega_{n-1};A_n)$ $(\omega_i\in\Omega_i,A_n\in\mathcal{F}_n)$, 它当 $\omega_i\in\Omega_i(i=1,\cdots,n-1)$ 固定时，关于 A_n 是 $\mathcal{F}_n$ 上的概率测度，当 $A_n\in\mathcal{F}_n$ 固定时，它是 $(\omega_1,\cdots,\omega_{n-1})$ 的 $\mathcal{F}_1\times\cdots\times\mathcal{F}_{n-1}$ 可测函数. 以 B_n 表 $\mathcal{F}_1\times\cdots\times\mathcal{F}_n$ 中的集，以 $C(B_n)$ 表 $\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2\times\cdots$ 中以 B_n 为底的柱集. 在 $\mathcal{F}_1\times\cdots\times\mathcal{F}_n$ 上，定义概率测度 Q_n:

$$Q_n(B_n)=\int p_1(d\omega_1)\cdot\int p_2(\omega_1;d\omega_2)\cdots\int p_n(\omega_1,\cdots,\omega_{n-1};d\omega_n)\chi_{B_n}(\omega_1,\cdots,\omega_n),$$

其中 χ_{B_n} 是 B_n 的示性函数，即当 $(\omega_1,\cdots,\omega_n)\in B_n$ 时，其值为 1, 否则为 0. 然后在全体柱集 $\{C(B_n)\}$ 上，定义一集函数 P:

$$PC(B_n)=Q_n(B_n)\ \ (n\geqslant 1).$$

Tulcca定理 P 决定 $\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2\times\cdots$ 上唯一的概率测度 (仍记为 P).

[1]参看本篇后面的引理 5.

[2]$p_1(A_1)$ 是 $\mathcal{F}_1$ 上的概率测度，不含 ω_i.

证 记$\mathfrak{C} = \{C(B_n)\}$. 由于$p_i$是概率测度, 故如$C(B_n) = C(B_m), m < n$, 又$\omega_k$不属于$B_m$所在的因子空间时, $Q_n(B_n)$定义中的积分对$\omega_k \in \Omega_k$进行后只出现1, 故$Q_n(B_n) = Q_m(B_m)$而P之值不随柱集的表现而异.

在$\mathfrak{C}$上P显然是可加的, 非负, 而且$P(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots) = 1$. 由定理1, 只要证$P$在$\mathfrak{C}$上的连续性. 取一列收敛于$\phi$的柱集, 由定理4证明中的考虑, 不妨设此列为$C(B_n) \downarrow \phi$. 由$PC(B_n)$的定义有

$$PC(B_n) = \int p_1(d\omega_1) P^{(1)} C(B_n)_{\omega_1},$$

其中$(B_n)_{\omega_1}$表集B_n在ω_1的截, 而

$$P^{(1)}C(B_n)_\omega = \int p_2(\omega_1; d\omega_2) \cdots \int p_n(\omega_1, \cdots, \omega_{n-1}, d\omega_n) \chi_{B_n}(\omega_1, \cdots, \omega_n).$$

$PC(B_n)$对n不上升, $P^{(1)}C(B_n)_{\omega_1}$也不上升而趋于极限$Y_1(\omega_1) \geqslant 0$. 由控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty} PC(B_n) = \int p_1(d\omega_1) Y_1(\omega_1).$$

如果说右方值大于0, 则必存在$\overline{\omega}_1$使$Y_1(\overline{\omega}_1) > 0$. 于是我们回到原来的情况, 只要以$P^{(1)}C(B_n)_{\overline{\omega}_1}$代替上面的$PC(B_n)$, 并类似地定义$P^{(2)}C(B_n)_{\overline{\omega}_1, \omega_2}$以代替$P^{(1)}C(B_n)_{\omega_1}$. 这样重复下去, 便得点列$\overline{\omega} = (\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \cdots)$, 使$\overline{\omega}_n \in \Omega_n$而且

$$P^{(n)}C(B_n)_{\overline{\omega}_1, \cdots, \overline{\omega}_n} \downarrow Y_n(\overline{\omega}_n) > 0.$$

这表示$C(B_n)$至少包含形如$(\overline{\omega}_1, \cdots, \overline{\omega}_n, \omega_{n+1}, \cdots)$的点, 因而$\overline{\omega} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C(B_n)$. 于是得证$P$是代数$\mathfrak{C}$上的概率测度, 再由定理2即知本定理正确. □

重要的特殊情形是

$$p_n(\omega_1, \cdots, \omega_{n-1}; A_n) = p_n(A_n),$$

即与$\omega_1, \cdots, \omega_{n-1}$无关时, 此时所产生的测度$P$称为**独立乘积测度**.

(七) 这一段中叙述若干辅助定理, 它们在一般测度论中难以找到, 故这里给以证明. 这些结果在过程论中非常有用.

如前所述, 设$\mathcal{A}$为基本空间$\Omega = (\omega)$的某子集系. 包含$\mathcal{A}$的一切σ代数的交$\mathcal{F}\{\mathcal{A}\}$显然是一$\sigma$代数, 而且是含$\mathcal{A}$的最小$\sigma$代数, 于是我们得到下面的

引理 1 如σ代数$\mathcal{K} \supset \mathcal{A}$, 则$\mathcal{K} \supset \mathcal{F}\{\mathcal{A}\}$.

这一简单引理的典型用法见以下引理之证.

引理 2 设α_i为自可测空间$(\Omega, \mathcal{F})$到可测空间$(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$的可测变换$(i = 1, \cdots, n$或$i = 1, 2, \cdots)$, 则

$$\alpha(\omega) = \{\alpha_1(\omega), \alpha_2(\omega), \cdots\}$$

是自$(\Omega, \mathcal{F})$到乘积空间$(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \cdots)$的可测变换.

证 为明确计, 设$i = 1, 2, \cdots$. 考虑集系

$$\mathcal{K} = \{B : B \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \cdots;\ (\omega : \alpha(\omega) \in B) \in \mathcal{F}\},$$

则 $\mathcal{K}$ 是 $\Omega_1\times\Omega_2\times\cdots$ 中的 σ 代数，显然 $\mathcal{K}$ 包含一切柱集

$$B=B_1\times B_2\times\cdots\times B_n\times\Omega_{n+1}\times\Omega_{n+2}\times\cdots\ (B_i\in\mathcal{F}_i)$$

所成的集 $\mathcal{A}$. 由引理 1 即得

$$\mathcal{K}\supset\mathcal{F}\{\mathcal{A}\}=\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2\times\cdots.\ \square$$

然而在许多问题中，要验证 $\mathcal{K}$ 是 σ 代数，常常很不容易. 于是 Е. Б. Дынкин 将对 $\mathcal{K}$ 的条件放宽，而对 $\mathcal{A}$ 稍加条件，从而引进了 λ- 系与 π- 系的概念.

Ω 中的子集系 Π 称为 π-系, 如果 $A_1\in\Pi$, $A_2\in\Pi$, 则 $A_1A_2\in\Pi$.

Ω 中的子集系 Λ 称为 λ- 系，如果

1) $\Omega\subset\Lambda$;

2) 自 $A_1\in\Lambda, A_2\in\Lambda, A_1A_2=\phi$, 可得 $A_1\cup A_2\in\Lambda$;

3) 自 $A_1\in\Lambda, A_2\in\Lambda, A_1\supset A_2$, 可得 $A_1-A_2\in\Lambda$;

4) 自 [1] $A_n\in\Lambda, A_n\uparrow A, n=1,2,\cdots$, 可得 $A\in\Lambda$.

引理 3 (i) Ω 的子集系 $\mathcal{M}$ 如既是 π- 系又是 λ- 系，则必是一 σ 代数；

(ii) 如 λ- 系 Λ 包含 π- 系 Π, 则 Λ 包含 $\mathcal{F}\{\Pi\}$.

证 (i) 由 1)$\Omega\in\mathcal{M}$. 由此及 3), 知如 $A\in\mathcal{M}$, 则 $\overline{A}\in\mathcal{M}$. 如 $A_1\in\mathcal{M}$, $A_2\in\mathcal{M}$, 由 π- 系的定义，知 $A_1A_2\in\mathcal{M}$, 由 3), $A_2\setminus A_1A_2\in\mathcal{M}$, 再由 2) 知 $A_1\cup A_2=A_1\cup(A_2\setminus A_1A_2)\in\mathcal{M}$. 由归纳法，知如 $A_1,\cdots,A_n$ 均属于 $\mathcal{M}$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathcal{M}$, 再由 4) 知

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\lim_{n\to\infty}\bigcup_{i=1}^{n}A_i\in\mathcal{M}.$$

(ii) 包含 π- 系 Π 的一切 λ- 系的交 $\mathcal{F}'$ 显然是含 Π 的最小 λ- 系，故如能证 $\mathcal{F}'$ 也是 π- 系，则由 (i) 即得证所需结论. 令

$$\mathcal{F}_1=\{A:\ AB\in\mathcal{F}'\ \text{对一切}\ B\in\Pi\ \text{成立}\},$$

易见 $\mathcal{F}_1$ 是 λ- 系. 既然 $\mathcal{F}_1\supset\Pi$, 故 $\mathcal{F}_1\supset\mathcal{F}'$. 这表示如 $A\in\mathcal{F}'$,$B\in\Pi$, 则 $AB\in\mathcal{F}'$. 令

$$\mathcal{F}_2=\{B:\ AB\in\mathcal{F}'\ \text{对一切}\ A\in\mathcal{F}'\ \text{成立}\},$$

易见 $\mathcal{F}_2$ 是 λ- 系. 按上所证， $\mathcal{F}_2\supset\Pi$, 因而 $\mathcal{F}_2\supset\mathcal{F}'$. 这表示如 $A,B\in\mathcal{F}'$, 则 $AB\in\mathcal{F}'$, 于是得证 $\mathcal{F}'$ 为 π- 系. $\square$

现在来考虑函数. 设 $\mathcal{L}$ 是定义在 Ω 上的一族函数，满足条件

(A) 如 $\xi(\omega)\in\mathcal{L}$, 又

$$\eta(\omega)=\begin{cases}\xi(\omega), & \text{当}\ \xi(\omega)\geqslant 0\ \text{时},\\ 0, & \text{当}\ \xi(\omega)<0\ \text{时},\end{cases}$$

则 $\eta(\omega)$ 及 $\eta(\omega)-\xi(\omega)$ 均属于 $\mathcal{L}$.

---

[1] $A_n\uparrow A$ 表 $A_n\subset A_{n+1}, A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

函数集 L 称为 $\mathcal{L}$- 系，如它满足条件

(A_1) $\mathbf{1}\in L$ ($\mathbf{1}$ 表恒等于 1 的函数);

(A_2) L 中任二函数的线性组合仍属于 L;

(A_3) 如 $\xi_n(\omega)\in L$, $0\leqslant\xi_n(\omega)\uparrow\xi(\omega)$, 而且 $\xi(\omega)$ 有界或属于 $\mathcal{L}$, 则 $\xi(\omega)\in L$.

引理 4 如 $\mathcal{L}$- 系 L 包含某一 π- 系 Π 中任一集 A 的示性函数 $\chi_A(\omega)$, 则 L 包含一切属于 $\mathcal{L}$ 中的关于 $\mathcal{F}\{\Pi\}$ 可测的函数.

证 使 $\chi_A(\omega)\in L$ 的全体集 A 构成 λ- 系 Λ. 既然 $\Lambda\supset\Pi$, 故由引理 3, $\Lambda\supset\mathcal{F}\{\Pi\}$; 换言之， $\chi_A(\omega)\in L$ 对任意集 $A\in\mathcal{F}\{\Pi\}$ 成立.

设 $\xi(\omega)$ 为 $\mathcal{L}$ 中非负、关于 $\mathcal{F}\{\Pi\}$ 可测的函数. 令

$$\Gamma_{kn}=\left\{\frac{k}{2^n}\leqslant\xi(\omega)<\frac{k+1}{2^n}\right\}\in\mathcal{F}\{\Pi\},$$

$$\xi_n=\sum_{k=0}^{2^{2n}}\frac{k}{2^n}\chi_{\Gamma_{kn}}.$$

于是由 $\chi_{\Gamma_{kn}}\in L$ 及 (A_2), $\xi_n\in L$. 因 $0\leqslant\xi_n\uparrow\xi$, 由 ($A_3$) 即得 $\xi\in L$.

按 (A), 任一 $\mathcal{F}\{\Pi\}$ 可测函数 $\eta\in\mathcal{L}$ 可表为 $\mathcal{L}$ 中二非负的 $\mathcal{F}\{\Pi\}$ 可测函数的差，而后二者已证明属于 L, 故由 (A_2), $\eta\in L$. □

引理 3,4 非常有用，典型用法如下：

有时需要证明某一集系 S 具有某性质 A_0, 为此令 Λ 为具有 A_0 的一切集所成的集系，然后证明 Λ 包含某一集系 Π, 实际中常常容易看出 Λ 是一 λ- 系而 Π 是一 π- 系，并且 $\mathcal{F}\{\Pi\}\supset S$, 于是由引理 3(ii), $\Lambda\supset S$, 即证明了 S 中的集都有性质 A_0. 这种方法今后称为 **λ-系方法**.

另外一些时候需要证明某一函数集 F 具有某性质 $\widetilde{A}_0$. 为此引入满足 (A) 的函数集 $\mathcal{L}$, 使全体具有 $\widetilde{A}_0$ 的函数集 L 是一 $\mathcal{L}$- 系；再引进一 π- 系 Π, 使 $\mathcal{F}\{\Pi\}$ 可测函数集包含 F. 于是根据引理 4, 只要证明 $\chi_A(\omega)\in L$ 对一切 $A\in\Pi$ 成立就够了. 这种方法以后称为 **$\mathcal{L}$-系方法**.

下列引理就是用这些方法证明的.

引理 5 设 $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$ 为可测空间 $(i=1,2)$. $f(\omega_1,\omega_2)$ $(\omega_i\in\Omega_i)$ 是 $\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2$ 可测函数. 于是对任意固定的 $\omega_2\in\Omega_2$, $f(\omega_1,\omega_2)$ 是 ω_1 的 $\mathcal{F}_1$ 可测函数.

证 以 $\mathcal{L}$ 表 $\Omega_1\times\Omega_2$ 上全体函数所成的集， $\mathcal{L}$ 满足 (A). 使引理结论正确的全体函数集 L 显然是一 $\mathcal{L}$- 系. 既然 L 包含一切 $\chi_{A_1\times A_2}(\omega)$ $(A_i\in\mathcal{F}_i, i=1,2)$, 而一切形如 $A_1\times A_2$ 的集又构成 π- 系，故由引理 4, L 包含一切关于 $\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2$ 可测的函数. □

现在引进今后常用的一个记号. 设对每一 $t\in T$ 存在一取值于可测空间 $(E,\mathcal{B})$ 的抽象函数 $x_t(\omega)$ $(\omega\in\Omega)$, 称 σ 代数 $\mathcal{F}\{(\omega:x_t(\omega)\in\Gamma),\Gamma\in\mathcal{B},t\in T\}$ 为 $\{x_t(\omega),t\in T\}$**所产生的 σ 代数**, 并记为

$$\mathcal{F}\{x_t,\ t\in T\}.$$

显然，如每 $x_t(\omega)$ 是 $\mathcal{F}-\mathcal{B}$ 可测的，则

$$\mathcal{F}\{x_t,t\in T\}\subset\mathcal{F},$$

从而可考虑 $\mathcal{F}\{x_t,t\in T\}$ 关于 P 的完全化 σ 代数 $\mathcal{F}'\{x_t,t\in T\}$.

引理 6 设对每 $t \in T$ 存在一取值于可测空间 $(E, \mathcal{B})$ 的抽象函数 $x_t(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$. 为使函数 $\xi(\omega)$ 关于 σ 代数 $\mathcal{F}\{x_t, t \in T\}$ 可测，充分与必要条件是存在某个定义在 $E^\infty = E \times E \times \cdots$ 中的 $\mathcal{B}^\infty = \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \cdots$ 可测函数 $f(x_1, x_2, \cdots)$ $(x_i \in E)$, 使

$$\xi(\omega) = f(x_{t_1}(\omega), x_{t_2}(\omega), \cdots). \tag{43}$$

证 既然每 $x_{t_i}(\omega)$ 是自 $(\Omega, \mathcal{F}\{x_t, t \in T\})$ 到 $(E, \mathcal{B})$ 的可测变换，故由引理 2

$$\alpha(\omega) = (x_{t_1}(\omega), x_{t_2}(\omega), \cdots)$$

是 $(\Omega, \mathcal{F}\{x_t, t \in T\})$ 到 $(E^\infty, \mathcal{B}^\infty)$ 的可测变换，从而 $\xi(\omega) = [f\alpha](\omega)$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}\{x_t, t \in T\})$ 到 $(R_1, \mathcal{B}_1)$ 即一维 Borel 可测空间的可测变换，于是充分性得证.

令

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L} = \{\text{全体定义在 } \Omega \text{ 上的函数} \xi(\omega)\}; \\
&L = \{\text{全体可表为 (43) 形的函数}\}; \\
&\Pi = \{\text{全体柱集}(x_{t_1} \in \Gamma_1, \cdots, x_{t_n} \in \Gamma_n)\}
\end{aligned}$$

$(n > 0, t_i \in T, \Gamma_i \in \mathcal{B})$. 注意上式中的柱集的示性函数

$$\chi_{\Gamma_1}[x_{t_1}(\omega)] \cdots \chi_{\Gamma_n}[x_{t_n}(\omega)]$$

具有 (43) 的形状，故属于 L. 运用 $\mathcal{L}$- 系方法，即可证明必要性. 事实上，因 L 是 $\mathcal{L}$- 系，Π 是 π- 系，既然 Π 中任一集的示性函数属于 L, 故由引理 4, 知 L 包含一切 $\mathcal{F}\{\Pi\} = \mathcal{F}\{x_t, t \in T\}$ 可测函数. □

引理 7 设 $(U, \mathcal{F}_U)$ $(V, \mathcal{F}_V)$ $(Z, \mathcal{F}_Z)$ 为三个可测空间，$F(u, z)$ $(u \in U, z \in Z)$ 为关于 $\mathcal{F}_U \times \mathcal{F}_Z$ 可测的函数；又设对每一 $v \in V$, $P_v(\Gamma)$ 是 $\mathcal{F}_Z$ 上的测度，$(\Gamma \in \mathcal{F}_Z)$, 而且当 Γ 固定时，函数 $P_v(\Gamma)$ 为 $\mathcal{F}_V$ 可测. 如果积分

$$G(u, v) = \int_Z F(u, z) P_v(dz) \tag{44}$$

对一切 $u \in U, v \in V$ 有穷，则它是 $\mathcal{F}_U \times \mathcal{F}_V$ 可测函数.

证 令

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = \{F(u, z):\ &\text{它为 } \mathcal{F}_U \times \mathcal{F}_Z \text{ 可测，而且它由 (44) 定义的} \\
&G(u, v) \text{ 对一切 } u \in U, v \in V \text{ 有穷}\}, \\
L = \{F(u, z):\ &\text{它对应的 } G(u, v) \text{ 为 } \mathcal{F}_U \times \mathcal{F}_V \text{ 可测}\}, \\
\Pi = \{A_U \times A_Z\}\ &(A_U \in \mathcal{F}_U,\ A_Z \in \mathcal{F}_Z).
\end{aligned}$$

由积分的单调收敛定理，L 是 $\mathcal{L}$- 系，又显然

$$\chi_{A_U \times A_Z}(u, z) \in L.$$

运用 $\mathcal{L}$- 系方法即得所欲证. □

有时需要在相空间 E 中考虑收敛性，故要引入拓扑．设 $(E,\mathfrak{C})$ 为拓扑空间，这里 $\mathfrak{C}$ 是 E 中全体开集所成的集系．取 E 中 σ 代数 $\mathcal{F}\{\mathfrak{C}\}$, 即含 $\mathfrak{C}$ 的最小 σ 代数，于是 $(E,\mathcal{F}\{\mathfrak{C}\})$ 为可测空间．称三元组合 $(E,\mathfrak{C},\mathcal{F}\{\mathfrak{C}\})$ 为 **拓扑可测空间**. 设 $f(x)$ $x\in E$ 是 (关于 $\mathfrak{C}$) 连续函数，则因 $(x:f(x)<a)$ $(a\in R_1)$ 是开集 $(-\infty,a)$ 在 f 下的原象的集，故也是开集而属于 $\mathcal{F}\{\mathfrak{C}\}$. 这样便证明了连续函数关于 $\mathcal{F}\{\mathfrak{C}\}$ 可测．

设 A 为 E 的子集．称一组开集为 A 的 **开覆盖**, 如果这组开集的和包含 A; 称 A 为 **紧的**, 如果自它的任一开覆盖可挑出一个由有穷多个开集组成的开覆盖；称空间 E 为 **σ-紧的**, 如果存在一列紧集 $\{C_n\}$, 使 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}C_n$.

一种重要的拓扑可测空间是 **距离可测空间**, 以 $\rho(x,y)$ 表二点 $x,y\in E$ 间的距离，有时为了强调距离 ρ, 也记此空间为 $(E,\rho,\mathcal{F}\{\rho\})$, $\mathcal{F}\{\rho\}=\mathcal{F}\{\mathfrak{C}\}$.

引理 8 设 $(E,\rho,\mathcal{F}\{\rho\})$ 为距离可测空间，如果定义于其上的某些函数所构成的 $\mathcal{L}$- 系 L 包含一切有界连续函数，则 L 包含 $\mathcal{L}$ 中一切可测函数．

证 E 中全体开集所成的集 $\mathfrak{C}$ 是 π- 系，既然 $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\}=\mathcal{F}\{\rho\}$, 利用 $\mathcal{L}$- 系方法，只要证明 $\chi_{U}(x)\in L$, $U\in\mathfrak{C}$.

任取连续函数 $f(x)$, 使当且仅当 $x\in U$ 时，$f(x)\neq 0$(例如，可取 $f(x)=\inf\limits_{y\in\overline{U}}\rho(x,y)$). 再令

$$q_n(v)=\begin{cases}1, & \text{如}|v|\geqslant\dfrac{1}{n},\\ n|v|, & \text{如}|v|<\dfrac{1}{n}.\end{cases}$$

$q_n(v)\uparrow\chi_{\overline{\{0\}}}(v)$, 而

$$f_n(x)=q_n[f(x)]\uparrow\chi_U(x).$$

由于 q_n, f 都连续，故 f_n 连续而且有界．由假定 $f_n\in L$. 既然 $0\leqslant f_n\uparrow\chi_U$, 由 (A_3), $\chi_U\in L$. □

以下引理不能由 Fubini 定理推出，因广义测度中包含变量．

引理 9 设 $(U,\mathcal{F}_U)$, $(V,\mathcal{F}_V)$ 为二可测空间，$\mu(A)$ 是 $\mathcal{F}_U$ 上有穷广义测度；又 $\nu(x,B)$ 当 $x\in U$ 固定时是 $\mathcal{F}_V$ 上的有穷广义测度，当 $B\in\mathcal{F}_V$ 固定时是 $\mathcal{F}_U$ 可测函数，而且是有界的，即

$$\sup_{B\in\mathcal{F}_V,x\in U}|\nu(x,B)|<C,$$

C 是某常数．如果 $f(y)$ $(y\in V)$ 是有界的 $\mathcal{F}_V$ 可测函数，则

$$\int_U\mu(dx)\left\{\int_V\nu(x,dy)f(y)\right\}=\int_V f(y)\left\{\int_U\mu(dx)\nu(x,dy)\right\}. \tag{45}$$

证 以 $\mathcal{L}$ 表全体有界 $\mathcal{F}_V$ 可测函数 $f(y)$ 的集，以 L 表全体使上式成立的函数 $f(y)$ 的集，由所给条件知 L 是 $\mathcal{L}$- 系．因此，由引理 4, 只要证明 (45) 对示性函数 $f(y)=\chi_B(y)$, $B\in\mathcal{F}_V$ 正确．

对 $f(y)=\chi_B(y)$, (45) 左方化为

$$\int_U\mu(dx)\nu(x,B)\equiv\lambda(B);$$

而右则化为

$$\int_V f(y)\lambda(dy) = \int_V \chi_B(y)\lambda(dy) = \lambda(B),$$

故 (45) 对 $f(y) = \chi_B(y)$ 成立. □

现在引进推移变换的概念，它将一个函数变到另一函数.

设 $(E, \mathcal{B})$ 为可测空间， $e(t)$ $(t \in T)$ 是定义在 T 上而取值于 E 的抽象函数. 这个函数的整体最好简记为 $e(\cdot)$, 点 "·" 表在 T 上流动的坐标. 记号的好处是可以避免把整个函数与此函数在定点 t 上的单个值 $e(t)$ 混淆.

为确定计，设 $T = [0, \infty)$. 对每个固定的 $s \geqslant 0$, 在全体函数集 $E^T = \{e(\cdot)\}$ 上，定义一个 s 推移变换 T_s:

$$T_s e(\cdot) = e(s + \cdot),$$

它把 E^T 变到自身. 这里 $e(s+\cdot)$ 表函数 $e(s+t), t \in T$; 换言之，新函数在 t 点上的值，等于原来函数在 $s+t$ 点上的值.

考虑定义在乘积空间 E^T 上的实值函数 $f = f(e(\cdot))$, 它的自变元是 $e(\cdot)$. 作为无穷维 Borel 可测函数的一般化，我们称 f 为 $\mathcal{B}^T$ 可测的，如对任一一维 Borel 集 A, 有

$$(e(\cdot) : f(e(\cdot)) \in A) \in \mathcal{B}^T.$$

设对每一 $t \in T$, 有一取值于 $(E, \mathcal{B})$ 的抽象函数 $x_t(\omega) = x(t, \omega)$ 和它对应， $\omega \in \Omega$. 注意当 ω 固定时， $x(s+\cdot, \omega)$ 是 E^T 中的元. 简记 Ω 中 σ 代数 $\mathcal{F}\{x_{s+t}(\omega), t \in T\}$ 为 $\mathcal{N}^s$.

引理 10 实值函数 $\xi(\omega)$ 为 $\mathcal{N}^s$ 可测的充分与必要条件是:存在 $\mathcal{B}^T$ 可测函数 $f = f(e(\cdot))$, 使

$$\xi(\omega) = f(x(s+\cdot, \omega)).$$

证 充分性: 设 f 为 $\mathcal{B}^T$ 可测而要证对任一 $A \in \mathcal{B}_1$,

$$\widetilde{A} = (\omega : f(x(s+\cdot, \omega)) \in A) \in \mathcal{N}^s.$$

由于 f 的 $\mathcal{B}^T$ 可测性， $f^{-1}(A) = (e(\cdot) : f(e(\cdot)) \in A) \in \mathcal{B}^T$. 既然 $\widetilde{A} = (\omega : x(s+\cdot, \omega) \in f^{-1}(A))$, 故只要证明: 对任意 $B \in \mathcal{B}^T$

$$(\omega : x(s+\cdot, \omega) \in B) \in \mathcal{N}^s. \tag{46}$$

显然，使 (46) 成立的 B 的全体构成 E^T 中一 σ 代数 $\widetilde{\mathcal{B}}$. 当 B 为柱集

$$W_n = (e(\cdot) : e(t_1) \in B_1, \cdots, e(t_n) \in B_n) \quad (B_i \in \mathcal{B})$$

时

$$(\omega : x(s+\cdot) \in W_n) = (\omega : x(s+t_i) \in B_i,\ i = 1, \cdots, n) \in \mathcal{N}^s,$$

故 $\widetilde{\mathcal{B}} \supset \{W_n\}$, 从而 $\widetilde{\mathcal{B}} \supset \mathcal{F}\{W_n\} = \mathcal{B}^T$.

必要性: 注意如 $T_1 \subset T$, 则任一定义在 E^{T_1} 上的 $\mathcal{B}^{T_1}$ 可测函数可看成定义在 E^T 上的 $\mathcal{B}^T$ 可测函数. 故结论由引理 6 直接推出. □

上面考虑了 $T=[0,\infty)$ 的情况，同样可考虑 $T=(-\infty,\infty),[0,1,2,\cdots),(\cdots,-1,0,1,\cdots)$, 只是 "$s\geqslant 0$" 应分别换为 "$s\in R_1$", "$s$ 为非负整数" 及 "s 为任意整数".

有时需要考虑某可测空间 $(E,\mathcal{B})$ 上的测度列 $\{P_n\}$. 称 $\mathcal{B}$ 上的测度列 $\{P_n\}$ 收敛于测度 P, 如对任一 $B\in\mathcal{B}$

$$\lim_{n\to\infty} P_n(B)=P(B).$$

引理 11 设有穷测度列 $\{P_n\}$ 收敛于有穷测度 P, 又 $g(x)$ $(x\in E)$ 为有界 $\mathcal{B}$ 可测函数，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g(x)P_n(dx)=\int_E g(x)P(dx).$$

证 对任意 $\varepsilon>0$, 存在简单函数 $\widetilde{g}(x)=\sum_{j=1}^{m} x_j\chi_{E_j}(x)$, 使 $|g(x)-\widetilde{g}(x)|<\varepsilon$, 而且 $\widetilde{g}$ 为有穷数 C 所囿 [1]. 先令 $n\to\infty$, 次令 $\varepsilon\to 0$ 即得

$$\begin{aligned}\left|\int gP_n(dx)-\int gP(dx)\right| &\leqslant \int|g-\widetilde{g}|P(dx)\\ &\quad+\left|\int\widetilde{g}P(dx)-\int\widetilde{g}P_n(dx)\right|+\int|\widetilde{g}-g|P_n(dx)\\ &\leqslant \varepsilon P(E)+C\sum_{j=1}^{m}|P(E_j)-P_n(E_j)|+\varepsilon P_n(E)\to 0.\ \square\end{aligned}$$

引理 12 设 $\{f_n(\omega)\}$ 是一列自可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到距离可测空间 $(E,\mathfrak{C},\mathcal{B})$ 中的可测变换，如果对每 $\omega\in\Omega$, 有 $f_n(\omega)\to f(\omega)$ $(n\to\infty)$, 则 $f(\omega)$ 也是 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(E,\mathfrak{C},\mathcal{B})$ 的可测变换.

证 对任一 $U\in\mathfrak{C}$, 取有界连续函数 $g(x)$, 使满足 $U=(x:g(x)\neq 0)$ (例如，可令 $g(x)=\frac{\rho(x,\overline{U})}{1+\rho(x,\overline{U})}$, 这里 $\rho(x,\overline{U})$ 表点 x 到补集 $\overline{U}$ 的距离，即 $\inf\limits_{v\in\overline{U}}\rho(x,v)$), 则

$$\{f(\omega)\in U\}=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{|g[f_n(\omega)]|>\frac{1}{k}\right\}\in\mathcal{F}.$$

以 $\mathcal{K}$ 表使 $\{f(\omega)\in A\}\in\mathcal{F}$ 成立的集 $A(\subset E)$ 所成的集系，则 $\mathcal{K}$ 是 E 中一个 σ 代数；既然 $\mathcal{K}\supset\mathfrak{C}$, 故由引理 1, 并注意 $\mathcal{B}$ 是含 $\mathfrak{C}$ 的最小 σ 代数，即得 $\mathcal{K}\supset\mathcal{B}$. □

参 考 书 目

[1] 复旦大学数学系主编，概率论与数理统计 (第二版), 1961.

[2] 伊藤清，确率论 (中译本，刘璋温译), 1961.

[3] 伊藤清，随机过程 (中译本，刘璋温译), 1961.

[4] Гнеденко, Б. В., 概率论教程 (第二版)(中译本，丁寿田译), 1954.

[5] Дынкин, Е. Б., 马尔科夫过程论基础 (中译本，王梓坤译), 1959.

[6] Дынкин, Е. Б., Марковские процессы, 1963

[1] 参看 [20],§20, 习题 2.

[7] Романовский, В. И., Дискретные цепи Маркова, 1949 (中译本，梁文骐译).

[8] Сарымсаков, Т. А., Основы теории процессов Маркова, 1954.

[9] Скороход, А. В., Исследования по теории случайных процессов, 1961.

[10] Alrey, N., On the Theory of Stochastic Processes and their Applications to the Theory of Cosmic Radiation, 1948.

[11] Barlett, M. S., An Introduction to Stochastic Processes with Special Reference to Methods and Applications, 1955(有俄译本).

[12] Bharucha-Reid, A. T., Elements of the Theory of Markov Processes and their Applications, 1960.

[13] Blanc-Lapierre, A., Fortet R., Théorie des Fonctions Aléatoires, 1953.

[14] Chung, K. L., Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, 1960.

[15] Cramer, H., Mathematical Methods of Statistics, 1946.

[16] Doob, J. L., Stochastic Processes, 1953.

[17] Feller, W., An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. 1 (第二版), 1957.

[18] Grenander, U., 随机过程与统计推断，王寿仁译， 1950.

[19] Grenander, U., Rosenblatt M., 平稳时间序列的统计分析，陶宗英等译， 1957.

[20] Halmos, P. R., 测度论， 1950.

[21] Loève, M., Probability Theory (第二版), 1960.

上卷名词索引

二画 - 四画

[1]指 "附篇第一段"

五画

六画

七画

八画

九画

十画

十一画

十二画

十三画 - 十八画

下卷 布朗运动、生灭过程与马尔科夫链

第十一章 高维布朗运动与牛顿位势

现代概率论的重要进展之一是发现了马尔科夫过程与位势理论 (简称势论) 之间的深刻联系. 这一发现使势论中许多概念和结论获得了明确的概率意义, 同时也使马氏过程有了新的分析工具, 因而两者相互促进, 丰富了彼此的内容. 这种联系的萌芽初见于 S. Kakutani [13] 及 J. L. Doob [7] [1] 前者证明了: 平面上 Dirichlet 问题的解可以通过二维布朗运动的某些概率特征来表达. Doob 等人的大量工作发展了这方面的研究; 而把这种联系推广到相当一般的马氏过程, 则主要是 G. A. Hunt 的贡献. 近年来这方面的文献很多, 但由于理论日益抽象化而使初学者不易了解它们的背景和实质.

本章及下章试图通过比较简单的马氏过程, 即布朗运动, 以及与它相对应的古典位势 (牛顿位势与对数伴势), 来对一般理论作一前导. 布朗运动与古典位势不仅比较简单, 而且是一般理论的思想泉源, 因此, 这样也许有助于对后者的理解. 由于布朗运动与古典位势的内容都很丰富, 我们不可能深入到各自的专题领域中去, 而只能把重点放在二者的联系上, 同时也叙述一些近期发表的新结果. 这种联系反映在 Dirichlet 问题的解、平衡势、Green 函数等问题上.

除少数结果只指出参考文献外, 书中所述的定理基本上都给出了详细的证明.

随着布朗运动所在的相空间 R^n(n 维欧氏空间) 的维数 n 不同, 概率性质也有显著差异. 以后会看到, 当 $n \leqslant 2$ 时, 布朗运动是常返的, 对应于对数势; 当 $n \geqslant 3$ 时, 它是暂留的, 对应于牛顿位势.

§11.1 势论大意

(一) 势论的物理背景. 古典势论起源于物理, 后来抽象成为数学的一分支. 根据电学中的库仑定律, 两个异性电荷互相吸引, 引力方向在其联线上, 力的大小为

$$F = c \cdot \frac{Qq}{r^2},$$

其中 Q 与 q 分别为二电荷的数量, r 为二者在 R^3 中的距离, c 为某常数, 与单位有关. 为了研究引力, 最好引进势的概念. 设在 x_0 处有一电荷 q_0, 它在任一点 $x(x \neq x_0)$ 处所产生的势, 等于把一单位电荷从无穷远移到点 x 处所作的功. 势与此电荷在到达 x 以前所走的路径无关. 势的值为

$$\frac{1}{2\pi} \frac{q_0}{|x - x_0|}. \tag{1}$$

常数 $1/2\pi$ 依赖于单位的选择, 并非本质.

---

[1]* 第十一章、第十二章所引文献见第十二章后

今设有 m 个电荷 q_i, 分别位于点 $x_i(i=1,2,\cdots,m)$, 可视

$$\begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots, x_m \\ q_1, q_2, \cdots, q_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

为一离散的电荷分布. 这组电荷在点 $x(x \neq x_i)$ 处所产生的势仍定义为把单位电荷自无穷远处移到 x 所作的功. 由于力和功都是可加的, 故此势为

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{q_i}{|x-x_i|}. \tag{3}$$

现在假设电荷按照测度 μ 分布. 由上式的启发, 自然称由 μ 所产生的在 x 点的势为

$$G\mu(x) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{R^3}\frac{\mu(dy)}{|x-y|}. \tag{4}$$

以后会证明, 如 $\mu(R^3)<\infty$, 则关于勒贝格测度 L, 对几乎一切 x, $G\mu(x)<\infty$ (见引理 3).

(4) 式定义一积分变换 G, 它把测度 μ 变为函数 $G\mu$. 下面会看到, 变换的核 $1/2\pi|x-y|$ 恰好等于三维布朗运动转移密度对时间 t 的积分. 这正是把布朗运动与牛顿位势联系起来的桥梁之一.

在物理中, 势论所研究的, 主要是电荷分布 μ 、势以及借助于它们而定义的各种量间的关系. 作为这种量的例, 可举出电荷分布 μ 的能 I_μ(energy), 它是势对此 μ 的积分, 即

$$I_\mu \equiv \int_{R^3} G\mu(x)\mu(dx) = \frac{1}{2\pi}\int_{R^3}\int_{R^3}\frac{\mu(dy)\mu(dx)}{|x-y|}. \tag{5}$$

电荷分布的全电荷是 $Q \equiv \mu(R^3)$. 如果把全部电荷 Q 散布在某导体上, 它们便会重新分布, 使得在此导体所占的集 A 上, 势是一常数. 记此新分布为 μ_0, 它具有下列能的极小性:

$$I_{\mu_0} = \min_{\mu}(I_\mu:\ \mu(R^3)=Q,\ \operatorname{supp}\mu \subset A),$$

其中 $\operatorname{supp}\mu$ 表 μ 的支集 (support), 它是一切使 $\mu(U)=0$ 的开集 U 的和的补集. μ_0 所决定的分布形态, 在物理中称为平衡态. 对紧集 $E(\subset R^3)$, 如存在 μ 使 $\operatorname{supp}\mu \subset E$, 而且 $G\mu(x)=1$, $(\forall x \in E)$, 则称 $G\mu$ 为 E 的平衡势; 具有平衡势的集称为平衡集; 而 $\mu(E)$ 则称为 E 的容度, 记为 $C(E)$. 因此, 导体 E 的容度, 是为了在此导体上产生单位势的全电荷. 以上诸概念来自物理, 以后还要从数学上重新定义. 下面简述古典势论中的一些结果, 其中有些以后会用概率方法加以证明. 下设 μ 为有穷测度.

电荷分布的唯一性: 势 $G\mu$ 唯一决定 μ.

势的决定: $G\mu$ 被它在 $\operatorname{supp}\mu$ 上的值所决定.

平衡势唯一: 一集最多有一平衡势.

平衡势的刻画: 设平衡集 E 的平衡势为 $G\mu_0$, 则

$$G\mu_0(x) = \inf(G\mu(x) : G\mu(x) \geqslant 1, \forall\, x \in E). \tag{6}$$

平衡势的能: 如平衡集 E 的能有穷, 则在所有支集含于 E 、全电荷等于 E 的容度的电荷分布 μ 所对应的势中, 平衡势 $G\mu_0$ 的能 $I\mu_0$ 极小; 即

$$I\mu_0 \equiv \int_{R^3}(G\mu_0)d\mu_0 = \min_{G_\mu}\left(\int_{R^3}(G\mu)d\mu : \operatorname{supp}\mu \subset E,\ \mu(E)=C(E)\right). \tag{7}$$

控制原理: 对于二势 $h = G\mu$, $\overline{h} = G\overline{\mu}$, 如处处有 $h \geqslant \overline{h}$, 则 $\mu(R^3) \geqslant \overline{\mu}(R^3)$.

投影 (Balayage) 原理: 设已给势 $h = G\mu$ 及闭集 E, 则存在势 $\overline{h} = G\overline{\mu}$, 满足

$$\overline{h}(x) = h(x), (\forall\, x \in E);\ \overline{h}(x) \leqslant h(x), (\forall\, x \in R^3); \tag{8}$$

$$\text{supp}\overline{u} \subset E;\ \overline{\mu}(R^3) \leqslant \mu(R^3). \tag{9}$$

此外, 还满足: $\forall\, x$

$$\overline{h}(x) = \inf_v (Gv(x) : Gv(x) \geqslant h(x), \forall\, x \in E; \text{supp}v \subset E) \tag{10}$$

$$= \sup_v (Gv(x) : Gv(x) \leqslant h(x), \forall\, x \in E; \text{supp}v \subset E) \tag{11}$$

称 $\overline{h}$ 为 h 的投影势 (Balayage potential).

下包络原理: 诸势的逐点下确界也是势.

(二) 若干引理 考虑 n 维欧氏空间 R^n, 其中的点记为 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 它与原点的距离为 $|x| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}$. 对 $r > 0$, 记

$$B_r \equiv (x : |x| \leqslant r);\ \mathring{B}_r \equiv (x : |x| < r);$$

$$S_r \equiv (x : |x| = r).$$

它们分别是以原点为中心、r 为半径的球, 开球和球面.

引理 1 设 $f(y)$ 为一元函数, $y \geqslant 0$, 如下式左方积分存在, 则

$$\int_{B_r} f(|x|)dx = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^r s^{n-1} f(s)\, ds. \tag{12}$$

其中 Γ 表 Gamma 函数.

证 为计算

$$\int_{B_r} f(|x|)dx = \underset{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2 \leqslant r^2}{\int \cdots \int} f\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) dx_1 \cdots dx_n.$$

引进极坐标

$$x_1 = s\cos\varphi_1,\ x_2 = s\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \cdots,$$

$$x_n = s\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1},$$

$$\int_{B_r} f(|x|)dx = \int_0^r s^{n-1} f(s)ds \cdot \int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1 d\varphi_1 \cdots \int_0^\pi \sin^2\varphi_{n-3} d\varphi_{n-3} \cdot \int_0^\pi \sin\varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1}.$$

利用公式

$$\int_0^\pi \sin^{a-1}\varphi\, d\varphi = \sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right),$$

化简后即得 (12). □

在 (12) 中取 $f=1$, 并利用公式

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x), \tag{13}$$

即得球 B_r 的体积 $|B_r|$ 为

$$|B_r|=\pi^{n/2}r^n\Big/\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right). \tag{14}$$

对 r 微分，得球面 S_r 的面积 $|S_r|$ 为

$$|S_r|=2\pi^{n/2}r^{n-1}\Big/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right). \tag{15}$$

球面 S_r 上的勒贝格测度记为 $L_{n-1}(dx)$. 以 $U_r(dx)$ 表 S_r 上的均匀分布，即

$$U_r(dx)=L_{n-1}(dx)/|S_r|. \tag{16}$$

系 1 设函数 $K(x)(x\in R^n)$ 的积分有意义，则

$$\int_{R^n}K(x)\,dx=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\int_0^\infty\left[\int_{S_r}K(x)U_r(dx)\right]r^{n-1}\,dr. \tag{17}$$

证 左方积分等于

$$\int_0^\infty\int_{S_r}K(x)L_{n-1}(dx)\,dr=\int_0^\infty\left[\int_{S_r}K(x)U_r(dx)\right]|S_r|\,dr,$$

以 (15) 代入即得 (17). □

引理 2 下列积分是 y 的有界函数

$$A(y)=\int_{B_r}\frac{dx}{|x-y|^{n-2}}\quad(n\geqslant 2). \tag{18}$$

证 以 $\chi_D(x)$ 表集 D 的示性函数，它等于 1 或 0, 视 $x\in D$ 或 $x\overline{\in}D$ 而定. 则对任意 $\delta>0$, 有

$$\begin{aligned}A(y)&=\int_{R^n}\frac{\chi_{B_r}(x)}{|x-y|^{n-2}}\,dx=\int_{R^n}\frac{\chi_{B_r}(x+y)}{|x|^{n-2}}\,dx\\&\leqslant\int_{|x|\leqslant\delta}\frac{dx}{|x|^{n-2}}+\int_{|x|>\delta}\frac{\chi_{B_r}(x+y)}{|x|^{n-2}}\,dx.\end{aligned}$$

由 (12), 右方第一积分等于 $\pi^{n/2}\delta^2/\Gamma(n/2)$; 第二积分不大于

$$\frac{1}{\delta^{n-2}}\int_{|x|>\delta}\chi_{B_r}(x+y)\,dx\leqslant\frac{1}{\delta^{n-2}}\int_{R^n}\chi_{B_r}(x+y)\,dx=\frac{|B_r|}{\delta^{n-2}}.\ \square$$

注 1 其实，易见 $A(y)$ 的上确界在 $y=0$ 达到.

以 "v-a.e." 表 "关于测度 v 几乎处处"; 以 $\mathcal{B}^n$ 表 R^n 中全体 Borel 集所成的 σ 代数; $(R^n,\mathcal{B}^n)$ 上的勒贝格测度记为 L.

引理 3 设 μ 为 (R^n, B^n) 上有穷测度， $n \geqslant 2$, 则

$$\int_{R^n} \frac{\mu(dx)}{|x-y|^{n-2}} < \infty \quad (L\text{-a.e.}). \tag{19}$$

证 以 K 表 (18) 中 $A(y)$ 的一上界，有

$$\int_{B_r}\int_{R^n} \frac{\mu(dx)}{|x-y|^{n-2}}\,dy = \int_{R^n}\left(\int_{B_r} \frac{dy}{|x-y|^{n-2}}\,\mu(dx) \leqslant K\mu(R^n) < \infty.\right.$$

故 (19) 中积分在 B_r 上有穷 (L-a.e.), 再由 $R^n = \bigcup_{r=1}^{\infty} B_r$ (r 为正整数), 即得证 (19). □

以 C_0 表 R^n 上全体连续且满足 $\lim\limits_{x\mapsto\infty} f(x) = 0$ 的函数 $f(x)$ 的集.

引理 4 设 $f \in C_0$ 而且 L- 可积，则当 $n \geqslant 3$, 有

$$g(y) \equiv \int_{R^n} \frac{f(x)}{|x-y|^{n-2}}\,dx \in C_0.$$

证

$$\begin{aligned}|g(y)-g(y_0)| &= \left|\int_{R^n} \frac{f(y+x)-f(y_0+x)}{|x|^{n-2}}\,dx\right| \\ &\leqslant 2\|f\| \int_{|x|<\delta} \frac{dx}{|x|^{n-2}} + \frac{1}{\delta^{n-2}}\int_{|x|\geqslant\delta} |f(y+x)-f(y_0+x)|\,dx,\end{aligned} \tag{20}$$

其中 $\|f\| = \sup\limits_x |f(x)|$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 如引理 2 证明所述，可选 $\delta > 0$ 充分小，使 (20) 中右方第一项小于 $\varepsilon/2$. 固定此 δ, 由勒贝格收敛定理，当 $y \to y_0$ 时，第二项趋于零. 此得证 $g(y)$ 的连续性.

为证 $\lim\limits_{|y|\to\infty} g(y) = 0$, 任取 $0 < r < s$, 则

$$g(y) = \left(\int_{|x|\geqslant s} + \int_{s\geqslant|x|>r} + \int_{r\geqslant|x|}\right)\frac{f(x+y)}{|x|^{n-2}}\,dx.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 由于 f 可积，可选 s 充分大，以使

$$\left|\int_{|x|>s} \frac{f(x+y)}{|x|^{n-2}}\,dx\right| \leqslant \frac{1}{s^{n-2}}\int_{R^n} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{3};$$

次取 r 充分小，以使

$$\left|\int_{r\geqslant|x|} \frac{f(x+y)}{|x|^{n-2}}\,dx\right| \leqslant \|f\| \int_{r\geqslant|x|} \frac{dx}{|x|^{n-2}} < \frac{\varepsilon}{3};$$

最后

$$\left|\int_{s\geqslant|x|>r} \frac{f(x+y)}{|x|^{n-2}}\,dx\right| \leqslant \frac{1}{r^{n-2}}\int_{s\geqslant|x|} |f(x+y)|\,dx.$$

由于 $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(z) = 0$, 存在 $a > 0$, 当 $|y| > a$ 时，上式右方项小于 $\varepsilon/3$. 综合上述，当 $|y| > a$ 时， $|g(y)| < \varepsilon$. □

§11.2. 布朗运动略述

(一) 定义 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间，其中 $\Omega = (\omega)$ 是基本事件 ω 所成的集，$\mathcal{F}$ 为 Ω 中子集的 σ 代数，P 为 $\mathcal{F}$ 上的概率测度. 考虑定义在此空间上的随机过程 $\{x(t,\omega), t \geqslant 0\}$，它取值于 R^n. 有时也记 $x(t,\omega)$ 为 $x_t(\omega)$ 或 $x(t)$ 或 x_t.

称 X 为 n 维布朗运动，如果它满足：

(i) 对任意有限多个数 $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_m$，

$$x(t_1), x(t_2) - x(t_1), \cdots, x(t_m) - x(t_{m-1})$$

相互独立；

(ii) 对任意 $s \geqslant 0, t > 0$, 增量 $x(s+t) - x(s)$ 有 n 维正态分布，密度为

$$p(t,x) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\Big(- \frac{|x|^2}{2t} \Big), \quad (x \in R^n); \tag{1}$$

由 §3.4 知存在连续修正. 故不妨设此过程为连续的而引入假设 (iii):

(iii) 对每一固定的 $\omega, t \to x(t,\omega)$ 连续. 这样的过程的确存在 (证可参看 §3.4 或 [17]).

(1) 式给出 $x_{s+t} - x_s$ 的密度；至于 x_t 的分布，则依赖于开始分布，即 x_0 的分布. 设

$$\mu(A) = P(x_0 \in A), \quad A \in \mathcal{B}^n.$$

由 $x_t = (x_t - x_0) + x_0$ 及 (i) 和卷积公式，得

$$P(x_t \in A) = \int_A \Big[\int_{R^n} \frac{1}{(2\pi t)^{\pi/2}} \exp\Big(- \frac{|x-y|^2}{2t} \Big) \mu(dx) \Big] dy. \tag{2}$$

为了强调开始分布 μ 的作用，记

$$P_\mu(x_t \in A) = P(x_t \in A). \tag{3}$$

引理 1 (正交不变性) 设 H 是 R^n 中正交变换，则 $HX \equiv \{Hx_t, t \geqslant 0\}$ 也是 n 维布朗运动.

证 $Hx_{s+t} - Hx_s = H(x_{s+t} - x_s)$ 只依赖于 $x_{s+t} - x_s$, 故由 X 的增量独立性即得 HX 的增量独立性. 其次，X 对 t 连续，故 HX 亦然. 最后，由 (1),$x_{s+t} - x_s$ 有特征函数为

$$Ee^{i(x_{s+t} - x_s, y)} = e^{-(y,y)t/2}, \quad (y \in R^n). \tag{4}$$

由于正交变换保持内积不变，并利用 (4) 以及 H^{-1} 也是正交变换，得

$$Ee^{i(H(x_{s+t} - x_s), y)} = Ee^{i(x_{s+t} - x_s, H^{-1}y)} = e^{-(H^{-1}y, H^{-1}y)t/2} = e^{-(y,y)t/2}, \tag{5}$$

故 $Hx_{s+t} - Hx_s$ 也有分布密度为 (1). □

类似易见

平移不变性 设定点 $a \in R^n$, 则 $\{x_t + a, t \geqslant 0\}$ 也是布朗运动；

尺度不变性 设常数 $c>0$, 则 $\left\{\frac{x(ct)}{\sqrt{c}}, t\geqslant 0\right\}$ 也是布朗运动.

(二) **转移密度** $p(t,x,y)$ **的性质** 定义

$$p(t,x,y)\equiv p(t,y-x)=\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\exp\Big(-\frac{|y-x|^2}{2t}\Big), \tag{6}$$

其中 $t>0, x\in R^n, y\in R^n$. 由 (2) 可见, 如 $x_0(\omega)\equiv x$, 或 μ 集中在点 x 上, 并记 P_μ 为 P_x, 则有

$$P_x(x_t\in A)=\int_A p(t,x,y)\,dy. \tag{7}$$

故直观上可理解 $p(t,x,y)$ 为: 作布朗运动的粒子, 自点 x 出发, 于时刻 t 转移到点 y 附近的转移密度. 显然, 它关于 x,y 是对称的.

下列简单定理是布朗运动与牛顿位势重要联系之一, 因为 $g(x,y)$ 正是牛顿位势的核 ($n\geqslant 3$ 时).

定理 1 [1]

$$g(x,y)\equiv\int_0^\infty p(t,x,y)\,dt=\begin{cases} c_n/|x-y|^{n-2}, & (n\geqslant 3);\\ \infty, & (n\leqslant 2),\end{cases} \tag{8}$$

其中 c_n 为常数:

$$c_n=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2\pi^{n/2}}=\begin{cases} 1/2\pi, & n=3\text{时},\\ 1/2\pi^2, & n=4\text{时},\\ 1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-3)/(2\pi)^k, & n=2k+1>3\text{时}\\ 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(k-2)/2\pi^k, & n=2k>4\text{时}\end{cases} \tag{9}$$

证 对 $s>0$ 有

$$\begin{aligned}\int_0^s p(t,x)\,dt&=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_0^s\frac{1}{t^{n/2}}\exp\Big(-\frac{|x|^2}{2t}\Big)dt\\ &=\frac{|x|^{2-n}}{2\pi^{n/2}}\int_{|x|^2/2s}^\infty u^{(n/2)-2}e^{-u}du,\ \Big(u=\frac{|x|^2}{2t}\Big).\end{aligned} \tag{10}$$

注意当且只当 $a>0$ 时, $\int_0^\infty u^{a-1}e^{-u}\,du$ 收敛. 在上式中令 $s\to\infty$, 即得

$$\int_0^\infty p(t,x)dt=\begin{cases} c_n/|x|^{n-2}, & (n\geqslant 3);\\ \infty, & (n\leqslant 2),\end{cases} \tag{11}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi^{n/2}}\int_0^\infty u^{(n/2)-2}e^{-u}du=\Gamma\Big(\frac{n}{2}-1\Big)\Big/2\pi^{n/2}. \tag{12}$$

以 $y-x$ 代入 (11) 中的 x 即得 (8). □

比较 §1(15), 可见

$$c_n=2/(n-2)|S_1|. \tag{13}$$

---

[1] 理解 $\frac{a}{0}=\infty$, $(a>0)$.

设 $f(x)$ 为定义在 R^n 上的函数. 令

$$
\left.\begin{aligned}
&B=(f:\ \text{有界},\quad \mathcal{B}^n\ \text{可测});\\
&C=(f:\ f\in B, f\text{连续});\\
&C_0=(f:\ f\in C\text{而且}f(\infty)\equiv\lim_{|x|\to\infty}f(x)=0).
\end{aligned}\right\}\tag{14}
$$

又令 $\|f\|=\sup\limits_x|f(x)|$. 对 $f\in B$, 定义变换 T_t

$$
T_tf(x)=\int_{R^n}f(y)p(t,x,y)\,dy,\ (t>0).\tag{15}
$$

显然

$$
\|T_tf\|\leqslant\|f\|,\quad \|T_t\|\leqslant 1.\tag{16}
$$

引理 2 (i) $T_tB\subset C$; (ii) $T_tC_0\subset C_0$.

证 对 $f\in B$ 有

$$
|T_tf(x)-T_tf(x_0)|\leqslant\|f\|\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\int_{R^n}|e^{-|x-y|^2/2t}-e^{-|x_0-y|^2/2t}|\,dy.
$$

由勒贝格定理, 当 $x\to x_0$ 时, 右方趋于 0. 此得证 (i).

对 $f\in C_0$ 及 $N>0$, 有

$$
\begin{aligned}
|T_tf(x)|\leqslant&\int_{|y|\geqslant N}\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\exp\Big(-\frac{|x-y|^2}{2t}\Big)|f(y)|\,dy\\
&+\|f\|\int_{|y|<N}\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\exp\Big(-\frac{|x-y|^2}{2t}\Big)\,dy.
\end{aligned}
$$

由于 $f(\infty)=0$, 对 $\varepsilon>0$, 当 N 充分大时, 右方第一积分小于 $\varepsilon/2$; 固定此 N, 当 $|x|$ 充分大时, 第二积分 $<\varepsilon/2$, 此得证 $T_tf(\infty)=0$. 联合 (i) 即得证 (ii). □

引理 3 设 f 均匀连续, 则

$$
\lim_{t\to 0}\|T_tf-f\|=0.\tag{17}
$$

证 对 $\varepsilon>0$, 由假设, 可选 $\delta>0$, 使对一切 y, 有

$$
\sup_{x:|x|<\delta}|f(x+y)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}.
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\|T_tf-f\|&\leqslant\sup_y\Big(\int_{|x|<\delta/2}+\int_{|x|\geqslant\delta/2}\Big)\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\cdot\exp\Big(-\frac{|x|^2}{2t}\Big)|f(x+y)-f(y)|\,dx\\
&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+2\|f\|\int_{|x|\geqslant\delta/2}\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}e^{-|x|^2/2t}dx\\
&=\frac{\varepsilon}{2}+2\|f\|\int_{|z|\geqslant\delta/2\sqrt{t}}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-|z|^2/2}dz.
\end{aligned}
$$

当 t 充分小时，第二积分小于 $\varepsilon/2$. □

注 1 如 $f \in C_0$, 则 f 均匀连续，故 (17) 对 $f \in C_0$ 成立. 由 (17) 的启发，补定义 $T_0 f = f, T_0 = I$ (恒等算子). 上引理讨论了 $t \to 0$ 的情况；至于 $t \to \infty$, 则有

引理 4 如 $f \in C_0$, 则 $\lim\limits_{t\to\infty} \|T_t f\| = 0$.

证 对 $\varepsilon > 0$, 存在 $r > 0$, 使 $x \overline{\in} B_r \equiv (x : |x| \leqslant r)$ 时，$|f(x)| < \varepsilon/2$. 于是

$$\begin{aligned}\|T_t f\| &< \frac{\varepsilon}{2} + \sup_y \int_{B_r} \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\Big(-\frac{|x-y|^2}{2t}\Big) f(x)\,dx \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sup_y \|f\| \int_{t^{-1/2}(B_r - y)} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\Big(-\frac{|z|^2}{2}\Big)\,dz \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \|f\| \int_{t^{-1/2}B_r} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}, \exp\Big(-\frac{|z|^2}{2}\Big)\,dz \end{aligned} \tag{18}$$

其中

$$a(B_r - y) = (a(x-y) : x \in B_r).$$

因而 $B_r - y$ 是以 $-y$ 为中心、r 为半径的球. 当 t 充分大时，(18) 中最后一项 $< \varepsilon/2$. □

为讨论对一般 t 的连续性，先证 T_t 的半群性.

引理 5 $T_{s+t} = T_s T_t$ $(s \geqslant 0, t \geqslant 0, T_0 = I)$.

证

$$\begin{aligned} T_s T_t f(z) &= (2\pi s)^{-n/2}(2\pi t)^{-n/2} \iint e^{-|y-z|^2/2s} e^{-|x-y|^2/2t} f(x)\,dxdy \\ &= (2\pi s)^{-n/2}(2\pi t)^{-n/2} \iint \exp\Big[-\frac{|y-(zt+xs)/(s+t)|^2}{2st/(s+t)}\Big] \\ &\quad \cdot \exp\Big[\frac{-|x-z|^2}{2(s+t)}\Big] f(x) dy dx, \end{aligned}$$

其中每次积分都在 R^n 上进行. 利用

$$[2\pi st/(s+t)]^{-n/2} \int \exp\Big[-\frac{|y-(zt+xs)/(s+t)|^2}{2st(s+t)}\Big]\,dy = 1$$

得知上式右端等于

$$[2\pi(s+t)]^{-n/2} \int \exp\Big[-\frac{|x-z|^2}{2(s+t)}\Big] f(x) dx = T_{s+t} f(z). \ \square$$

由 (16) 及引理 5 知 $\{T_t, t \geqslant 0\}$ 构成作用于 B 上的线性算子压缩半群，(16) 表压缩性.

引理 6 如 f 均匀连续，或 $f \in C_0$, 则 $T_t f(x)$ 对 $t \geqslant 0$ 均匀连续，而且此连续性对 $x \in R^n$ 也是均匀的.

证 利用 T_t 的半群性、压缩性、引理 3 及注 1, 对 $h > 0$, 有

$$\|T_{t+h} f - T_t f\| \leqslant \|T_t\| \cdot \|T_h f - f\| \leqslant \|T_h f - f\| \to 0, \quad (h \to 0);$$

对 $h = -k < 0$, 有

$$\|T_{t+h} f - T_t f\| \leqslant \|T_{t-k}\| \cdot \|T_k f - f\| \leqslant \|T_k f - f\| \to 0, \quad (h \to 0). \ \square$$

按范 $\|\cdot\|$ 的收敛称为强收敛，记为 slim. 令

$$D_A=\Big\{f:\ f\in B,\ 存在 \operatorname*{slim}_{h\to 0+}\frac{T_hf-f}{h}=g\in B\Big\}. \tag{19}$$

简记

$$\operatorname*{slim}_{h\to 0+}\frac{T_hf-f}{h}=g \text{ 为 } Af=g.$$

称 A 为半群 $\{T_t,t\geqslant 0\}$ 或过程 X 的强无穷小算子，称 D_A 为 A 的定义域.

下定理把布朗运动与拉普拉斯方程联系起来.

定理 2 设 f 有界、二次连续可微，又二阶偏导数有界且在 R^n 上均匀连续，则 $f\in D_A$, 又

$$Af(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2}\ \Big(\equiv\frac{1}{2}\Delta f(x)\Big), \tag{20}$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

证

$$\begin{aligned}T_tf(x)&=\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\int\exp\Big[-\frac{|y-x|^2}{2t}\Big]f(y)\,dy\\&=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int e^{-z^2/2}f(x+z\sqrt{t})\,dz,\end{aligned} \tag{21}$$

其中 $\int=\int_{R^n}$. 令 $f_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $f_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$, 利用泰勒展式，得

$$\begin{aligned}f(x+z\sqrt{t})=&f(x)+\sqrt{t}\sum_{i=1}^{n}z_if_i(x)\\&+\frac{t}{2}\sum_{i,j=1}^{n}z_iz_jf_{ij}(x)+\frac{t}{2}\sum_{i,j=1}^{n}[f_{ij}(\widetilde{x})-f_{ij}(x)]z_iz_j.\end{aligned}$$

$\widetilde{x}$ 之坐标分别在 x 与 $x+z\sqrt{t}$ 的坐标之间. 以此代入 (21), 得

$$T_tf(x)=f(x)+\frac{t}{2}\Delta f(x)+(2\pi)^{-n/2}\frac{t}{2}J(t,x), \tag{22}$$

其中

$$J(t,x)=\int e^{-z^2/2}\sum_{i,j=1}^{n}[f_{ij}(\widetilde{x})-f_{ij}(x)]z_iz_j\,dz.$$

令

$$F(x,z,t)=\max_{i,j}|f_{ij}(\widetilde{x})-f_{ij}(x)|$$

则对任意 $s>0$, 有

$$\begin{aligned}|J(t,x)|&\leqslant\int e^{-z^2/2}\sum_{i,j=1}^{n}F(x,z,t)\frac{z_i^2+z_j^2}{2}\,dz=n\int F(x,z,t)e^{-z^2/2}z^2\,dz\\&\leqslant n\int_{|z|<s}F(x,z,t)z^2e^{-z^2/2}\,dz+2\max_{i,j}\|f_{ij}\|n\int_{|z|\geqslant s}z^2e^{-z^2/2}\,dz.\end{aligned}$$

由于 f_{ij} 的均匀连续性，当 $t\downarrow 0$ 时，第一项对 x 均匀地趋于 0. 故

$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\sup_x |J(t,x)| \leqslant 2\max_{i,j}\|f_{ij}\| n\int_{|z|\geqslant s} z^2 e^{-z^2/2}\,dz.$$

由 §1 引理 1, 当 $s\to\infty$ 时，右方趋于 0, 故

$$\lim_{t\to 0}\sup_x |J(t,x)| = 0.$$

由此及 (22) 得

$$\lim_{t\to 0+}\left\|\frac{T_t f - f}{t} - \frac{1}{2}\Delta f\right\| = 0. \ \square$$

注 2 如 f 有界、二次连续可微，则在任一紧集 $K(\subset R^n)$ 上，均匀地有

$$\lim_{t\to 0+}\frac{T_t f(x) - f(x)}{t} = \frac{1}{2}\Delta f(x). \tag{23}$$

实际上，只要在上述证明中，改 $\sup\limits_x$ 为 $\sup\limits_{x\in K}$, 改 "均匀" 为在 "K 上均匀", 改 $\|f\|$ 为 $\sup\limits_{x\in K}|f(x)|$.

(三) 作为马氏过程的布朗运动 考虑 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的布朗运动 $\{x_t(\omega), t\geqslant 0\}$. 不妨设 $x_0(\omega)\equiv 0$, 因而 $P(x_0(\omega)=0)=1$ (否则考虑 $\{x_t(\omega)-x_0(\omega), t\geqslant 0\}$, 它显然也是一布朗运动). 自然地称它为自 0 出发的布朗运动. 令 $\mathcal{N}_t^s$ 为 $\{x_u(\omega), s\leqslant u\leqslant t\}$ 所产生的 σ 代数，记 $\mathcal{N}_t=\mathcal{N}_t^0$, $\mathcal{N}^s=\mathcal{N}_\infty^s=\bigcup\limits_{t\geqslant s}\mathcal{N}_t^s$, $\mathcal{N}=\mathcal{N}_\infty^0$.

今对每 $a\in R^n$, 定义 $x_t^a(\omega)\equiv x_t(\omega)+a$. 由平移不变性，知 $X^a\equiv\{x_t^a(\omega), t\geqslant 0\}$ 也是布朗运动. 自然地称它为自 a 出发的布朗运动. 注意由 $\{x_u^a(\omega), s\leqslant u\leqslant t\}$ 产生的 σ 代数也是 $\mathcal{N}_t^s$. 以 P_a 表 X^a 在 $\mathcal{N}$ 上产生的概率测度，它是满足下列条件的唯一测度：对任意 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_m$, $A_i\in\mathcal{B}^n$,

$$\begin{aligned}P_a(x^a(t_1)\in A_1,\cdots,x^a(t_m)\in A_m) &= P(x(t_1)+a\in A_1,\ \cdots,\ x(t_m)+a\in A_m)\\ &= \int_{A_1}p(t_1,a,da_1)\int_{A_2}p(t_2-t_1,a_1,da_2)\cdots\int_{A_m}p(t_m-t_{m-1},a_{m-1},da_m),\end{aligned} \tag{24}$$

其中 $p(t,x,y)$ 由 (6) 定义. 在 $\mathcal{N}$ 上，P 重合于 P_0.

全体 $X^a(a\in R^n)$ 构成一马氏过程 $X=(x_t,\mathcal{N}_t,P_x)$, 这里的 x_t 应理解为全体 $x_t^a(a\in R^n)$, 它的转移密度为 (6) 中的 $p(t,x,y)$. 此马氏过程是由各点出发的布朗运动所共同组成，因而可以利用马氏过程的理论. 以后所说的布朗运动，无特别声明时，均指此马氏过程. X 有下列性质：

1) 由引理 2(i) 及轨道 x_t 对 t 的连续性，知 X 是强马氏过程 (文献 [8] 中定理 3.10).

2) 由引理 2 及文献 [8] 中定理 3.3, 过程 $X'=(x_t,\mathcal{N}_{t+},P_x)$ 也是强马氏过程；这里 $\mathcal{N}_{t+}=\bigcap\limits_{u>t}\mathcal{N}_u$. 又由 [8] 引理 3.3, 关于过程 X', τ 为马氏时间的充要条件是：$\forall t\geqslant 0$,

$$(\tau<t)\in\mathcal{N}_t.$$

3) 以 $\overline{\mathcal{N}}_t$ 表 $\mathcal{N}_t$ 关于一切 $P_x(x \in R^n)$ 的完全化 σ 代数，$\overline{P}_x$ 表 P_x 在 $\overline{\mathcal{N}}$ 上之延拓，则 $(x_t, \overline{\mathcal{N}}_{t+}, \overline{P}_x)$ 也是强马氏过程 (文献 [8] 中定理 3.12).

§11.3 首中时与首中点

(一) 首中时. 近代马氏过程论中的一个极重要的概念是首中某集 B 的时间. 对 n 维布朗运动 X 及集 $B \in \mathcal{B}^n$, 定义

$$h_B(\omega) = \begin{cases} \inf(t > 0, x_t(\omega) \in B), & \text{如右集非空} \\ \infty, & \text{反之}. \end{cases} \tag{1}$$

称 $h_B(= h_B(\omega))$ 为 B 的首中时 (hitting time)(或首达时), 亦称为 $B^c(= R^n - B)$ 的首出时.

h_B 是马氏时间. 当 B 为开集时，此结论极易证明：实际上，由轨道的连续性，对 $t > 0$,

$$(h_B < t) = \bigcup_{\text{有理} r < t} (x_r \in B) \in \mathcal{N}_t.$$

但对一般的 $B \in \mathcal{B}^n$, 则证明很困难而需用到 Choquet 的容度论 (见文献 [1] 或 [23] 中附录).

在 $(h_B < \infty)$ 上考虑 $x(h_B)(= x(h_B, \omega))$, 它是随机变量，取值于 R^n. 称它为集 B 的首中点，显然，如 B 是紧集，则 $x(h_B) \in B$. 对一般的 B, 只有 $x(h_B) \in \overline{B}$ (B 的闭包).

引理 1 (0-1 律) 设 $A \in \overline{\mathcal{N}}_{0+}$, 则

$$P_a(A) = 0 \text{ 或} 1.$$

证 以 θ_t 表 X 的推移算子 (见文献 [8]), 因 $\theta_0 A = A$, 故由马氏性得

$$P_a(A) = P_a(A\theta_0 A) = \int_A P_a(\theta_0 A | \overline{\mathcal{N}}_{0+}) P_a(d\omega) = \int_A P_{x(0)}(A) P_a(d\omega) = [P_a(A)]^2. \ \square$$

既然 $(h_B = 0) \in \overline{\bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{N}_\varepsilon} = \overline{\mathcal{N}}_{0+}$, 故由引理 1

$$P_a(h_B = 0) = 0 \text{ 或} 1.$$

在后一情况，称 a 为 B 的规则点；否则称为非规则点. 直观地说，从 a 出发，作布朗运动的粒子能立刻击中 B 的点是 B 的规则点；因此，容易想象，B 在规则点附近不能太稀疏. 以 $\overset{\circ}{B}$ 表 B 的内点所成的集. 由 X 的轨道的连续性，如 $a \in \overset{\circ}{B}$, 则 a 是 B 的规则点；如 $a \in (\overline{B})^c$ (c 表补集运算), 则自 a 出发，必须在开集 $(\overline{B})^c$ 中停留一段时间而不能立即击中 B, 故 a 是 B 的非规则点. 以 B^r 表 B 的规则点的集，由上述得

$$\overset{\circ}{B} \subset B^r \subset \overline{B}. \tag{2}$$

剩下只是边界 $\partial B(= \overline{B} \cap \overline{B^c})$ 上的点，可以是规则点，也可能非规则.

如 B 有内点，由 (2) 知 B^r 非空. 可见对一般的集，规则点应很多而非规则点则较少. 的确，以后会证明 (§3, 定理 4), B 中非规则点集 $B \cap (B^r)^c$ 的 L 测度为 0.

一个极端情况是 $B^r = \phi$(空集), 因之 B 必无内点而呈稀疏态. 称 B 为疏集，如存在 $D \in \mathcal{B}^n$, $B \subset D$, $D^r = \phi$. 由此定义

$$P_a(h_B = 0) \leqslant P_a(h_D = 0) \equiv 0,$$

故自任一点 a 出发都不能立即击中疏集 B.

更极端的情况是自任一点出发都永不能击中的集. 称 B 为极集，如 $P_a(h_B < \infty) \equiv 0$.

显然，极集是疏集. 以后将证明：紧集是极集的充要条件是它为疏集 (§11, 定理 2); B 为极集的充要条件是它的容度 $\tilde{C}(B) = 0$ (§11, 定理 4).

(二) 首次通过公式 此公式很重要. 设 τ 为马氏时间，对 τ 用强马氏性，得

$$P_a(x_t \in A) = P_a(x_t \in A, \tau > t) + \int_0^t \int P_b(x_{t-s} \in A) P_a(\tau \in ds, x_\tau \in db). \tag{3}$$

因而对可积函数 $f(x)$, 有

$$E_a f(x_t) = E_a(f(x_t), \tau > t) + \int_0^t \int E_b f(x_{t-s}) P_a(\tau \in ds, x_\tau \in db), \tag{4}$$

其中 $\int = \int_{R^n}$, E_a 表对应于 P_a 的数学期望.

特别，如取 $\tau = h_B$, 则因 $x(h_B) \in \overline{B}$, 故此时 (4) 中的积分 $\int_{R^n}$ 可换为 $\int_{\overline{B}}$.

(三) 球面的首中时 对一般的 B, 求出 h_B 的分布是相当困难的问题，对首中点 $x(h_B)$ 也如此. 只是对少数的 B, 问题可以解决，例如球面 $S_r = (x : |x| = r)$, $r > 0$. 简记 S_r 的首中时为 h_r.

定理 1 i) $P_a(h_r < \infty) = 1$, $(|a| \leqslant r)$;

ii) $E_0 h_r = r^2/n$;

iii) $E_a h_r$ 当 $|a| \leqslant r$ 时有界.

证 由 (4)

$$E_0 f(x_t) = E_0(f(x_t), h_r > t) + \int_0^t \int_{S_r} E_b f(x_{t-s}) P_0(h_r \in ds, x(h_r) \in db). \tag{5}$$

特别，取 $f(x) = |x|^2 = \sum\limits_{i=1}^n x_i^2$. 由于 $x(u)$ 的每个分量 $x_i(u)$ 在开始分布 P_{b_i} 下有 $\mathcal{N}(b_i, \sqrt{u})$ 一维正态分布，故

$$E_{b_i}[x_i(u)]^2 = b_i^2 + u,$$

从而

$$E_b f(x_u) = \sum_{i=1}^n E_{b_i}[x_i(u)]^2 = |b|^2 + nu. \tag{6}$$

以 (6) 代入 (5) 得

$$nt = E_0(|x_t|^2, h_r > t) + \int_0^t \int_{S_r} [|b|^2 + n(t-s)] P_0(h_r \in ds, x(h_r) \in db).$$

当 $b \in S_r$ 时，$|b| = r$ 是一常数，故

$$nt = E_0(|x_t|^2, h_r > t) + r^2 P_0(h_r \leqslant t) + nE_0(t - h_r, h_r \leqslant t),$$

亦即

$$ntP_0(h_r > t) + nE_0(h_r, h_r \leqslant t) = E_0(|x_t|^2, h_r > t) + r^2 P_0(h_r \leqslant t). \tag{7}$$

当 $h_r > t$ 时，$|x_t|^2 < r^2$, 故

$$ntP_0(h_r > t) + nE_0(h_r, h_r \leqslant t) \leqslant 2r^2. \tag{8}$$

令 $t \to \infty$, 可见 $P_0(h_r > t) \to 0$, 或

$$P_0(h_r < \infty) = 1. \tag{9}$$

同理，当 $t \to \infty$ 时，得 $E_0 h_r < \infty$. 由于

$$E_0 h_r = \int_0^t sdF(s) + \int_t^\infty sdF(s) \geqslant \int_0^t sdF(s) + tP_0(h_r > t),$$

其中 $F(s) = P_0(h_r \leqslant s)$, 从而 $tP_0(h_r > t) \to 0$, $(t \to \infty)$. 由此及 (9), 于 (7) 中令 $t \to \infty$, 即得 $nE_0(h_r) = r^2$, 此即 ii).

今考虑一般的 a, $|a| \leqslant r$. 以 $S_u(a)$ 表以 a 为中心、u 为半径的球面. 选 u 充分大，使一切 $S_u(a)(|a| < r)$ 都包含 S_r. 以 $h_u(a)$ 表 $S_u(a)$ 的首中时，$h_u = h_u(0)$, 则

$$P_a(h_r < h_u(a)) = 1.$$

由布朗运动的平移不变性，

$$P_a(h_r < \infty) \geqslant P_a(h_u(a) < \infty) = P_0(h_u < \infty) = 1.$$

最后，

$$E_a h_r \leqslant E_a[h_u(a)] = E_0 h_u = \frac{u^2}{n}. \ \square$$

以 e_B 表 B 的首出时，即 $e_B = h_{B^c}$.

系 1 设 $B \in \mathcal{B}^n$ 有界，则 $E_x(e_B)$ 对 $x \in B$ 有界.

证 只要取充分大的球包含 B, 并仿上证即可. $\square$

注 1 如 B 无界，则问题复杂. 例如，设 $n = 2$, $B_\alpha = (x : x \in R^2, x \neq 0, 0 < \theta < \alpha)$, θ 是 x 与向量 (1,0) 的交角. 可以证明：$E_a(e_{B_\alpha}) < \infty$,(一切 $a \in B_\alpha$), 等价于 $\alpha < \frac{\pi}{4}$. 对一般的连通开集 B, 则可证明：$E_a(e_B^{p/2}) < \infty$ 对某 $a \in B$, 因之对一切 $a \in B$ 成立，等价于存在调和于 B 中的函数 u, 使 $|x|^p \leqslant u(x)$, $x \in B$. 见文献 [2; 2_1].

注 2 至于 h_r 的分布，在文献 [4] 中证明了：

$$P_0(h_r > a) = \sum_{i=1}^\infty \xi_{ni} \exp\Big(- \frac{q_{ni}^2}{2r^2} a \Big), \ (a \geqslant 0), \tag{10}$$

其中 q_{ni} 是 Bessel 函数 $J_v(z)$ $(v=\frac{n}{2}-1)$ 的正零点，又

$$\xi_{ni}=q_{ni}^{v-1}/2^{v-1}\Gamma(v+1)J_{v+1}(q_{ni}). \tag{11}$$

那里还发现了一个有趣的事实：以 $T_r^{(n+2)}$ 表 $n+2$ 维布朗运动在 $n+2$ 维球 $B_r=\left(x:\sum_{i=1}^{n+2}x_i^2\leqslant r^2\right)$ 内的停留时间，以 $h_r^{(n)}$ 表 n 维布朗运动首中球面 $S_r=\left(x:\sum_{i=1}^{n}x_i^2=r^2\right)$ 的时间，则关于 P_0, $T_r^{(n+2)}$ 与 $h_r^{(n)}$ 同分布，故 $P_0(T_r^{(n+2)}>a)$ 也等于 (10) 之右方值．这些结果为 [10_1] 所发展，例如，求出了 h_r 的拉氏变换：

$$E_be^{-\lambda h_r}=\left(\frac{r}{|b|}\right)^vI_v(\sqrt{2\lambda}|b|)/I_v(\sqrt{2\lambda}r),\ \ (n\geqslant 2), \tag{12}$$

其中 I_v 为 modified Bessel 函数，$v=\frac{n}{2}-1,\ 0<|b|<r$; 而

$$E_0e^{-\lambda h_r}=(r\sqrt{2\lambda})^v/[2^vI_v(r\sqrt{2\lambda})\Gamma(v+1)],\ \ (n\geqslant 2). \tag{13}$$

在上二式中，$\lambda>0$.

(四) 球面的首中点 今讨论首中点 $x(h_r)$ 的分布．由定理 1 i), $P_a(x(h_r)\in S_r)=1, |a|\leqslant r$. 下面证明：关于 $P_0, x(h_r)$ 有球面上的均匀分布 U_r, U_r 由 §1(16) 定义.

设 H 为 R^n 上正交变换，它把点 x 变为点 Hx, 把集 A 变为集 $HA=(Hx:x\in A)$. $\mathcal{B}^n$ 上的测度 U 称为关于 H 不变，如 $U(A)=U(HA), A\in\mathcal{B}^n$.

引理 2 设 U 为 S_r 上之概率测度，它对任一保留原点不动的正交变换 (或旋转)H 不变，则 $U=U_r$.

证 1° 设 φ 为 U 之特征函数，ξ 是以 U 为分布之随机向量，即 $P(\xi\in A)=U(A)$. 由

$$P(H^{-1}\xi\in A)=P(\xi\in HA)=U(HA)=U(A)$$

知 $H^{-1}\xi$ 与 ξ 同分布．于是

$$\varphi(x)=Ee^{i(x,\xi)}=Ee^{i(x,H^{-1}\xi)}=Ee^{i(Hx,\xi)}=\varphi(Hx),$$

即 $\varphi(x)$ 在上述变换下也不变，故必为 $|x|$ 的函数；从而存在一元函数 $\psi(s)$, 使

$$\varphi(x)=\psi(|x|),\ \ (x\in R^n). \tag{14}$$

2° 显见 U_r 对上述变换不变，故由上知：对 U_1 的特征函数 φ_1, 存在一元函数 ψ_1, 使

$$\varphi_1(x)=\psi_1(|x|),\ \ (x\in R^n). \tag{15}$$

而 U_r 的特征函数 $\varphi_r(x)$ 满足

$$\varphi_r(x)=\int_{S_r}e^{i(x,y)}U_r(dy)=\int_{S_1}e^{i(rx,y)}U_1(dy)=\psi_1(r|x|),\ \ (x\in R^n). \tag{16}$$

3° 对任 $s>0$, 有

$$\begin{aligned}\psi(s)&\overset{(14)}{=}\int_{S_s}\varphi(x)U_s(dx)=\int_{S_s}U_s(dx)\int_{S_r}e^{i(x,y)}U(dy)\\&=\int_{S_r}U(dy)\left(\int_{S_s}e^{i(x,y)}U_s(dx)\right)=\int_{S_r}\varphi_s(y)U(dy)\\&\overset{(16)}{=}\int_{S_r}\psi_1(s|y|)U(dy)=\psi_1(sr).\end{aligned} \tag{17}$$

因之

$$\varphi(x) = \psi(|x|) \overset{(17)}{=} \psi_1(r|x|) \overset{(16)}{=} \varphi_r(x),\quad (x \in R^n).\ \square$$

定理 2 对可测集 $A \subset S_r$, 有

$$P_0(x(h_r) \in A) = U_r(A). \tag{18}$$

证 以 H 表引理 2 中的变换，由 §2 引理 1, HX 也是布朗运动. 以 h'_r 表 HX 对 S_r 的首中时，则因正交变换保持距离不变，故 $h_r = h'_r$. 于是

$$P_0(x(h_r) \in A) = P_0(Hx(h'_r) \in A) = P_0(Hx(h_r) \in A) = P_0(x(h_r) \in H^{-1}A).$$

这说明 $x(h_r)$ 的分布关于 H^{-1} 不变. 但 H^{-1} 可以是上述任一正交变换. 故由引理 2 即得证 (18). □

注 3 §5 会证明，如从球内任一点 x 出发，则

$$P_x(x(h_r) \in A) = \int_A r^{n-2}|\,|x|^2 - r^2|\,|y-x|^{-n}U_r(dy),\quad (|x| < r). \tag{19}$$

特别，当 $x = 0$, 此式化为 (18).

注 4 能具体求出首中点分布的，尚有：

1° 超平面 $\Pi = (x : (a, x) = c)$, 其中向量 $a \neq 0$, c 为常数. 以 μ 表 Π 上的面积测度，则

$$P_x(x(h_\Pi) \in dy) = \frac{\Gamma(n/2)d(x,\Pi)}{\pi^{n/2}|y-x|^n}\mu(dy),\ (n \geqslant 2),$$

其中 $d(x, \Pi)$ 为 x 到 Π 的距离.

2° 当 $n = 2$ 时，自 $(x, 0)$ 出发，$(x \neq 0)$, Y 坐标轴的首中点有柯西分布密度为 $|x|/\pi(x^2 + y^2)$, $(y \in R^1)$.

(五) 一般性质 称函数 f 在点 x 下连续，如 $\lim\limits_{y \to x} f(y) \geqslant f(x)$.

定理 3 设 $B \in \mathcal{B}^n$, 则 $P_x(h_B \leqslant t)$ 对固定的 x 是 $t > 0$ 的连续函数；对固定的 $t > 0$ 是 x 的下连续函数.

证 设对某 $t > 0$ 有 $P_x(h_B = t) > 0$, 则对任意 d, $0 < d < t$, 有

$$\int p(d, x, y)P_y(h_B = t - d)dy \geqslant P_x(h_B = t) > 0. \tag{20}$$

于是存在 $r > 0$ 使

$$\int_{|y| \leqslant r} p(d, x, y)P_y(h_B = t - d)dy \geqslant \frac{1}{2}P_x(h_B = t) > 0. \tag{21}$$

由此知对任意 d, $0 < d < t$, 有

$$\int_{|y| \leqslant r} P_y(h_B = t - d)dy > 0. \tag{22}$$

否则 $P_y(h_B = t - d) = 0$. (L-a.e.y) 而 (21) 左方应为 0.

考虑非降函数 $F(t)$

$$F(t)=\int_{|y|\leqslant r}P_y(h_B\leqslant t)dy.$$

因 $F(\infty)\leqslant\int_{|y|\leqslant r}dy<\infty$, 故 $F(t)$ 至多只有可列多个不连续点；但 (22) 却表示其不连续点非可列，此矛盾证实了定理的前一结论.

固定 $t>0$, 注意

$$\int p(d,x,y)P_y(h_B<t-d)dy=P_x\ (\text{对某}s\in(d,t),x_s\in B).$$

由 §2 引理 2(i), 左方、因而右方对 x 连续；但 $d\downarrow 0$ 时，右方 $\uparrow P_x(h_B<t)=P_x(h_B\leqslant t)$, 故后者对 x 下连续. □

定理 4 设 $B\in\mathcal{B}^n$, 则 B^r 是 G_δ 型集，而且 $B\cap(B^r)^c$ 的 L 测度为 0.

证 由定理 3 后一结论知，对固定的 $t>0$ 及 $a,(x:P_x(h_B\leqslant t)>a)$ 是开集；故由下式立知 B^r 是 G_δ 集：

$$B^r=\{x:P_x(h_B=0)=1\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(x:P_x\left(h_B\leqslant\frac{1}{n}\right)>1-\frac{1}{n}\right).$$

任取相对紧集 [1] $A\subset B\cap(B^r)^c$. 先证

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_A P_x(x_t\in A)dx=0. \tag{23}$$

实际上，我们有

$$P_x(x_t\in A)\leqslant P_x(h_A\leqslant t)\leqslant P_x(h_B\leqslant t).$$

当 $x\in A$ 时， $x\in(B^r)^c$, 故

$$0\leqslant\varlimsup_{t\downarrow 0}P_x(x_t\in A)\leqslant\lim_{t\downarrow 0}P_x(h_B\leqslant t)=0.$$

由 Fatou 引理得证 (23). 考虑有界连续函数 $f(x)$:

$$f(x)=\int\chi_A(z+x)\chi_A(z)\,dz=\int_A\chi_A(z+x)\,dz,$$

χ_A 为 A 的示性函数.

$$E_0f(x_t)=E_0\int_A\chi_A(z+x_t)\,dz=\int_A P_0(x_t+z\in A)\,dz=\int_A P_z(x_t\in A)\,dz.$$

由 (23), 得 A 的测度为

$$|A|=f(0)=\lim_{t\downarrow 0}E_0f(x_t)=\lim_{t\downarrow 0}\int_A P_x(x_t\in A)\,dx=0.\ \square$$

---

[1] 称集 $A\in\mathcal{B}^n$ 为相对紧集，如 $\overline{A}$ 紧.

注 5 令 $f_B(x,t)=P_x(h_B\leqslant t)$, 紧集 $B\subset R^3$. 可以证明: $f_B(x,t)$ 是热传导方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{2}\Delta f\quad(t>0,x\in B^c)$$

在下列条件下的唯一解:

开始条件 $f(x,0)=0,\qquad(x\in B^c)$.

边值条件 $\lim\limits_{x\to y}f(x,t)=1,\ (t>0,y\in B\cap B^r)$.

因此, 可视 $f_B(x,t)$ 为于时 t 在点 $x\in B^c$ 上的温度. 在时 t 自 B 流入周围介质 B^c 中的总能量为

$$E_B(t)=\int_{B^c}P_x(h_B\leqslant t)\,dx=\int_{B^c}f_B(x,t)\,dx.$$

可以证明 [19]: 当 $n=3,t\to\infty$ 时

$$E_B(t)=tC(B)+4(2\pi)^{-3/2}[C(B)]^2t^{1/2}+o(t^{1/2}),$$

而且若 B 为球, 则 $o(t^{1/2})\equiv 0,\ (t>0)$. 这里 $C(B)$ 是 B 的容度 (见 §9).

§11.4 调和函数

(一) 定义 设 $A\subset R^n$ 为任一开集. 称函数 $h(x)$ 在 A 中调和, 如它在 A 中连续, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ 存在, 而且满足拉普拉斯方程

$$\Delta h\equiv\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}=0. \tag{1}$$

例 1 设 a 为任一定点, c_1 与 c_2 为二常数. 令

$$h(x)=c_1+c_2/|x-a|^{n-2},\quad(n\neq 2), \tag{2}$$

$$h(x)=c_1+c_2\log\frac{1}{|x-a|},\quad(n=2). \tag{3}$$

由直接计算知, 它们在 $R^n-\{a\}$ 中调和. 事实上, $h(x)$ 除在 a 点外连续. 设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$, 则

$$|x-a|=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-a_i)^2}.$$

若 $n>2$, 则

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}=c_2\frac{(2-n)(x_i-a_i)}{|x-a|^n},$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}=c_2\left\{\frac{n(n-2)(x_i-a_i)^2}{|x-a|^{n+2}}-\frac{n-2}{|x-a|^n}\right\}.$$

由此知 h 满足 (1). 对 $n=1,2$, 证明类似.

注意, 调和函数定义中的连续性必不可少.

下列 Дынкин 定理，很是有用．证明见文献 [8] 第 5 章 §1 或本书 §5.1 定理 1,§11.2 定理 2.

定理 1 设 A 为相对紧开集．如函数 u 在 $\overline{A}$ 连续，Δu 在 A 中存在、连续而且有界，则对一切 $x \in \overline{A}$ 有

$$E_x[u(x_e)] - u(x) = \frac{1}{2}E_x\left[\int_0^e \Delta u(x_s)\,ds\right], \tag{4}$$

其中 $e = e_A$ 为 A 的首出时.

由 (4) 知，如 u 在 $\overline{A}$ 连续且在 A 内调和，则

$$u(x) = E_x[u(x_e)], \quad (x \in \overline{A}). \tag{5}$$

下面讨论调和性的等价条件.

称函数 $f(x)$ 在开集 A 中为局部可积的，如它在 A 中每一紧集上为 L 可积．称 $u(x)$ 在 A 中具有球面平均性，如对每点 $a \in A$ 和每个球 $B_r(a) \equiv (x : |x-a| \leqslant r) \subset A$, $(r > 0)$, 有

$$u(a) = \int_{S_r(a)} u(x)U_r(dx), \tag{6}$$

U_r 为球面 $S_r(a)$ 上的均匀分布．由 §3 定理 2, 可改写 (6) 为

$$u(a) = E_a[u(x_{e_r})]. \tag{7}$$

e_r 为 $S_r(a)$ 的首中时，也是开球 $\mathring{B}_r(a) \equiv (x : |x-a| < r)$ 的首出时．这是球面平均性的概率表示.

定理 2 函数 $h(x)$ 在开集 A 中调和的充要条件是它在 A 中局部可积而且有球面平均性.

证 设 $h(x)$ 调和．由连续性得局部可积性．任取 $a \in A$, $\mathring{B}_r(a) \subset A$, 在 (5) 中取 u 为 h, e 为 e_r, 即得球面平均性.

反之，设 h 局部可积，而且满足 (6). 暂[1]增设 $h \in C^2(A)$, 则必有 $\Delta h = 0$. 否则，如说在某点 $a \in A$, 有 $\Delta h(a) > 0(< 0$ 时讨论类似); 由于 $h \in C^2(A)$, 必存在 $B_r(a) \subset A$, 使

$$P_a(\Delta h(x_s) > 0, s \leqslant e_r) = 1.$$

由 (4)

$$E_a[h(x_{e_r})] - h(a) = \frac{1}{2}E_a\left[\int_0^{e_r} \Delta h(x_s)\,ds\right] > 0,$$

这与 h 满足 (6) 矛盾.

现在证明：$h \in C^2(A)$ 的增设是多余的．甚至可以证明更强的结果：如 h 在 A 中局部可积而且有球面平均性，则 $h \in C^\infty(A)$.

为证此，首先注意：如 $g(x)$ $(x \in R^n)$ 为 L 可积，则有等式 (见 §1, 系 1)

$$\int g(x)\,dx = |S_1|\int_0^\infty \left(\int_{S_r} g(x)U_r(dx)\right) r^{n-1}\,dr, \tag{8}$$

[1] 说 $h \in C^m(A)$, 如 h 在 A 中有 $K(\leqslant m)$ 级连续偏导数.

其中 $|S_1|$ 为单位球的面积 (§1,(15)). 任取 $x_0 \in A$, 选 $\delta > 0$, 使球 $B_{2\delta}(x_0) \subset A$. 以 ψ 表 $[0,\infty)$ 上的非负、无穷次可微的函数，它在 $[\delta^2,\infty)$ 上恒为 0, 但在 $[0,\delta^2)$ 上不恒为 0. 则由 (8) 有

$$\begin{aligned}
\int_A \psi(|y-x|^2)h(y)\,dy &= \int_{B_r(0)} \psi(|y|^2)h(x+y)\,dy \\
&= |S_1| \int_0^\delta \left[\int_{S_r} \psi(|y|^2)h(x+y)U_r(dy) \right] r^{n-1}\,dr \\
&= |S_1| \int_0^\delta \psi(r^2) \left[\int_{S_r} h(x+y)U_r(dy) \right] r^{n-1}\,dr \\
&= |S_1| \int_0^\delta \psi(r^2) \left(\int_{S_r(x)} h(y)U_r(dy) \right) r^{n-1}\,dr \\
&= |S_1| h(x) \int_0^\delta \psi(r^2) r^{n-1}\,dr.
\end{aligned}$$

但此式左方作为 x 的函数在 $\overset{\circ}{B}_\delta(x_0)$ 中无穷次可微，故右方中的 $h(x)$ 也如此. □

对局部可积函数 $f(x)$, 以 $S^r f(a)$ 表它对球面 $S_r(a)$ 关于均匀分布的平均值：

$$S^r f(a) \equiv \int_{S_r(a)} f(x)U_r(dx) = \frac{1}{|S_r(a)|} \int_{S_r(a)} f(x)L_{n-1}(dx). \tag{9}$$

以 $B^r f(a)$ 表它对球体 $B_r(a)$ 关于勒贝格测度 L 的平均值：

$$B^r f(a) \equiv \frac{1}{|B_r(a)|} \int_{B_r(a)} f(x)L(dx). \tag{10}$$

$|B_r(a)|$ 表 $B_r(a)$ 的体积. 我们有

$$\begin{aligned}
B^r f(a) &= \frac{1}{|B_r(a)|} \int_0^r \int_{S_u(a)} f(x)L_{n-1}(dx)du \\
&= \frac{1}{|B_r(a)|} \int_0^r |S_u(a)| S^u f(a)\,du.
\end{aligned} \tag{11}$$

今设 h 调和，则 $h(a) = S^u h(a)$. 以 h 代入 (11) 中的 f, 得

$$B^r h(a) = \frac{h(a)}{|B_r(a)|} \int_0^r |S_u(a)|\,du = h(a). \tag{12}$$

这表示调和函数也有球体平均性.

(二) 性质 调和性的约束随所在区域之扩大而加强，极而言之，则有

定理 3 在 R^n 中调和而且有下界 (或上界) 的函数 $h(x)$ 是一常数.

证 因调和函数之负仍调和，故只需考虑有下界情况，而且不妨设下界为 0. 任取二点 x,y, 令 $a = |x-y|$. 对 $s > 0$, 有 $B_s(y) \subset B_{a+s}(x)$, 故

$$\int_{B_s(y)} h(z)L(dz) \leqslant \int_{B_{a+s}(x)} h(z)L(dz),$$

亦即

$$|B_s(y)| B^s h(y) \leqslant |B_{a+s}(x)| B^{a+s} h(x).$$

利用 (12) 得

$$|B_s(y)|h(y) \leqslant |B_{a+s}(x)|h(x).$$

于是由 $\lim\limits_{s\to\infty} \frac{|B_s(y)|}{|B_{a+s}(x)|} = 1$ 立得 $h(y) \leqslant h(x)$. 由 x 与 y 的对称性即得 $h(x) = h(y)$. □

定理 4 (极大 [或极小] 原理) 设 h 在有界开集 A 中调和，在 $\overline{A}$ 中连续，则对任意 $a \in \overline{A}$ 有

$$\inf_{x\in\partial A} h(x) \leqslant h(a) \leqslant \sup_{x\in\partial A} h(x). \tag{13}$$

证 以 e 表 A 的首出时. 由布朗运动轨道的连续性， x_e 属于 A 的边界 ∂A. 由 (4)

$$h(a) = E_a[h(x_e)] = \int_{\partial A} h(x)P_a(x_e \in dx),\ (a \in \overline{A}).$$

由此立得 (13). □

调和函数有许多有趣的性质，我们只叙述上述的一些，因为它们以后要用到，而且与概率论关系密切.

(三) 布朗运动轨道的性质

a. 设 $e \equiv e(r,R)$ 为球层 $A = (x: 0 < r < |x| < R)$ 的首出时，则对 $a \in A$ 有

$$P_a(|x_e| = r) = \begin{cases} (R^{2-n} - |a|^{2-n})/(R^{2-n} - r^{2-n}), & (n \neq 2); \\ (\log R - \log |a|)/(\log R - \log r), & (n = 2). \end{cases} \tag{14}$$

实际上，如 $n \neq 2$, 取 $h(x) = |x|^{2-n}$. 由例 1 知它在 A 中调和. 又由 §3 定理 1, $P_a(e < \infty) = 1$, $(a \in A)$. 从而

$$P_a(|x_e| = R) + P_a(|x_e| = r) = 1.$$

以此 h 的表达式代入 $h(a) = E_a[h(x_e)]$, 得

$$|a|^{2-n} = R^{2-n}(1 - P_a(|x_e| = r) + r^{2-n}P_a(|x_e| = r).$$

由此立得 (14) 中前一结论. 同理，对 $n = 2$, 取 $h(x) = \log |x|$, 可得后一结论.

b. 令 e_r 为球面 $S_r(0) = (x: |x| = r)$ 的首中时，则对 $|a| > r$, 有

$$P_a(e_r < \infty) = \begin{cases} (r/|a|)^{n-2}, & n \geqslant 3, \\ 1, & n \leqslant 2. \end{cases} \tag{15}$$

实际上， $e_r = \lim\limits_{R\to\infty} e(r,R)$, 故

$$P_a(e_r < \infty) = \lim_{R\to\infty} P_a(|x_e| = r).$$

由此及 (14) 即得 (15).

c. 一，二维布朗运动具有常返性：设 a,b 为任二点， h_b 为 b 的邻域 V_b 的首中时，则

$$P_a(h_b < \infty) = 1 \tag{16}$$

实际上，由 (15) 第二式知此结论对 $b = 0$ 成立. 由类似的证明知它对任意 b 也成立. 对一维布朗运动， (16) 还可加强，即其中的 h_b 可理解为单点集 $\{b\}$ 的首中时. 实际上，设 $a < b$,

任取 $c > b$. 则由 (16), 自 a 出发，首中 c 的任一不含 b 的邻域的概率为 1; 由轨道的连续性及 $a < b < c$, 中间经过 b 之概率也为 1.

d. 二维布朗运动轨道处处稠密. 令

$$D_t = (\omega : \{x_s(\omega), s \geqslant t\}\text{在 } R^2 \text{ 中稠密}).$$

则对任意 $a, P_a(D_t) = 1, (t \geqslant 0)$.

实际上，以 $h_b^{(r)}$ 表圆 $(x : |x - b| \leqslant r)$ 的首中时，则由 (16)

$$P_a(D_0) = P_a\Big(\bigcap_b \bigcap_r (h_b^{(r)} < \infty)\Big) = 1,$$

其中之交对一切二维有理点 b 及有理数 $r > 0$ 进行. 其次

$$P_a(D_t) = P_a(\theta_t D_0) = E_a P_{x(t)}(D_0) = 1.$$

e. 由于对任意 $t > 0, P_a(D_t) = 1$; 故

$$\begin{aligned} &P_a\big(\varlimsup_{t\to\infty} |x_t| = \infty\big) = 1; \\ &P_a\big(\varliminf_{t\to\infty} |x_t| = 0\big) = 1. \end{aligned} \tag{17}$$

f. 当 $n \geqslant 2$ 时，任意单点集 $\{a\}$ 是极集. 为此，只要在 (14) 中先令 $r \to 0$ 再令 $R \to \infty$, 即得 $P_a(e_0 < \infty) = 0$, 一切 $a \neq 0$, 其中 e_0 为 $\{0\}$ 的首中时. 其次，由 $P_0(x_t = 0) = 0, (t > 0)$, 得 $P_{x(t)}(e_0 < \infty) = 0, (P_0\text{-a.e.})$, 故

$$P_0(\theta_t e_0 < \infty) = E_0 P_{x(t)}(e_0 < \infty) = 0.$$

令 $t \downarrow 0$, 即得 $P_0(e_0 < \infty) = 0$. 于是得证

$$P_a(e_0 < \infty) = 0, \quad \text{一切 } a, \tag{18}$$

亦即得证 $\{0\}$ 是极集. 类似可证任意单点集为极集.

然而由 c 中末所述，$n = 1$ 时，单点集都常返；故一维布朗运动无非空极集.

g. $n \geqslant 3$ 维布朗运动是暂留的，即

$$P_a\big(\lim_{t\to\infty} |x_t| = \infty\big) = 1. \tag{19}$$

因而它不常返. 注意，此式加强了 (17). 为证此，令

$$T_m = \inf(t > 0, |x_t| \leqslant m), \quad u_m = \inf(t > 0, \ |x_t| \geqslant m^3).$$

由 §3 定理 1, $P_a(u_m < \infty) = 1$, 一切 a, 一切正整数 m. 从而 $P_a(\theta_t u_m < \infty) = 1, (t \geqslant 0)$. 故重新得证

$$P_a\Big(\varlimsup_{t\to\infty} |x_t| = \infty\Big) = 1. \tag{20}$$

由强马氏性及 (15),

$$P_a(\theta_{u_m}(T_m)<\infty)=E_aP_{x(u_m)}(T_m<\infty)=E_a\left[\left(\frac{m}{m^3}\right)^{n-2}\right]=m^{2(2-n)},$$

故对一切 a, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{\infty}P_a(|x(t+u_m)|\leqslant m \text{ 对某}t)\\&=\sum_{m=1}^{\infty}P_a(\theta_{u_m}(T_m)<\infty)=\sum_{m=1}^{\infty}m^{2(2-n)}<\infty.\end{aligned}$$

根据 Borel–Cantelli 引理，上式首项中的事件以 P_a- 概率 1 只出现有限多个；此与 (20) 结合即得证 (19).

§11.5 Dirichlet 问题

(一) 问题的提出与解决 设 A 为开集， $A\subset R^n, n\geqslant 2$. 在 A 的边界 ∂A 上已给连续函数 f, 需要求出在 $\overline{A}$ 连续. 在 A 中调和的函数 h, 而且满足边值条件

$$h(x)=f(x)\quad(x\in\partial A),\tag{1}$$

简称它为 D- 问题，是 Gauss 于 1840 年提出的. Gauss 以为他已用 “Dirichelet 原理” 解决了它，但后来发现推理有错. 1909 年 Zaremba 及 1913 年 Lebesgue 都给出了甚至当 A 有界时也无解之例. 1924 年 Wiener 提出了广义的 D- 问题，后者恒有解. 但他未发现与布朗运动的联系；这种联系是 Kakutani 于 1944 、 Doob 于 1954 年发现的.

D- 问题是否有解，依赖于边界 ∂A 上的点是否对 A^c 规则. 粗略地说， A^c 在边界点的邻近不能太小，以使布朗粒子从边界点出发能立即击中 A^c, 问题才有解.

如 A 有界且有解，则解必唯一；对无界的 A, 则解可不唯一而有无穷多个.

D- 问题在微分方程理论中已有很深入的研究，我们这里不追求问题的更广泛的提法，而把重点放在概率方法上. 人们正是通过 D- 问题最初发现布朗运动与位势间的关系的.

定理 1 设 A 为有界开集， $A\subset R^n, n\geqslant 2$, 则 D- 问题有解的充要条件是 ∂A 的每一点都是 A^c 的规则点；此时解 $h(x)$ 唯一，而且可表为

$$h(x)=E_xf(x_e)\quad(x\in\overline{A}),\tag{2}$$

e 为 A 的首出时.

证 1° 唯一：设 h_1,h_2 都是解，则 h_1-h_2 在 A 中调和，在 ∂A 上为 0. 由 §4 极大原理，得

$$h_1(x)=h_2(x),\quad(x\in\overline{A})$$

2° 充分：因 A 有界，由 §3 系 1,$P_x(e<\infty)\equiv 1$. 由于 ∂A 的每点 b 对 A^c 规则，故 $P_b(e=0)=1$. 因此，由 (2) 定义的 $h(x)$ 满足边值条件：

$$h(b)=E_bf(x_0)=f(b),\quad(b\in\partial A).$$

因 A 有界，f 在 ∂A 连续，故有界．由 (2) 定义的 $h(x)$ 有界可测，故局部可积．

以 T 表球面 $S_r(x)$ 的首中时，$x \in A, B_r(x) \subset A$．由强马氏性，(2) 中 h 满足

$$h(x) = E_x f(x(T + \theta_T e)) = E_x E_{x(T)} f(x(e)) = E_x h(x(T)). \tag{3}$$

故 h 在 A 中有球面平均性 (参看 §4,(7))．这连同局部可积性即知 $h(x)$ 在 A 中调和．

剩下要证 (2) 中的 $h(x)$ 在 $a \in \partial A$ 连续，亦即要证

$$\lim_{x \to a} E_x f(x_e) = f(a) \quad (x \in \overline{A}). \tag{4}$$

为此，先证对任 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{x \to a} P_x(|x_e - a| \geqslant \varepsilon) = 0. \tag{5}$$

而利用 $|x_e - a| \leqslant |x_e - x| + |x - a|$，可见为证 (5)，又只要证

$$\lim_{x \to a} P_x(|x_e - x| \geqslant \varepsilon) = 0; \tag{6}$$

这是由于

$$(|x_e - a| \geqslant \varepsilon) \subset \left(|x_e - x| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \left(|x - a| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right),$$
$$\lim_{x \to a} P_x(|x_e - a| \geqslant \varepsilon) \leqslant \lim_{x \to a} P_x\left(|x_e - x| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

下证 (6)．我们有

$$\begin{aligned} P_x(|x_e - x| \geqslant \varepsilon) &= P_x(|x_e - x| \geqslant \varepsilon, e \geqslant t) + P_x(|x_e - x| \geqslant \varepsilon, e < t) \\ &\leqslant P_x(e \geqslant t) + P_x(\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |x_s - x| \geqslant \varepsilon) \\ &\leqslant P_x(e \geqslant t) + P_0(\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |x_s| \geqslant \varepsilon) \\ &= P_x(e \geqslant t) + P_0(T_\varepsilon \leqslant t), \end{aligned} \tag{7}$$

其中 T_ε 为开球 $\mathring{B}_\varepsilon(0) = (x : |x| < \varepsilon)$ 的首出时．因 0 是 $B_\varepsilon(0)$ 的内点，故是 $R^n \backslash \mathring{B}_\varepsilon(0)$ 的非规则点，从而

$$\lim_{t \to 0} P_0(T_\varepsilon \leqslant t) = P_0(T_\varepsilon = 0) = 0;$$

故对 $\varepsilon_1 > 0$，存在 $t_0 > 0$，当 $t \leqslant t_0$ 时，

$$P_0(T_\varepsilon \leqslant t) < \frac{\varepsilon_1}{2}. \tag{8}$$

固定如此的 $t = t_0$．由 §3 定理 3，$P_x(e > t)$ 对 x 上连续；又 a 对 A^c 规则，故．

$$\overline{\lim_{x \to a}} P_x(e \geqslant t_0) \leqslant \overline{\lim_{x \to a}} P_x\left(e > \frac{t_0}{2}\right) \leqslant P_a\left(e > \frac{t_0}{2}\right) = 0.$$

故存在 $\delta > 0$，当 $x \in B_\delta(a) \cap \overline{A}$ 时，

$$P_x(e \geqslant t_0) < \frac{\varepsilon_1}{2}. \tag{9}$$

综合 (7)–(9) 知，对任何 $\varepsilon > 0, \varepsilon_1 > 0$, 当 $x \in B_\delta(a) \cap \overline{A}$ 时，

$$P_x(|x_e - x| \geqslant \varepsilon) < \varepsilon_1.$$

于是 (6) 以及 (5) 得证.

由 (5) 及 f 的连续性，对 $\varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3 > 0$, 存在 $r > 0$, 当 $x \in B_r(a) \cap \overline{A}$ 时，有

$$P_x(|f(x_e) - f(a)| > \varepsilon_2) < \varepsilon_3.$$

令 $B = (\omega : |f(x_e) - f(a)| > \varepsilon_2)$, 得

$$\begin{aligned}|E_x f(x_e) - f(a)| &\leqslant E_x|f(x_e) - f(a)| \\ &= E_x(|f(x_e) - f(a)|; B) + E_x(|f(x_e) - f(a)|, B^c) \leqslant 2\|f\|\varepsilon_3 + \varepsilon_2,\end{aligned}$$

其中 $\|f\| = \sup\limits_x |f(x)|$, 此得证 (4).

3° 必要：即要证：如 D- 问题对一切连续边值函数 f 有解，则每 $a \in \partial A$ 对 A^c 规则. 取 $f \geqslant 0$ 为定义在 ∂A 上的连续函数，而且只在一点 a 上，$f(a) = 0$. 由假设，存在连续于 $\overline{A}$, 调和于 A 中的函数 $h(x)$, 它在 ∂A 上等于 f. 由 §4(5)

$$h(x) = E_x[h(x_e)] = E_x f(x_e) \ (x \in \overline{A}),$$

故

$$E_a f(x_e) = h(a) = f(a) = 0.$$

由此及 $f \geqslant 0$, 得 $P_a(f(x_e) = 0) = 1$; 但 f 只在 a 点为 0, 故 $P_a(x_e = a) = 1$. 由于单点集 $\{a\}$ 为极集 (见 §4, f), 则必有 $P_a(e = 0) = 1$, 即 $a \in (A^c)^r$. □

注 1 Wiener 提出的广义 D- 问题是：设已给开集 A, 在 ∂A 上已给连续函数 f, 需要求出函数 h, 它在 A 中调和，而且对任意 $b \in \partial A \cap (A^c)^r$, 有

$$\lim_{A \ni x \to b} h(x) = f(b). \tag{10}$$

当 A 有界时，仔细看上定理的证明 2°, 可见 (2) 中的 $h(x)$ 仍是此广义 D- 问题的解. 但那里的唯一性证明 1° 不能通过，因为此时极大原理不能用. 不过可以证明解仍是唯一的 (见文献 [18] 第 5 章 §5).

注 2 今考虑任意开集 (未必有界)A 及定义在 ∂A 上的有界连续函数 f, 如 $\partial A \subset (A^c)^r$, 则 D- 问题有解为

$$h(x) = E_x[f(x_e), e < \infty] + cP_x(e = \infty), \tag{11}$$

c 为任意常数. 实际上，仿定理 1 中的证明 2°, 可见 $E_x[f(x_e), e < \infty]$ 仍是 D- 问题之一解. 特别，取 $f \equiv 1$, 则 $P_x(e < \infty)$ 是边值为 1 之 D- 问题之解；$P_x(e = \infty)$ 是边值为 0 之 D- 问题之解. 因此，对任意常数 c,(11) 是原 D- 问题之解. 进一步还可证明：D- 问题的任一解必呈 (11) 形 (见 [15; 17]).

注 3 在 Zaremba 的反例中，$A = \overset{\circ}{B}_1 \setminus \{0\}$ 是去掉原点的单位开球，边值函数 f 是：$f(0) = 1, f(x) = 0, x \in S_1$ (单位球面). $\{0\}$ 是极集. 广义 D- 问题有解为 $h(x) = E_x f(x_e) = 0$,

$x \in A$. (注意 $h(0) \neq 1$). 但 D- 问题无解. 关于 Lebesgue 的反例及其物理解释，见文献 [12] §7.12.

(2) 式开创了用概率方法解数学分析问题的先例. 关于一般的椭圆型方程等的概率解法可见 [8] 第 13 章及 [9]. 以某些方程的概率表示为理论基础的 Monte-Calro 方法，给出了这些方程的数值解.

定理 1 可如下推广：设 A 为有界开集，$\partial A \subset (A^c)^r$, f 为 ∂A 上的连续函数，e 为 A 的首出时，则

$$\Phi_\lambda(x) = E_x e^{-\lambda e} f(x_e) \quad (\lambda \geqslant 0) \tag{12}$$

在 A 中二次连续可微，而且是微分方程

$$\lambda \Phi_\lambda(x) - \frac{1}{2}\Delta \Phi_\lambda(x) = 0 \quad (x \in A) \tag{13}$$

在边值条件

$$\lim_{A \ni x \to a} \Phi_\lambda(x) = f(a) \quad (a \in \partial A)$$

下的唯一解 (证见文献 [5] 卷 2, 第 4 章 §4).

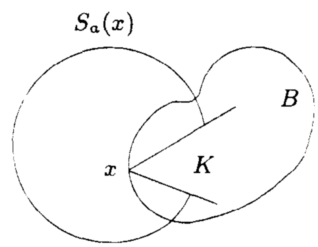
如 $\lambda = 0$, 则得定理 1; 如 $f \equiv 1$, 则得 e 的分布的拉氏变换.

(二) 锥判别法 由定理 1 可见点的规则性起着重要作用. 至于判断边界点是否规则，有下列简单的、Poincare 的锥判别法.

称 R^n 中集 K 为顶点在 $b \in R^n$ 的锥，如存在单位向量 $u \in R^n$ 及常数 $\alpha > 0$, 使 $K = (x : x \in R^n, |(x-b) \cdot u| \geqslant \alpha |x - b|)$. 设 $B_a(b)$ 为以 b 为心，以 $a > 0$ 为半径的球，称 $K \cap B_a(b)$ 为一锥顶.

定理 2 设 $B \in \mathcal{B}^n$, $x \in \partial B$. 如存在以 x 为顶点的锥顶 $K \cap B_a(x) \subset B$, 则 $x \in B^r$.

证 以 h_a 表球面 $S_a(x)$ 的首中时，由 §3 定理 2



$$P_x(x(h_a) \in B \cap S_a(x)) = U_a(B \cap S_a(x)) \geqslant U_a(K \cap S_a(x)).$$

注意 $U_a(K \cap S_a(x)) = \beta > 0$ 与 $a > 0$ 无关. 由于

$$(x(h_a) \in B) \subset (h_B \leqslant h_a),$$

h_B 为 B 的首中时，故

$$P_x(h_B \leqslant h_a) \geqslant P_x(x(h_a) \in B) \geqslant P_x(x(h_a) \in B \cap S_a(x)) \geqslant \beta > 0.$$

由 §3 定理 1 (ii), $P_x(\lim_{a \to 0} h_a = 0) = 1$. 在上式中令 $a \to 0$, 得 $P_x(h_B = 0) \geqslant \beta > 0$. 根据 0 1 律，$P_x(h_B = 0) = 1$. 故 $x \in B^r$. □

锥法虽只给出充分条件，但简单好用．至于充要条件则有 Wiener 判别法：

设 $B \in \mathcal{B}^n,(n \geqslant 3)$. $B_m = (y : y \in B, \lambda^{m+1} < |y - x| \leqslant \lambda^m)$, 其中常数 $0 < \lambda < 1$, 又 $x \in R^n$ 为定点，则 $x \in B^r$ 的充要条件是 $\sum\limits_{m-1}^{\infty} \lambda^{m(2-n)} C(B_m) = \infty$, $C(B_m)$ 表 B_m 的容度．(见文献 [12] 及 [17]).$n = 2$ 时也有类似结果．

(三) **球的 D- 问题**　设 $n \geqslant 3, A$ 为开球 $\overset{\circ}{B}_r$, $r > 0$. 一方面，由微分方程知：D- 问题的解由下列 Poisson 公式给出：

$$h(x) = \int_{S_r} r^{n-2} \frac{|r^2 - |x|^2|}{|x - z|^n} f(z) U_r(dz),\ |x| < r. \tag{14}$$

今考虑外 D- 问题 [1]：求 $h(x)$, 它在 $B_r^c = (x : |x| > r)$ 中调和，在 S_r 上，$h(x) = f(x)$, f 连续，而且满足

$$\lim_{|x| \to \infty} h(x) = 0. \tag{15}$$

则在微分方程中也证明了：此时外 D- 问题有唯一解 $h(x)$, 它仍然由 (14) 给出，但其中 $|x| > r$.

现在转到概率方面．以 e 表 S_r 的首中时，由定理 1 知，此 D- 问题的解为

$$h(x) = E_x f(x_e) = E_x(f(x_e), e < \infty),\ (|x| < r). \tag{16}$$

现在证明，外 D- 问题的解 $h(x)$ 也由 (16) 给出，但 $|x| > r$. 实际上，由注 2 已知 (16) 中 $h(x), (|x| > r)$ 是一解；其次，由方程论知在附加条件 (15) 下，外 D- 问题的解唯一．因此，只需验证 (16) 中 $h(x), (|x| > r)$ 满足 (15). 为此，先注意由 §4(15)

$$\lim_{|x| \to \infty} P_x(e = \infty) = 1.$$

故

$$\lim_{|x| \to \infty} |h(x)| \leqslant \lim_{|x| \to \infty} E_x(|f(x_e)|,\ e < \infty) \leqslant \|f\| \lim_{|x| \to \infty} P_x(e < \infty) = 0.$$

综合上述两方面，得

$$E_x f(x_e) = \int_{S_r} r^{n-2} \frac{|r^2 - |x|^2|}{|x - z|^n} f(z) U_r(dz),\ (x \overline{\in} S_r). \tag{17}$$

由此推知，球面 S_r 的首中点有分布为

$$P_x(x_e \in A) = \int_A \frac{r^{n-2}|r^2 - |x|^2|}{|x - z|^n} U_r(dz),\ (x \overline{\in} S_r). \tag{18}$$

其中 $A \subset S_r$ 为可测集．特别取 $x = 0$, 此式化为 §3,(18).

注 4　我们已看到，(17) 右方所定义的 x 的函数在 $\overset{\circ}{B}_r$ 中调和．将此式再推进一步．就得出 $\overset{\circ}{B}_r$ 中一切调和函数的 Poisson 积分表示．这就是：$H(x)$ 为非负、在 $\overset{\circ}{B}_r$ 中调和的函数的充要条件是：存在 S_r 上测度 μ, 使

$$H(x) = \int_{S_r} \frac{r^{n-2}(r^2 - |x|^2)}{|x - z|^n} \mu(dz),\ (x \in \overset{\circ}{B}_r), \tag{19}$$

[1] 参看文献 [6] 卷 2, 第 4 章，§2.2 及 [20] 第 4 章 §2, §4.

其中测度 μ 有穷而且被 H 唯一决定 (见文献 [17] 第 4 章， §4). 至于在一般开集中调和、非负函数，也有积分表示；为此，需引进所谓 Martin 边界，它起着类似于 (19) 中 S_r 的作用.

§11.6 禁止概率与常返集

(一) 三个重要函数 设 $B \in \mathcal{B}^n$,$\mathcal{B}$ 的首中时为 h_B、首中点为 $x(h_B)$. 如 §3 所述，有首次通过公式

$$P_x(x_t \in A) - \int_0^t \int_{\overline{B}} P_x(h_B \in ds, x(h_B) \in dz) P_z(x_{t-s} \in A) = P_x(h_B > t, x_t \in A). \tag{1}$$

作为 A 的测度，左方有密度为

$$\begin{aligned} p(t,x,y) - \int_0^t \int_{\overline{B}} P_x(h_B \in ds, x(h_B) \in dz). \\ p(t-s,z,y) \equiv q_B(t,x,y). \end{aligned} \tag{2}$$

简写左方的二重积分为 $\Phi(y)$. 取 $y_n \to y$, 由 Fatou 引理,

$$\varliminf_{y_n \to y} \Phi(y_n) \geqslant \Phi(y).$$

故 $\Phi(y)$ 下连续，从而由 (2) 定义的 $q_B(t,x,y)$ 对 y 上连续. 既然 (1) 之右方非负， $q_B(t,x,y)$ 关于勒贝格测度几乎处处非负；由上连续性，它对一切 y 非负. 由 (1) 知，作为 A 的测度 $P_x(h_B > t, x_t \in A)$ 有密度，可取它为 $q_B(t,x,y)$. 由于 $P_x(h_B > t, x_t \in A)$ 是自 x 出发，在首中 B(或首出 B^c) 以前，于 t 时到达 A 之概率，故可称 $q_B(t,x,y)$ 为禁止密度.

今引入三个重要函数，它们分别是三个密度的拉氏变换. 对 $\lambda \geqslant 0$, 定义

$$g^\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t,x)\, dt, \tag{3}$$

$$g_B^\lambda(x,y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} q_B(t,x,y)\, dt, \tag{4}$$

$$H_B^\lambda(x,dz) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_x(h_B \in dt, x(h_B) \in dz). \tag{5}$$

如 $\lambda = 0$, 简记 $g^0(x)$ 为 $g(x)$ 等等. 它们有性质：

1) $g^\lambda(0) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \dfrac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\, dt = \infty$, $(n > 1)$

$g^\lambda(x)$ 在 $x \neq 0$ 连续，而且 $\lim\limits_{x \to \infty} g^\lambda(x) = 0$.

2) $g^\lambda(y-x) \geqslant g_B^\lambda(x,y)$.

此因 $p(t,y-x) \geqslant q_B(t,x,y)$.

3) 测度 $H_B^\lambda(x,dz)$ 集中在 $\overline{B}$ 上，而且

$$\begin{aligned} E_x e^{-\lambda h_B} f(x(h_B)) &= \int_{\overline{B}} \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(z) P_x(h_B \in dt, x(h_B) \in dz) \\ &= \int_{\overline{B}} H_B^\lambda(x,dz)\, f(z). \end{aligned} \tag{6}$$

4) $E_x \int_0^{h_B} f(x_t) e^{-\lambda t} dt = \int g_B^\lambda(x,y) f(y)\, dy.$ (7)

实际上，左方等于

$$E_x \int_0^\infty f(x_t) e^{-\lambda t} \chi_{(h_B > t)} dt = \int \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_x(h_B > t, x_t \in dy) f(y)\, dt$$
$$= \int \int_0^\infty e^{-\lambda t} q_B(t,x,y) f(y)\, dy dt.$$

5) $g^\lambda(x) = g^\lambda(-x).$ (8)

6) $g_B^\lambda(x,y) = g_B^\lambda(y,x).$ (9)

这是由于

$$q_B(t,x,y) = q_B(t,y,x). \tag{10}$$

后者的证明见文献 [17] 第二章定理 4.3 或 [8] 引理 14.1.

7) 如 $x \in B^r$ 或 $y \in B^r$, 则

$$g_B^\lambda(x,y) = 0. \tag{11}$$

实际上，如 $x \in B^r$, 则 $P_x(h_B = 0, x(h_B) = x) = 1$, 故由 (2) 得 $q_B(t,x,y) = 0$, 从而 $q_B^\lambda(x,y) = 0$, $(x \in B^r)$. 由对称性 (9) 即得 $g_B^\lambda(x,y) = 0\ (y \in B^r)$.

今取首次通过公式的拉氏变换形式，以便于应用. 以 $e^{-\lambda t}$ 乘 (2) 两边，对 t 积分，得

$$g^\lambda(y-x) = \int_{\overline{B}} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\int_0^t P_x(h_B \in ds, x(h_B) \in dz) \right.$$
$$\left. \cdot p(t-s, y-z) \right] dt + g_B^\lambda(x,y).$$

利用拉氏变换的卷积公式，得

$$g^\lambda(y-x) = \int_{\overline{B}} H_B^\lambda(x,dz) g^\lambda(y-z) + g_B^\lambda(x,y). \tag{12}$$

由首尾二项关于 x, y 的对称性，得

$$\int_{\overline{B}} H_B^\lambda(x,dz) g^\lambda(y-z) = \int_{\overline{B}} H_B^\lambda(y,dz) g^\lambda(x-z). \tag{13}$$

在 (12) 中令 $\lambda \to 0$, 利用 (6) 及单调收敛定理，得 **势的基本公式**:

$$g(y-x) = \int_{\overline{B}} H_B(x,dz) g(y-z) + g_B(x,y), \ (B \in \mathcal{B}^n, n \geqslant 3). \tag{14}$$

此式有概率意义：自 x 出发，在 y 点附近的平均停留时间，等于首中 B 以前在 y 附近的平均停留时间，加上首中 B 以后在 y 附近的平均停留时间. 后者由 (14) 中积分项给出.

(二) 常返集

定理 1 设 $f(x), x \in R^n$ 为有界可测函数，满足 $f = T_t f$(对某 $t > 0$), 则 f 恒等于一常数.

证 先证一事实：关于任一紧集中的 x, y, 均匀地有

$$\lim_{t \to \infty} (T_t f(x) - T_t f(y)) = 0.$$

实际上，

$$\begin{aligned}|T_tf(x)-T_tf(y)| &= \left|\int (p(t,x,z)-p(t,y,z))f(z)\,dz\right| \\ &\leqslant \|f\|\int |p(t,x,z)-p(t,y,z)|\,dz \\ &= \|f\|\int |p(1,z)-p(1,z+(x-y)/\sqrt{t})|\,dz.\end{aligned}$$

由于 $p(1,z)$ 连续、可积，故当 $t\to\infty$ 时，右方关于紧集中的 x,y 均匀地趋于 0.

由 $T_tf=f$, 利用 $\{T_t\}$ 的半群性得 $T_{mt}f=f$ 对一切正整数 m 成立. 于是由上述事实，对任意 x,y,

$$f(x)-f(y)=\lim_{m\to\infty}(T_{mt}f(x)-T_{mt}f(y))=0.\ \Box$$

定理 2 设 $B\in\mathcal{B}^n$, $(n\geqslant 1)$, 只有两种可能：

(i) 或者 $P_x(h_B<\infty)\equiv 1$;

(ii) 或者对一切 x, 当 $t\to\infty$ 时,

$$P_x(\theta_t(h_B<\infty))\equiv P_x(x_s\in B\ 对某s>t)\to 0.$$

证 令 $\varphi(x)=P_x(h_B<\infty)$, $T_t\varphi$ 对 t 不增 (参看 (18)), 故

$$\varphi(x)\geqslant T_t\varphi(x)\downarrow r(x),\quad (t\to\infty). \tag{15}$$

在 $T_tT_s\varphi(x)=T_{t+s}\varphi(x)$ 中，令 $s\to\infty$, 由控制收敛定理及定理 1

$$T_tr(x)=r(x)=c\geqslant 0,\ (c\ 为常数). \tag{16}$$

在

$$P_x(t<h_B<\infty)=\int q_B(t,x,y)\varphi(y)\,dy\geqslant cP_x(h_B>t)$$

中，令 $t\to\infty$, 得

$$0=cP_x(h_B=\infty). \tag{17}$$

于是或者 $P_x(h_B=\infty)\equiv 0$, 此即 (i); 或者 $c=0$, 此时在

$$\begin{aligned}T_t\varphi(x) &= E_x\varphi(x_t)=E_xP_{x(t)}(h_B<\infty) \\ &= P_x(\theta_t(h_B<\infty))=P_x(x_s\in B,\ 对某s>t)\end{aligned} \tag{18}$$

中，令 $t\to\infty$, 并利用 (15) (16) 即得 (ii). $\Box$

在情况 (i), 称 B 为常返集；在 (ii) 为暂留集 (勿与 §4 中过程的常返性等混淆). 由 §4(15), 当 $n\geqslant 3$, 一切球，从而一切有界可测集，是暂留集. 由 (18) 知 (i) 等价于 $P_x(\theta_t(h_B<\infty))\equiv 1$, $t\geqslant 0$. 又 $T_t\varphi\uparrow\varphi$, $t\downarrow 0$.

对一，二维布朗运动，定理 2 可加强 (比较 §4(三)c).

系 1 对 $B\in\mathcal{B}^n(n=1,2)$, 只有两种可能：

(i) 或者 $P_x(h_B<\infty)\equiv 1$;

(ii) 或者 $P_x(h_B < \infty) \equiv 0$.

证 由 §2 定理 1,$\int_0^\infty p(s,x,y)\,ds = \infty$. 故对任意可测、非负、不几乎处处 (关于 L) 为 0 的 $f(x)$, 有

$$\int_0^t T_s f(x)\,ds = \int \left(\int_0^t p(s,x,y)\,ds \right) f(y)\,dy \to \infty, \quad (t \to \infty). \tag{19}$$

令 $\varphi(x) = P_x(h_B < \infty)$, 由 $T_s\varphi \leqslant \varphi \leqslant 1$, 对 $h > 0$ 有

$$0 \leqslant \int_0^t T_s(\varphi - T_h\varphi)ds = \int_0^t T_s\varphi\,ds - \int_h^{t+h} T_s\varphi\,ds \leqslant 2h.$$

对照 (19), 可见 $\varphi = T_h\varphi(L\text{-a.e.}x)$; 于是 $T_t\varphi = T_t(T_h\varphi)$. 再令 $t \downarrow 0$, 即得 $\varphi = T_h\varphi$ 对一切 x 成立. 从而得知 $\varphi(x)$ 等于 (15) 中的 $r(x)$; 由 (16), $\varphi \equiv c(\geqslant 0)$ 为常数, 并且 (17) 成立. 当 $c = 0$ 时即是情况 (ii). □

系 1 也可改述为：当 $n = 1$ 或 2 时，除极集外，一切非空可测集都是常返集.

然而，当 $n = 1$ 时，在 §4(三) 中已证明非空极集不存在，故此时只有一种可能 (i), 即一切非空可测集皆常返.

至于判断一个集是否常返，也有锥判别法. 直观地想，如 $n \geqslant 3$, 集必须充分大才能常返.

定理 3 设 $B \in \mathcal{B}^n$, $n \geqslant 3$, 如存在锥 K 及 $r > 0$, 使 $(x : x \in K, |x| \geqslant r) \subset B$, 则 B 常返.

证 由平移不变性，不妨设 K 的顶点在 O, 于是 $K = (x : |x \cdot u| \geqslant \alpha|x|)$, u 为某单位向量，$\alpha > 0$. 显然，对任意常数 $c > 0, \sqrt{c}K = K$. 由尺度不变性

$$P_0(x(t) \in K) = P_0\Big(\frac{x(ct)}{\sqrt{c}} \in K\Big) = P_0(x(ct) \in K),$$

故 $P_0(x(t) \in K) = d > 0$,d 为常数. 由 $\lim\limits_{t\to\infty} P_0(|x(t)| \geqslant r) = 1$, 得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} P_0(\theta_t(h_B < \infty)) &\geqslant \varliminf_{t\to\infty} P_0(x(t) \in B) \\ &\geqslant \lim_{t\to\infty} P_0(x(t) \in K, |x(t)| \geqslant r) = d > 0.\end{aligned}$$

由定理 2 知 B 常返. □

注 1 设 $B \in \mathcal{B}^n$, $n \geqslant 3, \lambda > 1$, 令 $B_m = (x : x \in B, \lambda^m \leqslant |x| < \lambda^{m+1})$, 则 B 为常返的充要条件是

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m(2-n)} C(B_m) = \infty,$$

$C(B_m)$ 表 B_m 的容度. 证见 [17].

(三) **收敛引理** 下二引理很有用，特别，引理 2 可用来研究无界开集.

引理 1 设 B 及 B_m 皆为闭集，又 $\mathring{B}_m$ 表 B_m 的内点集,

$$B_1 \supset \mathring{B}_1 \supset B_2 \supset \mathring{B}_2 \supset \cdots \supset B = \bigcap_m B_m = \bigcap_m \mathring{B}_m,$$

则对 $x \in B^c \cup B^r$, 有

$$P_x(h_{B_m} \uparrow h_B) = 1, \quad (m \to \infty).$$

证 显然 h_{B_m} 不降, $0 \leqslant h_{B_m} \uparrow h \leqslant h_B$. 如 $h = \infty$, 则引理成立. 如 $x \in B^r$, 则 $P_x(h_B = 0) = 1$, 引理也成立. 故只要考虑 $h < \infty, x \in B^c$ 的情形. 由于 B 及 B_m 闭, 轨道连续,

$$B_m \ni x(h_{B_m}) \to x(h) \in \bigcap_m B_m = B.$$

故如 $h > 0$, 则必 [1] $h \geqslant h_B$. 但当 $x \in B^c$ 时, $P_x(h > 0) = 1$, 故 $P_x(h = h_B) = 1$. □

注 2 如 $x \overline{\in} B^c \cup B^r$, 即如 $x \in B \cap (B^r)^c$, 则 $P_x(h_{B_m} = 0) = 1, P_x(h_B > 0) = 1$, 故 $P_x(h_{B_m} \uparrow h_B) = 0$, 而引理 1 结论不成立.

引理 2 设 G 为非空开集, 则存在一列上升开集 G_m, 其紧闭包含于 G, 使

1. $G_1 \subset \overline{G}_1 \subset G_2 \subset \overline{G}_2 \subset \cdots$, $\bigcup_m G_m = G$;
2. ∂G_m 的每一点对 G_m^c 规则;
3. $P_x(h_{\partial G_m} \uparrow h_{\partial G}) = 1$, $x \in G$.

证 取一列紧集 K_m, 使 $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$, $\bigcup_m K_m = G$. 用有限多个开球遮盖 K_1, 并使这些开球之和 D 满足 $\overline{D} \subset G$. 有必要时改变某些球的半径. 用锥判别法 (§5 定理 2) 知, ∂D 的每一点对 D^c 规则. 取 $G_1 = D$, 于是 $\overline{G}_1 \subset G$ 而且 ∂G_1 的点对 G_1^c 规则. 同样手续施之于 $\overline{G}_1 \cup K_2$ 可得 $G_2, \cdots$. $\{G_m\}$ 满足 1 与 2, 故

$$G_1^c \supset (G_1^c)^0 \supset G_2^c \supset \cdots, \quad \bigcap_m G_m^c = G^c.$$

由引理 1, $P_x(h_{G_m^c} \uparrow h_{G^c}) = 1 (x \in G)$. 但 $P_x(h_{\partial G} = h_{G^c}) = 1 (x \in G)$; $P_x(h_{\partial G_m} = h_{G_m^c}) = 1 (x \in G_m)$ 故由上式得 $P_x(h_{\partial G_m} \uparrow h_{\partial G}) = 1 (x \in G)$. □

§11.7 测度的势与 Balayage 问题

(一) 唯一性 $n \geqslant 3$ 维布朗运动的势核 $g(x, y) = g(y - x)$ 取为

$$g(y - x) = c_n |x - y|^{2-n}, \quad c_n = \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) \Big/ 2\pi^{n/2}. \tag{1}$$

对 B^n 可测函数 f, 如下列积分存在, 定义 f 的牛顿势为 Gf:

$$Gf(x) = \int g(y - x) f(y)\, dy. \tag{2}$$

对 B^n 上的测度 μ, 定义 μ 的牛顿势为 $G\mu$,

$$G\mu(x) = \int g(y - x) \mu(dy), \tag{3}$$

---

[1] 但如 $h = 0$, 由 $x(h) \in B$ 未必有 $h \geqslant h_B = \inf(t > 0, x_t \in B)$, 注意此中 $t > 0$, 而非 $t \geqslant 0$. 例如, 设 $x_0 = x$ 对 B 非规则, $x \in B$, 则 $P_x(h = 0) = 1$, 但 $P_x(h_B > 0) = 1$.

其中 $\int = \int_{R^n}$, 如 $f \geqslant 0$, 可视 (2) 为 (3) 的特殊情形，故主要考虑 (3), 它把测度 μ 变为函数 $G\mu(x)$.

由 §1 引理 3, 如 $\mu(R^n) < \infty$, 则 $G\mu(x) < \infty$, (L-a.e.).

引理 1 如 $G\mu(x) < \infty$, 则

$$G\mu(x) - T_t G\mu(x) = \int_0^t T_s\mu(x)\, ds. \tag{4}$$

证

$$\begin{aligned}
T_t G\mu(x) &= \iint g(y-z)\mu(dy)p(t,z-x)\, dz \\
&= \iiint_0^\infty p(s,y-z)ds\, \mu(dy)p(t,z-x)dz \\
&= \iint_0^\infty p(s+t,y-x)ds\, \mu(dy) = \iint_t^\infty p(s,y-x)ds\, \mu(dy);
\end{aligned}$$

$$\int_0^t T_s\mu(x)\, ds = \int_0^t \int p(s,y-x)\mu(dy)ds.$$

所以

$$\begin{aligned}
T_t G\mu(x) + \int_0^t T_s\mu(x)\, ds &= \iint_0^\infty p(s,y-x)ds\, \mu(dy) \\
&= \int g(y-x)\mu(dy) = G\mu(x). \ \square
\end{aligned}$$

定理 1 设 μ 为有限测度，则 $G\mu$ 唯一决定 μ.

证 1° 设有二测度 μ 与 ν 使

$$G\mu = G\nu < \infty, \quad (L-\text{a.e.}).$$

如在点 x 上此式成立，则由引理 1

$$\int_0^t T_s\mu(x)\, ds = \int_0^t T_s\nu(x)\, ds. \tag{5}$$

2° 取任意非负、连续于 R^n 且有紧支集的函数 f, 利用 $p(s,x,y)$ 对 x,y 的对称性，有

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{1}{t}\int_0^t T_s f\, ds\right) d\mu &= \int \left(\frac{1}{t}\int_0^t \int p(s,x,y)f(y)dyds\right)\mu(dx) \\
&= \int \frac{1}{t}\int_0^t T_s\mu(y)ds f(y)\, dy = \int \frac{1}{t}\int_0^t T_s\nu(y)ds f(y)\, dy = \int \left(\frac{1}{t}\int_0^t T_s f ds\right) d\nu.
\end{aligned}$$

由 §2 引理 3, 对 $x \in R^n$ 均匀地有 $T_s f \to f (s \to 0)$, 利用 $\varepsilon - \delta$ 方法及测度有限，易见 $\int f\, d\mu = \int f\, d\nu$. 由 f 的任意性， $\mu = \nu$ #

(二) 极大值原理

定理 2 设 μ 为有限测度，其支集为 B, 又 $N\subset B$, $\mu(N)=0$. 如 $G\mu(x)\leqslant M<\infty$, 一切 $x\in N^c\cap B$, 则

$$\sup_{x\in R^n} G\mu(x)\leqslant M. \tag{6}$$

证 1° 由 §6(14)

$$g(y-x)=\int_{\overline{B}} H_B(x,dz)g(y-z)+g_B(x,y). \tag{7}$$

对任意 $\varepsilon>0$, 令 $A=(x:G\mu(x)<M+\varepsilon)$. 以 A 代入 (7) 中的 B, 双方对 $\mu(dy)$ 积分，因 μ 有支集 B, 得

$$\begin{aligned} G\mu(x)&=\int_{\overline{A}} H_A(x,dz)G\mu(z)+\int_B g_A(x,y)\mu(dy)\\ &=\int_{\overline{A}} H_A(x,dz)G\mu(z)+\int_{B\cap N^c} g_A(x,y)\mu(dy). \end{aligned} \tag{8}$$

2° 下证 $g_A(x,y)=0$, 一切 $y\in B\cap N^c$, 从而最后一积分为 0. 由于 $B\cap N^c\subset A$, 由 §6,7), 只要证 A 中点皆对 A 规则，从而 $g_A(x,y)=0$, $(y\in A)$. 用反证法，设 $a\in A$, $a\overline{\in}A^r$, 则

$$\lim_{t\to 0} P_a(x_t\in A)\leqslant \lim_{t\to 0} P_a(h_A\leqslant t)=P_a(h_A=0)=0. \tag{9}$$

由引理 1

$$G\mu(a)\geqslant T_tG\mu(a)\geqslant \int_{A^c} p(t,y-a)G\mu(y)\,dy\geqslant (M+\varepsilon)P_a(x_t\overline{\in}A).$$

令 $t\to 0$, 由 (9) 得 $G\mu(a)\geqslant M+\varepsilon$. 此与 $a\in A$ 矛盾.

3° 于是由 (8) 及 2°

$$G\mu(x)=\int_{\overline{A}} H_A(x,dz)G\mu(z),\ (x\in R^n). \tag{10}$$

如能证在 $\overline{A}$ 上， $G\mu(z)\leqslant M+\varepsilon$, 则由上式立得 (6). 下面会证明 $G\mu(x)$ 下连续，故 $(x:G\mu(x)\leqslant M+\varepsilon)$ 闭. 既然它包含 A, 故也包含 $\overline{A}$.

4° 今证 $G\mu(x)$ 下连续，由 Fatou 引理

$$\begin{aligned} \varliminf_{x\to a} G\mu(x)&=\varliminf_{x\to a}\int\int_0^\infty p(t,x,y)dt\,\mu(dy)\geqslant \int\int_0^\infty \varliminf_{x\to a} p(t,x,y)dt\,\mu(dy)\\ &=\int\int_0^\infty p(t,a,y)dt\,\mu(dy)=G\mu(a).\ \square \end{aligned}$$

注 1 极大值原理可以如下直观解释. 由于 μ 之支集为 B, 故

$$G\mu(x)=\int_B g(y-x)\mu(dy),\ \ (x\in R^n). \tag{11}$$

$G\mu(x)$ 可视为自 x 出发，在 B 中的关于 μ 加权平均的停留时间. 今如自 $x\in B^c$ 出发，此时间自应从进入 B 时开始算起. 设由点 $b\in B$ 进入 B, 则

$$G\mu(x)\approx G\mu(b).$$

回忆 $g^\lambda(x)$ 的定义 (§6,(3)), 令

$$G^\lambda\mu(x) = \int g^\lambda(y-x)\mu(dy). \tag{12}$$

定理 2′ 设 μ 为有限测度，其支集为 B. 则

$$G^\lambda\mu(x) \leqslant \sup_{y\in B} G^\lambda\mu(y), \quad (x \in R^n). \tag{13}$$

证明与定理 2 之证明类似，只要以 $e^{-\lambda t}T_t$ 代替那里的 T_t.

(三) Balayage 问题 (简称 B- 问题) 以 $\mathcal{M}$ 表所有使势 $G\mu(x)$ 为局部可积的有限测度 μ 之集. 所谓 B- 问题是：设已给集 $B \in \mathcal{B}^n$ 及 $\mu \in \mathcal{M}$. 试求 $\mu' \in \mathcal{M}$, 其支集含于 B^r, 并且使

$$G\mu'(x) = G\mu(x), \quad (x \in B^r) \tag{14}$$

$$G\mu'(x) \leqslant G\mu(x), \quad (x \in R^n, n \geqslant 3). \tag{15}$$

下面试解决此问题. 以 $H_B(x,A) = P_x(x(h_B) \in A)$ 表 B 的首中点分布，定义测度 μ'

$$\mu'(A) = \mu H_B(A) = \int H_B(x,A)\mu(dx). \tag{16}$$

定理 3 设 B 为紧集，则 μ' 是 B- 问题的唯一解.

证 $H_B(x,\cdot)$ 集中在 $\overline{B} = B$ 上，但 $B \cap (B^r)^c$ 为极集 (见 §11 定理 3), 故 $H_B(x,\cdot)$, 因而 μ' 集中在 B^r 上. 在 §6(13) 中令 $\lambda \downarrow 0$, 得

$$\int_{B^r} H_B(x,dz)g(y-z) = \int_{B^r} H_B(y,dz)g(x-z). \tag{17}$$

又

$$\begin{aligned} G\mu'(x) &= G\mu H_B(x) = \int_{B^r} g(x-z)\mu H_B(dz) = \int_{B^r} g(x-z)\int H_B(y,dz)\,\mu(dy) \\ &= \int \left[\int_{B^r} g(x-z)H_B(y,dz)\right]\mu(dy) \overset{(17)}{=} \int \left[\int_{B^r} g(y-z)H_B(x,dz)\right]\mu(dy) \\ &= \int_{B^r} H_B(x,dz)G\mu(z) = H_BG\mu(x) \leq G\mu(x). \end{aligned} \tag{18}$$

最后不等式是由于 §6(14). 由 (18) 知 $\mu' \in \mathcal{M}$ 而且满足 (15). 如 $x \in B^r$, 则 $H_B(x,\cdot)$ 集中在点 $\{x\}$ 上，故由 (18) 的中间推演，有

$$G\mu H_B(x) = \int_{B^r} H_B(x,dz)G\mu(z) = G\mu(x),$$

此得证 (14). 最后证解的唯一性. 设 ν 也是解，则 ν 之支集含于 B^r. 由 §6(14), 并注意 $g_B(x,y) = 0$, $y \in B^r$(参看 §6,7)), 得

$$\begin{aligned} G\nu(x) &= \int_{B^r}\int_{B^r} H_B(x,dz)g(y-z)\nu(dy) \\ &= \int_{B^r} H_B(x,dz)G\nu(z) \overset{(14)}{=} \int_{B^r} H_B(x,dz)G\mu(z) \\ &= H_BG\mu(x) \overset{(18)}{=} G\mu H_B(x), \ (x \in R^n). \end{aligned}$$

由唯一性，即得 $\nu = \mu H_B$. □

近年来提出了反 B- 问题：设 B 为紧集，已给 ∂B 上之概率测度 ν, 试求概率测度 μ, 使

$$\mu H_{B^c} = \nu, \tag{19}$$

其中 $\mu H_{B^c}(\cdot) = P_\mu(x(e_B) \in \cdot)$, $e_B \equiv h_{B^c}$ 为首出 B(或首中 B^c) 的时间. 满足 (19) 的一切概率测度记为 $M(\nu)$. 在 [14] 中证明了：$\mu \in M(\nu)$ 等价于下列三条件中的任何一个：

1° $G\mu \geqslant G\nu$; 而且 $G\mu(x) = G\nu(x)$, $x \in B^c$.

2° $\int h d\mu = \int h d\nu$ 对一切调和于 $\mathring{B}$ 连续于 B 的函数 h 成立.

3° $\int f d\mu \geqslant \int f d\nu$ 对一切上调和于 $\mathring{B}$(定义见 §13) 连续于 B 的函数 f 成立.

§11.8 平衡测度

(一) 定义 设 F_m 与 F 为 $\mathcal{B}^n$ 上的测度，如果

$$\sup_{A \in \mathcal{B}^n} |F_m(A) - F(A)| \to 0, \quad (m \to \infty),$$

则说 F_m 强收敛到 F. 因而强收敛关于 A 是均匀的.

设 $n \geqslant 3$, B 为相对紧集. 取 $r > 0$ 充分大，使 $B \subset \mathring{B}_r$. 又 S_r 为球面 $(x : |x| = r)$. 对球外的点 x, $|x| > r$, 由强马氏性有

$$H_B(x, A) = \int_{S_r} H_{S_r}(x, d\xi) H_B(\xi, A), \tag{1}$$

其中 $H_D(x, \cdot)$ 为自 x 出发，集 D 的首中点分布. 由 (1)

$$\frac{H_B(x, A)}{g(x)} = \int_{S_r} \frac{H_{S_r}(x, d\xi)}{g(x)} H_B(\xi, A). \tag{2}$$

引理 1 在强收敛下，有

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{H_{S_r}(x, d\xi)}{g(x)} = \frac{r^{n-2}}{c_n} U_r(d\xi), \tag{3}$$

其中 U_r 为 S_r 上均匀分布，常数 c_n 由 §2(9) 定义.

证 由 §5(18)

$$\begin{aligned}
&\lim_{|x| \to \infty} \sup_A \left| \int_A \frac{H_{S_r}(x, d\xi)}{g(x)} - \int_A \frac{r^{n-2}}{c_n} U_r(d\xi) \right| \\
&\leqslant \lim_{|x| \to \infty} \sup_A \int_A \frac{r^{n-2}}{c_n} \left| \frac{||x|^2 - r^2| \, |x|^{n-2}}{|\xi - x|^n} - 1 \right| U_r(d\xi) \\
&\leqslant \lim_{|x| \to \infty} \int_{S_r} \frac{r^{n-2}}{c_n} \left| \frac{||x|^2 - r^2| \, |x|^{n-2}}{|\xi - x|^n} - 1 \right| U_r(d\xi) = 0.
\end{aligned}$$

这里可在积分号下取极限，因为当 $|x| \to \infty$ 时被积函数有界. □

由 (1) 及引理 1, 对任意 $A \in \mathcal{B}^n$, 有

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{H_B(x,A)}{g(x)} = \int_{S_r} \frac{r^{n-2}}{c_n} U_r(d\xi) H_B(\xi, A). \tag{4}$$

这样便证明了

定理 1 设 B 为相对紧集，则测度

$$\mu_B(dy) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{H_B(x,dy)}{g(x)} \tag{5}$$

在强收敛下存在，而且对任一球面 S_r, $\mathring{B}_r \supset \overline{B}$, 有

$$\mu_B(dy) = \int_{S_r} \frac{r^{n-2}}{c_n} U_r(d\xi) H_B(\xi, dy) \tag{6}$$

称 μ_B 为 B 的平衡测度. 由 (6) 及轨道的连续性，知 μ_B 集中在 B 的外边界上. 此外，μ_B 在任何极集 N 上无质量，此因

$$H_B(x,N) \leqslant P_x(h_N < \infty) \equiv 0,$$

故 $\mu_B(N) = 0$.

称 μ_B 的全质量 $\mu_B(\overline{B})$ 为 B 的容度，记为 $C(B)$.

平衡测度有下列概率意义. 由 (5) 得

$$\mu_B(A) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{P_x(x(h_B) \in A, h_B < \infty)}{g(x)},$$

$$C(B) = \mu_B(\overline{B}) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{P_x(h_B < \infty)}{g(x)}.$$

故对 $A \in \mathcal{B}^n$ 有

$$\lim_{|x|\to\infty} P_x(x(h_B) \in A | h_B < \infty) = \frac{\mu_B(A)}{C(B)}. \tag{7}$$

因此，规范化后的平衡测度，可理解为自无穷远出发，B 的首中点的条件分布.

平衡测度 μ_B 的势 $G\mu_B$ 称为平衡势.

(二) 平衡势的概率意义

定理 2 设 B 为相对紧集，则

$$G\mu_B(x) = P_x(h_B < \infty), \quad x \in R^n. \tag{8}$$

注 1 如 $x \in B^r$, 则上式右方、因而左方等于 1, 可见 $G\mu_B$ 相当于物理中的平衡势 (参看 §1,(二)). 这也许就是为何称 μ_B 为 B 的平衡测度的原因.

定理 2 之证 1° 由 §6(14)

$$\frac{g(y-x)}{g(y)} = \int_{\overline{B}} \frac{H_B(x,dz)g(y-z)}{g(y)} + \frac{g_B(x,y)}{g(y)}. \tag{9}$$

当 $|y| \to \infty$ 时， $g(y-x)/g(y)$ 在紧集上均匀趋于 1, 故

$$1 = P_x(h_B < \infty) + \lim_{|y|\to\infty} \frac{g_B(x,y)}{g(y)},$$

即在紧集上均匀地有

$$\lim_{|y|\to\infty} \frac{g_B(x,y)}{g(y)} = P_x(h_B = \infty). \tag{10}$$

利用对称性

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{g_B(x,y)}{g(x)} = P_y(h_B = \infty). \tag{11}$$

设 f 为任意非负有界可测函数，有紧支集 C, 则由 §1 引理 2

$$Gf(z) \equiv \int_C g(y-z)f(y)\,dy$$

是有界函数. 由 (11)

$$\lim_{|x|\to\infty} \int \frac{g_B(x,y)}{g(x)} f(y)dy = \int P_y(h_B = \infty) f(y)dy. \tag{12}$$

2° 由 (5)

$$\begin{aligned}\int_{\overline{B}} \mu_B(dz)Gf(z) &= \lim_{|x|\to\infty} \int_{\overline{B}} \frac{H_B(x,dz)Gf(z)}{g(x)} = \lim_{|x|\to\infty} \int\int_{\overline{B}} \frac{H_B(x,dz)g(y-z)f(y)\,dy}{g(x)} \\ &\overset{(9)}{=} k \lim_{|x|\to\infty} \left\{ \int \left[\frac{g(y-x)}{g(x)} - \frac{g_B(x,y)}{g(x)} \right] f(y)dy \right\} \overset{(12)}{=} \int [1 - P_y(h_B = \infty)] f(y)dy \\ &= \int P_y(h_B < \infty) f(y)dy. \end{aligned} \tag{13}$$

但另方面,

$$\int_{\overline{B}} \mu_B(dz)Gf(z) = \int \left[\int_{\overline{B}} g(y-z)\mu_B(dz) \right] f(y)dy = \int G\mu_B(y) f(y)dy.$$

综合此二方面

$$\int G\mu_B(y)f(y)dy = \int P_y(h_B < \infty) f(y)\,dy.$$

由 f 的任意性

$$G\mu_B(y) = P_y(h_B < \infty).(L - \text{a.e.}) \tag{14}$$

3° 下证 (14) 对一切 $y \in R^n$ 成立. 将 (14) 双方乘以 $p(t,x,y)$ 后对 $y \in R^n$ 积分，得

$$T_t G\mu_B(x) = T_t P_x(h_B < \infty).$$

由 §7 引理 1, 左方等于

$$G\mu_B(x) - \int_0^t T_s\mu_B(x)ds \uparrow G\mu_B(x), \quad (t \downarrow 0, \text{一切} x).$$

右方为

$$
\begin{aligned}
T_tP_x(h_B<\infty) &= T_tP_x(\text{ 对某}s>0, x_s\in B)\\
&= P_x(\text{ 对某 } s>t, x_s\in B)\uparrow P_x(h_B<\infty),\ (t\downarrow 0,\ \text{一切}x).
\end{aligned}
$$

因此

$$
G\mu_B(x)=P_x(h_B<\infty),\quad (x\in R^n).\ \Box
$$

系 1 相对紧集 B 为极集的充要条件是 $C(B)=0$.

证 如容度 $C(B)=\mu_B(\overline{B})=0$, 由 (8) 知 $P_x(h_B<\infty)\equiv 0$, 故 B 为极集. 反之，若 B 为极集，由 (8), $G\mu_B(x)\equiv 0$; 据 §7 唯一性定理， $C(B)=0$. □

例 1 考虑球面 S_r, 由 (5) (3),S_r 的平衡测度为

$$
\mu_{S_r}(dy)=\frac{r^{n-2}}{c_n}U_r(dy)=2\pi^{n/2}r^{n-2}U_r(dy)/\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right),
$$

$$
C(S_r)=2\pi^{n/2}r^{n-2}/\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)=\frac{n-2}{2r}|S_r|,\quad (n\geqslant 3).
$$

故 $C(S_r)$ 比面积 $|S_r|$ 低一维. 又由 (8) 及 §4(15),

$$
G\mu_{S_r}(x)=P_x(h_{S_r}<\infty)=\begin{cases}1, & \text{如}|x|\leqslant r;\\ (r/|x|)^{n-2}, & \text{如}|x|>r.\end{cases}
$$

$$
\lim_{|x|\to\infty}P_x(x(h_{S_r})\in A|h_{S_r}<\infty)=U_r(A),\ (\text{参看 (7)}).
$$

例 2 考虑球 B_r 及球层 $B_{a,r}=(x:a\leqslant|x|\leqslant r)$. 由于它们的外边界为 S_r, 或者由于

$$
P_x(h_{B_r}<\infty)=P_x(h_{B_{a,r}}<\infty)=P_x(h_{S_r}<\infty),
$$

由 (5) 知 $B_r, B_{a,r}$ 与 S_r 有相同的平衡测度、容度及平衡势.

(三) 平衡测度的另一刻画 对 $B\in\mathcal{B}^n$, 以 $\mathcal{M}(B)$ 表如下测度之集:

$$
\mathcal{M}(B)=(\mu:\text{有穷、非 0 、有紧支集含于}B, G\mu\leqslant 1). \tag{15}
$$

定理 3 设 B 为紧集，则

$$
P_x(h_B<\infty)=\sup_{\mu\in\mathcal{M}(B)}G\mu(x). \tag{16}
$$

证 1° 取一列紧集 $\{B_m\}$, 使

$$
B\subset\mathring{B}_m;\ B_1\supset\mathring{B}_1\supset B_2\supset\mathring{B}_2\supset\cdots;\ \bigcap_m B_m=\bigcap_m\mathring{B}_m=B.
$$

由 §6 引理 1, 对 $x\in B^c\cup B^r$, 有 $P_x(h_{B_m}\uparrow h_B)=1$. 试证

$$
P_x(h_{B_m}<\infty)\downarrow P_x(h_B<\infty)\ \ (L-\text{a.e.}). \tag{17}
$$

实际上，取 f 为有紧支集的连续函数，对 $x \in B^c \cup B^r$，有

$$\lim_{m\to\infty} H_{B_m} f(x) = \lim_{m\to\infty} \int_{\overline{B}_m} H_{B_m}(x,dy)f(y) = \lim_{m\to\infty} E_x f(x(h_{B_m}))$$
$$= \lim_{m\to\infty} E_x[f(x(h_{B_m})), h_{B_m} < \infty, h_B < \infty] + \lim_{m\to\infty} E_x[f(x(h_{B_m})), h_{B_m} < \infty, h_B = \infty].$$

由于轨道及 f 的连续性，右方第一极限等于

$$\lim_{m\to\infty} E_x[f(x(h_{B_m})), h_B < \infty] = E_x[f(x(h_B)), h_B < \infty] = H_B f(x).$$

因为 $f(\infty) \equiv \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, 故第二极限等于

$$E_x[f(x(h_B)), h_B = \infty] = 0.$$

故得

$$\lim_{m\to\infty} H_{B_m} f(x) = H_B f(x). \tag{18}$$

特别，取 f 连续，有紧支集，在 B_1 上等于 1, 即得 (17) 对一切 $x \in B^c \cup B^r$ 成立. 再由 §3 定理 4, (17) 对 L-a.e. x 成立.

2° 取 $\mu \in \mathcal{M}(B)$. 由 §6(14)

$$G\mu(x) = \int_{B_m} H_{B_m}(x,dz)G\mu(z) + \int g_{B_m}(x,y)\mu(dy). \tag{19}$$

后一积分

$$\int g_{B_m}(x,y)\mu(dy) = \left(\int_B + \int_{B^c}\right) g_{B_m}(x,y)\mu(dy). \tag{20}$$

因 $B \subset\subset \overset{\circ}{B}_m$, B 中的点对 B_m 规则，故 $g_{B_m}(x,y) = 0$, $(y \in B)$. 又因 μ 之支集为 B, 故 (20) 右方二积分皆为 0. 由 (19)

$$G\mu(x) = \int_{B_m} H_{B_m}(x,dz)G\mu(z) \leqslant \int_{B_m} H_{B_m}(x,dz)$$
$$= H_{B_m}(x,B_m) = P_x(h_{B_m} < \infty).$$

由此及 (17)

$$G\mu(x) \leqslant P_x(h_B < \infty), \ (L-\text{a.e. } x), \tag{21}$$
$$T_t G\mu(x) \leqslant T_t P_x(h_B < \infty).$$

令 $t \downarrow 0$, 即知 (21) 对一切 $x \in R^n$ 成立. 由此及定理 2 即得证 (16). □

注 2 在势论中已知 (见文献 [25]): 如 B 是紧集，则存在唯一测度 γ_B, 其支集为 B, 而且

$$G\gamma_B = \sup_{\mu\in\mathcal{M}(B)} G\mu \tag{22}$$

通常称 γ_B 为容量测度. 由定理 2, 3, 立得

$$G\mu_B = G\gamma_B. \tag{23}$$

再由 §7 唯一性定理，有 $\mu_B = \gamma_B$. 因此，对紧集 B, 平衡测度即是容量测度.

系 2 设 B 紧，则对任意 $\mu \in \mathcal{M}(B)$, 有

$$\mu(R^n) \leqslant C(B). \tag{24}$$

证 由 (16)(8)

$$\int_{\overline{B}} \frac{g(y-x)}{g(x)}\mu(dy) \leqslant \int_{\overline{B}} \frac{g(y-x)}{g(x)}\mu_B(dy).$$

由于在紧集上，均匀地有 $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{g(y-x)}{g(x)} = 1$, 故在上式中令 $|x| \to \infty$, 即得

$$\mu(R^n) = \mu(\overline{B}) \leqslant \mu_B(\overline{B}) = C(B). \ \Box$$

系 3 对开集 B,(16) 式也成立.

证 取一列紧集 $\{K_m\}$, 使

$$K_m \subset B,\ K_1 \subset K_2 \subset \cdots,\ \bigcup_m K_m = B.$$

由于 $x_t \in B$ 等价于对一切充分大的 m, $x_t \in K_m$, 故

$$P_x(h_{K_m} \downarrow h_B) = 1, \quad (x \in R^n), \tag{25}$$
$$\chi(h_{K_m} < \infty) \uparrow \chi(h_B < \infty), \quad (P_x - \text{a.e.}),$$

χ_A 表 A 的示性函数. 将此式双方对 $P_x(dw)$ 积分，由单调收敛定理得

$$P_x(h_{K_m} < \infty) \uparrow P_x(h_B < \infty). \tag{26}$$

由定理 2, $G\mu_{K_m}(x) \uparrow P_x(h_B < \infty)$. 既然 $\mu_{K_m} \in \mathcal{M}(B)$, 故

$$P_x(h_B < \infty) \leqslant \sup_{\mu\in\mathcal{M}(B)} G\mu(x). \tag{27}$$

另方面，如 $\mu \in \mathcal{M}(B)$, μ 有紧支集 K, 由 (16)(用于 $\mu(K)$) 及 (8) 得

$$G\mu(x) \leqslant G\mu_K(x) = P_x(h_K < \infty) \leqslant P_x(h_B < \infty). \tag{28}$$

由 (27)(28) 即得 (16) 对开集 B 成立. $\Box$

§11.9. 容　　度

(一) 性质 在 §8 中，已对相对紧集 B 定义了容度 $C(B) = \mu_B(\overline{B})$, 故 $C(B)$ 是全体相对紧集类上的集合函数. 由 §8 (5) (6)

$$C(B) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{P_x(h_B < \infty)}{g(x)} = \int_{S_r} DP_\xi(h_B < \infty)U_r(d\xi), \tag{1}$$

其中 $D>0$ 为某常数，S_r 为 $\mathring{B}_r \supset B$ 之球面，此式把 $C(B)$ 与 $P_x(h_B<\infty)$ 联系起来，故可通过 $P_x(h_B<\infty)$ 来研究 $C(B)$.

首先注意，如 $N\subset M$, 则 $h_N \geqslant h_M$, 又

$$h_{A\cap B} \geqslant h_A \vee h_B; \quad h_{A\cup B} = h_A \wedge h_B. \tag{2}$$

简记 $(h_A<\infty)$ 为 H_A.

(i) 如 $A\subset B$, 则 $C(A)\leqslant C(B)$. 此因 $P_x(H_A)\leqslant P_x(H_B)$.

(ii) $C(A\cup B)\leqslant C(A)+C(B)-C(A\cap B)$.

实际上，利用 (2) 及 $H_A\cup H_B = H_{A\cup B}$, 得

$$P_x(H_{A\cap B})\leqslant P_x(H_AH_B) = P_x(H_A)+P_x(H_B)-P_x(H_{A\cup B}).$$

(iii) 设点 $a\in R^n$, 令 $A+a=(x+a:x\in A)$, 则

$$C(A+a)=C(A).$$

此因 $P_x(H_A)=P_{x+a}(H_{A+a})$, 又 $g(x)=c_n|x|^{2-n}$, 故

$$C(A+a)=\lim_{|x+a|\to\infty}\frac{P_{x+a}(H_{A+a})}{g(x+a)}=\lim_{|x|\to\infty}\frac{P_x(H_A)}{g(x)}=C(A).$$

(iv) $C(-A)=C(A)$.

此因 $P_x(H_A)=P_{-x}(H_{-A})$, 由 $g(x)=g(-x)$

$$C(A)=\lim_{|x|\to\infty}\frac{P_x(H_A)}{g(x)}=\lim_{|-x|\to\infty}\frac{P_{-x}(H_{-A})}{g(-x)}=C(-A).$$

(v) 设 $a>0$ 为常数，则 $C(aA)=a^{n-2}C(A)$.

实际上，由尺度不变性，对 $a>0$ 有

$$P_x\left(\frac{x(a^2t)}{a}\in B\right)=P_{x/a}(x(t)\in B),$$

或

$$P_{ax}\left(\frac{x(a^2t)}{a}\in B\right)=P_x(x(t)\in B),$$

故

$$\begin{aligned}P_{ax}(H_{aB})&=P_{ax}\left(\text{存在 } s>0, \frac{x(s)}{a}\in B\right)=P_{ax}\left(\text{存在 } t>0, \frac{x(a^2t)}{a}\in B\right)\\&=P_x(\text{存在 } t>0, x(t)\in B)=P_x(H_B).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}C(aA)&=\lim_{|x|\to\infty}\frac{P_x(H_{aA})}{g(x)}=\lim_{|ax|\to\infty}\frac{P_{ax}(H_{aA})}{g(ax)}=\lim_{|x|\to\infty}\frac{a^{n-2}P_{ax}(H_{aA})}{g(x)}\\&=a^{n-2}\lim_{|x|\to\infty}\frac{P_x(H_A)}{g(x)}=a^{n-2}C(A).\end{aligned}$$

(vi) 如 B 为相对紧开集，则

$$C(B)=\sup\{C(K):K\subset B,K\text{ 紧}\}. \tag{3}$$

实际上，令 $K_m\subset B,K_m$ 紧， $K_1\subset K_2\subset\cdots,\bigcup\limits_m K_m=B$. 则由 §8(26)

$$P_x(H_{K_m})\uparrow P_x(H_B).$$

由此即可推知 $C(K_m)\uparrow C(B)$, 从而 (3) 成立. 为证此，令 D 为相对紧开集， $D\supset\overline{B}$. 显然 $P_x(H_D)=1, x\in K_m$. 由于 μ_{K_m} 的支集含于 K_m, 故

$$\begin{aligned}C(K_m)&=\int_{K_m}P_x(H_D)\mu_{K_m}(dx)=\int_{K_m}G\mu_D(x)\mu_{K_m}(dx)=\int_{K_m}\int_{\overline{D}}g(y-x)\mu_D(dy)\mu_{K_m}(dx)\\&=\int_{\overline{D}}G\mu_{K_m}(y)\mu_D(dy)=\int_{\overline{D}}P_y(H_{K_m})\mu_D(dy)\uparrow\int_{\overline{D}}P_y(H_B)\mu_D(dy)=C(B).\end{aligned}$$

(vii) 如 B 紧，则

$$C(B)=\inf\ (C(U):U\supset B,\ U\text{开},\ \overline{U}\text{紧}). \tag{4}$$

实际上，取 U_m 为相对紧开集，

$$U_1\supset\overline{U}_2\supset U_2\supset\cdots;\ \bigcap_m U_m=\bigcap_m\overline{U}_m=B.$$

取 r 充分大，使 $\overset{\circ}{B}_r\supset\overline{U}_1$, 则对 $\xi\in S_r$, 有

$$P_\xi(H_{U_m})\downarrow P_\xi(H_B),$$

(参看 §8 (17)). 由 (1) 得

$$C(U_m)=\int_{S_r}DP_\xi(H_{U_m})U_r(d\xi)\downarrow\int_{S_r}DP_\xi(H_B)U_r(d\xi)=C(B).$$

(二) 至此我们只对相对紧集定义了容度，现在希望把它的定义域扩大到一切 Borel 集上去. 为此，需利用 Choquet 容度理论.

设 E 为局部紧的可分距离空间， K 是 E 中一切紧子集的类. 定义在 K 上的实值集函数 φ 称为 Choquet 容度，如果

(a) 若 $A\in K,B\in K,A\subset B$, 则 $\varphi(A)\leqslant\varphi(B)$;

(b) 对一切 $A\in K,B\in K$, 有

$$\varphi(A\cup B)+\varphi(A\cap B)\leqslant\varphi(A)+\varphi(B);$$

(c) 设 $A\in K$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在开集 $U\supset A$, 使对任意 $B\in K,A\subset B\subset U$, 有

$$\varphi(B)-\varphi(A)<\varepsilon.$$

利用已给的 $\varphi(A), A\in K$, 可以对 E 的任意子集 A 定义内容度 $\varphi_*(A)$ 及外容度 $\varphi^*(A)$:

$$\varphi_*(A)=\sup\{\varphi(B):B\in K,B\subset A\}, \tag{5}$$

$$\varphi^*(A)=\inf\{\varphi_*(B):U\text{ 为开集},A\subset U\}. \tag{6}$$

如对某 $A \subset E$, 有

$$\varphi_*(A) = \varphi^*(A), \tag{7}$$

则称 A 为可容的，并以此公共值作为 A 的 Choquet 容度，记为 $\widetilde{C}(A)(=\varphi^*(A))$. 由 (c), 紧集 B 是可容的，而且 $\widetilde{C}(B) = C(B)$.

Choquet容度扩张定理 每一 Borel 集可容.

此定理之证可见文献 [1;24]. 所谓 Borel 集类是指含一切开集的最小 σ 代数. 其实不仅 Borel 集，更一般的解析集也是可容的. 利用此定理可证明对相当广泛的过程，解析集的首中时是马氏时间. 还可证明：如 A_n, A 可容，$A_n \uparrow A$, 则 $\widetilde{C}(A_n) \uparrow \widetilde{C}(A)$.

现在回到 §8(一) 中所定义的容度 $C(B)$, B 为相对紧集. 当限制在 K 上考虑 $C(B)$ 时，由 (i)(ii)(vi)(vii) 知它是一 Choquet 容度. 根据扩张定理，可把它的定义域扩大到一切 Borel 集上而得 $\widetilde{C}(B)$.

今证如 B 为相对紧集，则 $\widetilde{C}(B) = C(B)$; 因而新定义与原定义在相对紧集上一致. 一方面

$$\widetilde{C}(B) = \sup\{C(A) : A \in K, A \subset B\} \leqslant C(B);$$

另方面，如 U 为相对紧开集，则由 (vi) 及 (5),$\widetilde{C}(U) = C(U)$, 故对相对紧集 B,

$$\begin{aligned}\widetilde{C}(B) &= \inf\{\widetilde{C}(U) : U \text{ 为相对紧开集}, U \supset B\} \\ &= \inf\{C(U) : U \text{ 为相对紧开集}, U \supset B\} \geqslant C(B),\end{aligned}$$

从而 $\widetilde{C}(B) = C(B)$.

注 1 对具体的 B, 要求出它的容度并非容易. 因为由 (1), 这相当于要求出 $P_\xi(H_B)$. 有时可以利用逼近定理：如 $B_m \in \mathcal{B}^n, B_m \uparrow B, B$ 有界，则 $C(B_m) \uparrow C(B)$; 或者 B_m 紧，$B_m \downarrow B$, 则 $C(B_m) \downarrow C(B)$. 对有些集，可以找到容度的估值. 例如 (见 [17]), 设

$$C_L = \left(x : 0 \leqslant x_1 < L,\ \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leqslant 1\right),\ L > 0.$$

它是底为 $n-1$ 维单位球高为 L 的圆柱. 则对 $L_0 > 0$, 存在常数 M 及 N, 使

$$\begin{aligned}&ML \leqslant C(C_L) \leqslant NL,\ (L > L_0, n > 3); \\ &ML/\log L \leqslant C(C_L) \leqslant NL/\log L,\ (L > L_0,\ n = 3).\end{aligned}$$

§11.10. 暂留集的平衡测度

(一) 在 §8 中，对相对紧集定义了平衡测度，并证明了两个重要的结果，即 (8) 与 (16). 本节将推广这些结果到某些无界集上，即 §6 中所定义的暂留集上，它们依赖于布朗运动本身. 相对紧集都是暂留集 ($n \geqslant 3$ 时). 回忆暂留集 $B(\in \mathcal{B}^n)$ 的定义是：对一切 x, 有

$$\lim_{t\to\infty} P_x(x_s \in B. \text{ 对某} s > t) = 0. \tag{1}$$

称 $\mathcal{B}^n$ 上的任一测度 μ 为 Radon 测度，如对任一紧集 K, 有 $\mu(K) < \infty$.

设 $\mu_n(n\geqslant 1)$ 及 μ 皆为 Radon 测度，称 μ_n 淡收敛于 μ(converges vaguely), 如对任一有紧支集的连续函数 φ, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int\varphi\,d\mu_n=\int\varphi\,d\mu. \tag{2}$$

淡收敛记为 $\mu_n\xrightarrow{v}\mu$, ($\int=\int_{R^n}$).

设 $\mu_n(n\geqslant 1)$ 为一列 Radon 测度，如对每紧集 K, 有 $\sup\limits_n\mu_n(K)<\infty$, 则必存在一列严格上升的整数 $\{n_j\}$ 及 Radon 测度 μ, 使 $\mu_{n_j}\xrightarrow{v}\mu$.

定理 1 设 B 为暂留集. 则

i) 存在唯一 Radon 测度 μ_B, 其支集含于 ∂B, 使

$$G\mu_B(x)=P_x(h_B<\infty); \tag{3}$$

ii) 如 $B_m(m\geqslant 1)$ 是任一列相对紧集，满足

$$B_1\subset B_2\subset\cdots;\ \bigcup_m B_m=B,$$

则当 $m\to\infty$ 时，有

$$G\mu_{B_m}\uparrow G\mu_B;\ \mu_{B_m}\xrightarrow{v}\mu_B.$$

证 1° 设 $\{B_m\}$ 满足定理条件，则

$$\bigcup_m(h_{B_m}<\infty)=(h_B<\infty);$$
$$P_x(h_{B_m}<\infty)\uparrow P_x(h_B<\infty).$$

由 §8(8),

$$G\mu_{B_m}(x)=P_x(h_{B_m}<\infty)\leqslant P_x(h_B<\infty)\overset{(\text{设})}{\equiv}\varphi_B(x). \tag{4}$$

设 K 为任一紧集，因 $\inf\limits_{y\in K}g(y-x)=c(x)>0$, 由上式得

$$P_x(h_B<\infty)\geqslant\int_K g(y-x)\mu_{B_m}(dy)\geqslant c(x)\mu_{B_m}(K).$$

故 $\sup\limits_m\mu_{B_m}(K)<\infty$. 根据上述，存在子列 $\mu_{B'_m}\xrightarrow{v}\mu_B$. 其中 μ_B 为某 Radon 测度.

2° 设 $f\geqslant 0$ 连续，有紧支集. 由 §1 引理 4,Gf 有界连续. 以 B_r 表半径为 r, 中心为 0 的闭球，当 Gf 限制在 B_r 上时，由 $\mu_{B'_m}\xrightarrow{v}\mu_B$ 得

$$\begin{aligned}A&\overset{(\text{设})}{\equiv}\lim_{r\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}\int_{B_r}Gf(x)\mu_{B'_m}(dx)\right]\\&=\lim_{r\to\infty}\int_{B_r}Gf(x)\mu_B(dx)\\&=\int Gf(x)\mu_B(dx)=\int G\mu_B(x)f(x)dx.\end{aligned} \tag{5}$$

再由 $G\mu_{B'_m}\uparrow\varphi_B$ 得

$$B \overset{(设)}{\equiv} \lim_{m\to\infty}\int Gf(x)\mu_{B'_m}(dx)=\lim_{m\to\infty}\int G\mu_{B'_m}(x)f(x)(dx)=\int\varphi_B(x)f(x)\,dx. \tag{6}$$

利用最后将证明的一个结果：对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $r_0>0$, 使当 $r\geqslant r_0$ 时，有

$$\sup_m\int_{B_r^c}\mu_{B'_m}(dx)Gf(x)<\varepsilon; \tag{7}$$

容易看出，当 r 充分大时， A 与 B 之值皆在

$$\lim_{m\to\infty}\int Gf(x)\mu_{B'_m}(dx)\pm\varepsilon$$

之间，从而 $A=B$, 于是 (5),(6) 之右方值也相等而有

$$\int G\mu_B(x)f(x)\,dx=\int\varphi_B(x)f(x)\,dx.$$

由 f 的任意性得

$$G\mu_B(x)=\varphi_B(x),\quad (\text{a.e.})$$

利用 §8 定理 2 中的同样证法，即知上式对一切 x 成立. 此得证 (3) 及 ii) 中第一结论.

3° 若 $\{\mu_{B''_m}\}$ 为 $\{\mu_{B_m}\}$ 的另一淡收敛于某测度 μ'_B 的另一子列，则同样推理可得 $G\mu'_B(x)=\varphi_B(x)=G\mu_B(x)$. 由唯一性定理 (§7. 定理 1) 即得 $\mu'_B=\mu_B$, 因而 $\mu_{B_m}\xrightarrow{v}\mu_B$. 唯一性定理还表明 μ_B 是唯一的有势为 φ_B 的测度. 下证支集 $\operatorname{supp}\mu_B\subset\partial B$. 取球列 $\{B_m\}$. 令 $C_m=B\cap B_m$, 则 $C_1\subset C_2\subset\cdots$, $\bigcup\limits_m C_m=B$. 于是 $\mu_{C_m}\xrightarrow{v}\mu_B$. 但 $\operatorname{supp}\mu_{C_m}\subset\partial C_m$, 而且 B 之每一内点必为 C_m (m 充分大) 的内点，故 $\operatorname{supp}\mu_B\subset\partial B$.

4° 剩下要证 (7). 若 $x\in B_r^c$, 则 $H_{B_r^c}(x,dy)$ 集中在点 x 上，故

$$\int_{B_r^c}\mu_{B'_m}(dx)Gf(x)=\int_{B_r^c}\mu_{B'_m}(dx)H_{S_r^c}Gf(x)\leqslant\int\mu_{B'_m}(dx)H_{B_r^c}Gf(x). \tag{8}$$

在 §6(13) 中令 $\lambda\to 0$, 得

$$\int H_{B_r^c}(x,dz)g(y-z)=\int H_{B_r^c}(y,dz)g(x-z).$$

由此及 (4) 得

$$\begin{aligned}\int\mu_{B'_m}(dx)H_{B_r^c}Gf(x)&=\iiint\mu_{B'_m}(dx)H_{B_r^c}(x,dz)g(y-z)f(y)\,dy\\&=\iiint\mu_{B'_m}(dx)f(y)\,dyH_{B_r^c}(y,dz)g(x-z)\\&=\int H_{B_r^c}G\mu_{B'_m}(y)f(y)\,dy\leqslant\int H_{B_r^c}\varphi_B(y)f(y)\,dy\end{aligned}$$

联合 (8) 即得

$$\int_{B_r^c}Gf(x)\mu_{B'_m}(dx)\leqslant\int H_{B_r^c}\varphi_B(y)f(y)\,dy \tag{9}$$

简写 $h_{B_r^c}$ 为 h. 注意 $\varphi_B \leqslant 1$; 对 $t>0$, 有

$$\begin{aligned} H_{B_r^c}\varphi_B(y) &= E_y[\varphi_B(x(h))] = E_y[\varphi_B(x(h)), h\leqslant t] + E_y[\varphi_B(x(h)), h>t] \\ &\leqslant P_y(h\leqslant t) + T_t\varphi_B(y). \end{aligned} \tag{10}$$

因 B 为暂留集，故

$$T_t\varphi_B(y) = P_y(x(s)\in B,\ 对某s>t) \downarrow 0,\ (t\to\infty).$$

又因 $P_y(\lim\limits_{r\to\infty} h=\infty)=1$, 故 $\lim\limits_{r\to\infty} P_y(h\leqslant t)=0$, 于是由 (10), $\lim\limits_{r\to\infty} H_{B_r^c}\varphi_B(y)=0$. 既然 f 有紧支集，由控制收敛定理，当 r 充分大时， (9) 式右方积分小于任意给定的 $\varepsilon>0$; 于是左方对一切 m 也如此，此得证 (7). □

我们称定理 1 中的 μ_B 为 B 的平衡测度，其势称为平衡势.

(二) 在 §9 中，对任一 Borel 集 B, 定义了容度 $\widetilde{C}(B)$, 它是由相对紧集的容度经扩张后而来的. 自然要问：当 B 为暂留集时，其平衡测度的全部质量 $\mu_B(R^n)$ 是否等于 $\widetilde{C}(B)$? 为此，需要下列引理.

引理 1 设 B 为暂留集，又 $A\subset B$, 则

$$\mu_A(R^n) \leqslant \mu_B(R^n). \tag{11}$$

证 以 $\{D_m\}$ 表一列上升的相对紧集，其和为 R^n. 由定理 1 得

$$\begin{aligned} \int \mu_A(dx)G\mu_{D_m}(x) &= \int \mu_{D_m}(dx)G\mu_A(x) = \int \mu_{D_m}(dx)P_x(h_A<\infty) \\ &\leqslant \int \mu_{D_m}(dx)P_x(h_B<\infty) = \int \mu_{D_m}(dx)G\mu_B(x) = \int \mu_B(dx)G\mu_{D_m}(x). \end{aligned}$$

由于

$$G\mu_{D_m}(x) = P_x(h_{D_m}<\infty) \uparrow 1,$$

故由单调收敛定理得证 (11). □

定理 2 设 B 为暂留集,

i) 如 $\{B_m\}$ 为相对紧集列， $B_1\subset B_2\subset\cdots$, $\bigcup\limits_m B_m = B$, 则 $C(B_m)\uparrow \widetilde{C}(B)$;

ii) $\widetilde{C}(B)=\mu_B(R^n)$.

证 1° 由 $C(B_m)=\mu_{B_m}(R^n)$ 及 (11), 得

$$C(B_1)\leqslant C(B_2)\leqslant\cdots\leqslant \mu_B(R^n). \tag{12}$$

以 $f_r(r\geqslant 1)$ 表有紧支集的连续函数. $0\leqslant f_r\leqslant 1$, $f_r\uparrow 1$, $(r\to\infty)$, 有

$$C(B_m) \geqslant \int f_r(x)\mu_{B_m}(dx).$$

既然 $\mu_{B_m}\xrightarrow{v}\mu_B$, 得 $\lim\limits_{m\to\infty} C(B_m)\geqslant \int f_r(x)\mu_B(dx)$. 再令 $r\to\infty$, 有 $\lim\limits_{m\to\infty} C(B_m)\geqslant \mu_B(R^n)$. 结合 (12) 得

$$C(B_m)\uparrow \mu_B(R^n). \tag{13}$$

2° 下面分两种情况. 先设 $\mu_B(R^n)=\infty$, 对任意 $N>0$, 必有 m 使 $C(B_m)\geqslant 2N$. 由于

$$C(B_m)=\sup\{C(K):\ K\subset B_m, K \text{ 紧}\}, \tag{14}$$

故必有紧集 $K\subset B_m\subset B$ 使 $C(K)>N$; 从而

$$\widetilde{C}(B)=\sup\{C(K):\ K\subset B, K \text{ 紧}\}=\infty=\mu_B(R^n).$$

次设 $\mu_B(R^n)<\infty$. 对 $\varepsilon>0$, 存在 m 使 $C(B_m)\geqslant\mu_B(R^n)-\varepsilon$. 由 (14), 有紧集 $K\subset B_m\subset B$, 使

$$C(K)\geqslant C(B_m)-\varepsilon\geqslant\mu_B(R^n)-2\varepsilon.$$

故 $\widetilde{C}(B)\geqslant\mu_B(R^n)$. 联合 (13) 即得 $\widetilde{C}(B)=\mu_B(R^n)$. □

(三) 现在来推广 §8(16), 它是概率论与势论间的一重要联系.

定理 3 设 B 为闭集，则

$$P_x(h_B<\infty)=\sup_{\mu\in\mathcal{M}(B)}G\mu(x). \tag{15}$$

证 因 B 闭，可以找到紧集 $B_n\subset B$, $B_1\subset B_2\subset\cdots$, $\bigcup_n B_n=B$. 由 §8 定理 2

$$G\mu_{B_n}(x)=P_x(h_{B_n}<\infty)\uparrow P_x(h_B<\infty),\ (n\to\infty). \tag{16}$$

另方面，设 $\mu\in\mathcal{M}(B)$, 其紧支集含于 B_n. 由 §8(22),(23)

$$G\mu(x)\leqslant G\mu_{B_n}(x)=P_x(h_{B_n}<\infty)\leqslant P_x(h_B<\infty).$$

由此及 (16) 即得 (15). □

系 1 闭集 B 为暂留集的充要条件是：存在 Radon 测度 μ_B, 其支集含于 ∂B, 使

$$G\mu_B(x)=\sup\{G\mu(x):\mu\in\mathcal{M}(B)\}. \tag{17}$$

证 必要：由定理 1 与 3 得

$$G\mu_B(x)=P_x(h_B<\infty)=\sup\{G\mu(x):\mu\in\mathcal{M}(B)\}.$$

充分：由 (17) 及定理 3

$$G\mu_B(x)=\sup\{G\mu(x):\mu\in\mathcal{M}(B)\}=P_x(h_B<\infty).$$
$$T_tG\mu_B(x)=T_tP_x(h_B<\infty)=P_x(x_s\in B,\ \text{对某} s>t).$$

令 $t\to\infty$, 仿 §8 定理 2 之证，知左方趋于 0. 故 B 暂留. □

对暂留集 B 称定理 1 中的 μ_B 为 B 的平衡测度，已证明 $\operatorname{supp}\mu_B\subset\partial B$, $\mu_B(R^n)=\widetilde{C}(B)$, 故它与容度的扩张理论是相容的.

§11.11 极　　集

(一) λ- 势　本节讨论集为极集的条件. 回忆集 $B\in\mathcal{B}^n$ 称为极集, 如 $P_x(h_B<\infty)\equiv 0$. 以下会看到, 这些条件可以通过容度、规则点或势来表达. 对 $\lambda>0$, 令

$$H_B^\lambda(x,A)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P_x(h_B\in dt, x(h_B)\in A), \tag{1}$$

$$\mu_B^\lambda(A)=\lambda\int H_B^\lambda(x,A)\,dx. \tag{2}$$

下引理表明: $E_xe^{-\lambda h_B}$ 是 μ_B^λ 的 λ- 势. 即

引理 1　对任意 $B\in\mathcal{B}^n$, 有

$$E_xe^{-\lambda h_B}=\int g^\lambda(y-x)\mu_B^\lambda(dy)\ (\equiv G^\lambda\mu_B^\lambda(x)). \tag{3}$$

证　将 §6(12) 双方对 $x\in R^n$ 积分, 并利用

$$\int g^\lambda(x)\,dx=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int p(t,x)dxdt=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt=1/\lambda \tag{4}$$

得

$$1=\int_{\overline{B}}\mu_B^\lambda(dz)g^\lambda(y-x)+\lambda\int g_B^\lambda(x,y)\,dx. \tag{5}$$

由 g_B^λ 的对称性及 §6(7)

$$\int g_B^\lambda(x,y)\,dx=\int g_B^\lambda(y,x)\,dx=E_y\int_0^{h_B}e^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}[1-E_ye^{-\lambda h_B}]. \tag{6}$$

代入 (5) 并利用 g^λ 的对称性即得 (3). □

系 1　设 $n\geqslant 2$, 可列点集为极集.

证　利用 $P_x(h_{\bigcup\limits_m A_m}<\infty)\leqslant\sum\limits_m P_x(h_{A_m}<\infty)$ 知, 可列多个极集的和为极集. 故只要证单点集为极集. 在 (3) 中取 $B=\{a\}$, 得

$$E_xe^{-\lambda h_a}=g^\lambda(a-x)\mu_a^\lambda(a),\ \ (a=\{a\}), \tag{7}$$

令 $x\to a$, 左方界于 0 与 1 之间, 而由 $n\geqslant 2$, $\lim\limits_{x\to a}g^\lambda(a-x)=g^\lambda(0)=\infty$, 故必 $\mu_a^\lambda(a)=0$. 于是 $E_xe^{-\lambda h_a}\equiv 0$, 从而 $P_x(h_a<\infty)\equiv 0$. □

注意　μ_B^λ 集中在 $\overline{B}$ 上, 又 $g^\lambda(x)$ 当 x 在紧集上变动时, 下界大于 0. 故由 (3) 知, 如 $\overline{B}$ 紧, 则 $\mu_B^\lambda(\overline{B})<\infty$. 令

$$C^\lambda(B)=\mu_B^\lambda(\overline{B}). \tag{8}$$

引理 2　设 B 与 B_m 皆紧, 又

$$B_1\supset\mathring{B}_1\supset B_2\supset\mathring{B}_2\supset\cdots,\ \ \bigcap_m\mathring{B}_m=\bigcap_m B_m=B.$$

则有

$$\lim_{m\to\infty} C^\lambda(B_m) = C^\lambda(B). \tag{9}$$

证 将 (3) 双方对 $x\in R^n$ 积分，利用 (4)

$$\int E_x e^{-\lambda h_B} dx = \iint g^\lambda(y-x)dx\mu_B^\lambda(dy) = \frac{1}{\lambda}\int \mu_B^\lambda(dy) = \frac{1}{\lambda}\mu_B^\lambda(\overline{B}) = \frac{1}{\lambda}C^\lambda(B),$$

故得

$$C^\lambda(B) = \lambda\int E_x e^{-\lambda h_B} dx,\quad C^\lambda(B_m) = \lambda\int E_x e^{-\lambda h_{B_m}} dx. \tag{10}$$

故由 §6 引理 1 及 §3 定理 4

$$E_x e^{-\lambda h_{B_m}} \downarrow E_x e^{-\lambda h_B} \quad (L-\text{a.e. } x).$$

由此及 (10) 即得 (9). □

(二) 充要条件.

定理 1 设 K 为紧集，又 $\sup\limits_x E_x e^{-\lambda h_K} = \beta < 1$, 则 K 为极集.

证 取一列紧集 $K_m \supset K$, 使

$$K_1 \supset \overset{\circ}{K}_1 \supset K_2 \supset \overset{\circ}{K}_2 \supset \cdots,\quad \bigcap_m K_m = \bigcap_m \overset{\circ}{K}_m = K.$$

由 $y\in K\subset \overset{\circ}{K}_m \subset K_m^r$, 得

$$E_y e^{-\lambda h_{K_m}} = 1. \tag{11}$$

一方面

$$\iint g^\lambda(y-x)\mu_K^\lambda(dy)\mu_{K_m}^\lambda(dx) = \int_{K_m}(E_x e^{-\lambda h_K})\mu_{K_m}^\lambda(dx) \leqslant \beta C^\lambda(K_m).$$

另方面，由 (11)

$$\iint g^\lambda(y-x)\mu_K^\lambda(dy)\mu_{K_m}^\lambda(dx) = \int_K (E_y e^{-\lambda h_{K_m}})\mu_K^\lambda(dy) = C^\lambda(K).$$

由此及引理 2

$$C^\lambda(K) \leqslant \beta C^\lambda(K_m) \downarrow \beta C^\lambda(K).$$

故 $C^\lambda(K)=0$. 由 (3), $E_x e^{-\lambda h_K}\equiv 0$; $P_x(h_K<\infty)\equiv 0$. □

在 §3 中，我们称可测集 B 为疏集，如 $B^r=\phi$(空集). 直观地说，疏集是自任一点都不能立刻命中的集. 下定理表示：如一紧集自任一点都不能立刻击中，那么它自任一点都永远不能击中.

定理 2 设 A 紧，则 A 为极集的充要条件是它为疏集.

证 必要：由 $P_x(h_A=0)\leqslant P_x(h_A<\infty)$ 知极集必疏.

充分： 1° 先证 $E_xe^{-\lambda h_A}$ 对 x 下连续. 由 §3 定理 3,$P_x(h_A\leqslant t)$ 下连续. 由 Fatou 引理及分部积分，得

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{x\to a} E_xe^{-\lambda h_A}&=\underline{\lim}_{x\to a}\int_0^\infty e^{-\lambda t}dP_x(h_A\leqslant t)\geqslant \underline{\lim}_{x\to a}\lambda\int_0^\infty P_x(h_A\leqslant t)e^{-\lambda t}dt\\&\geqslant\lambda\int_0^\infty \underline{\lim}_{x\to a}P_x(h_A\leqslant t)e^{-\lambda t}dt\geqslant\lambda\int_0^\infty P_a(h_A\leqslant t)e^{-\lambda t}dt=E_ae^{-\lambda h_A}.\end{aligned}$$

2° 令 $A_m=\left(x:E_xe^{-\lambda h_A}\leqslant 1-\frac{1}{m}\right)\cap A\subset A$; 由 1° 知 A_m 紧. 根据引理 1, 对 $x\in A_m$, 有

$$G^\lambda\mu^\lambda_{A_m}(x)=E_xe^{-\lambda h_{A_m}}\leqslant E_xe^{-\lambda h_A}\leqslant 1-\frac{1}{m}.$$

由 §7 极大原理 (定理 2'), 上式对一切 $x\in R^n$ 成立. 由定理 1 知 A_m 为极集. 因 $A^r=\phi$, 故 $A=\bigcup_m A_m$ 也是极集. □

定理 3 如 B 紧，则 $B\cap(B^r)^c$ 为极集.

证 注意如 $N\supset M$, $x\overline{\in}N^r$, 则显然 $x\overline{\in}M^r$. 对正整数 m, 令

$$B_m=B\cap\left(x:E_xe^{-\lambda h_B}\leqslant 1-\frac{1}{m}\right)\equiv B\cap D_m.$$

任取 $x\in R^n$. 或者 $x\overline{\in}B^r$, 由上述事实知 $x\overline{\in}B^r_m$. 或者 $x\in B^r$, 因之 $P_x(h_B=0)=1$ 而 $x\overline{\in}D_m$. 既然 $E_xe^{-\lambda h_B}$ 对 x 下连续， D_m 闭，故 $x\overline{\in}D^r_m$. 再利用上事实， $x\overline{\in}B^r_m$. 于是得知 $B^r_m=\phi$. 由定理 2,B_m 为极集. 从而

$$B\cap(B^r)^c=\bigcup_m B_m$$

也是极集. □

定理 4 设 $B\in\mathcal{B}^n$, $(n\geqslant 3)$, 则 B 为极集的充要条件是下二者之一：

(i) B 的任一紧子集为极集；

(ii) 容度 $\widetilde{C}(B)=0$.

证 (i) 必要性显然. 反之，设紧子集 $K\subset B$ 为极集，由 §8 系 1,$C(K)=0$. 于是对 B 的任意相对紧子集 A, 有

$$C(A)=\widetilde{C}(A)=\sup\{C(K):K\subset A,K\text{ 紧}\}=0.$$

再由 §8 系 1, A 为极集. 特别， $B\cap B_m$ 为极集，其中 $B_m=(x:|x|\leqslant m)$. 由 $B=\bigcup_m(B\cap B_m)$ 知 B 为极集.

(ii) 若 B 为极集，则其紧子集为极集. 由 §8 系 1

$$\widetilde{C}(B)=\sup\{C(K):K\subset B,K\text{紧}\}=0.$$

反之，如 $\widetilde{C}(B)=0$, 则对其任意紧子集 K, 有 $C(K)=0$, 故 K 为极集. 由 (i) 即知 B 为极集. □

回忆 §8(三) 中 $\mathcal{M}(B)$ 的定义,

定理 5 设 $B \in \mathcal{B}^n$, $(n \geqslant 3)$, 则 B 为极集的充要条件是 $\mathcal{M}(B) = \phi$; 或等价地，对任意测度 μ, 其支集 $K \subset B$, $0 < \mu(B) < \infty$, 有 $\sup\limits_x G\mu(x) = \infty$.

证 只需证后一结论. 设有如上之 μ, 使 $\sup\limits_x G\mu(x) \leqslant M < \infty$, 则 $\frac{\mu}{M} \in \mathcal{M}(K) \subset \mathcal{M}(B)$. 显然，由 §8(16),

$$P_x(h_B < \infty) \geqslant P_x(h_K < \infty) \geqslant G\mu(x)/M.$$

因 μ 非 0, 由 §7 唯一性定理，至少有一 x, 使 $G\mu(x) > 0$. 对此 x, $P_x(h_B < \infty) > 0$, 故 B 非极集.

反之，如 B 非极集，由定理 4(i),B 必有某紧子集 K, 它非极集，即 $P_x(h_K < \infty) > 0$ 对某 x 成立. 考虑 K 的平衡测度 μ_K, 由 §8 定理 2

$$0 < P_x(h_K < \infty) = G\mu_K(x) \leqslant 1.$$

故 μ_K 使 $\sup\limits_x G\mu_K(x) = \infty$ 不成立. □

§11.12 末遇分布

(一) 末遇时与末遇点 对 $B \in \mathcal{B}^n, n \geqslant 3$, 定义 B 的末遇时为

$$l_B(\omega) = \begin{cases} \sup(t > 0, x_t(\omega) \in B), & \text{如右集非空}, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \tag{1}$$

并称 $x(l_B)$ 为 B 的末遇点. 由于

$$(l_B > t) = (\theta_t h_B < \infty), \tag{2}$$

故 l_B 是一随机变量.

本节中，设 B 为暂留集， μ_B 表 §10 定理 1 中的 Radon 测度. 当 B 为相对紧集时, μ_B 即 B 的平衡测度.

定理 1 自 $x \in R^n$ 出发， l_B 的分布在 $(0, \infty)$ 绝对连续，而且有密度为

$$\int p(t, x, z)\mu_B(dz), \quad (t > 0).$$

证 由 (1) 及 §10 定理 1

$$\begin{aligned}
P_x(l_B > t) &= P_x(\theta_t h_B < \infty) = E_x P_{x(t)}(h_B < \infty) \\
&= \int p(t, x, y) P_y(h_B < \infty)\, dy = \int p(t, x, y) G\mu_B(y)\, dy \\
&= \int p(t, x, y) \int g(y, z)\mu_B(dz) dy = \int p(t, x, y) \int\int_0^\infty p(s, y, z) ds\, \mu_B(dz) dy \\
&= \int_0^\infty \int p(s + t, x, z)\mu_B(dz) ds = \int_t^\infty \left[\int p(s, x, z)\mu_B(dz)\right] ds. \quad \square
\end{aligned}$$

系 1

$$E_x(e^{-\lambda l_B}, l_B > 0) = \int g^\lambda(x,y)\mu_B(dy), \ (\lambda \geqslant 0). \tag{3}$$

证 左方等于

$$\int_{0+}^\infty e^{-\lambda t} P_x(l_B \in dt) = \int_{0+}^\infty e^{-\lambda t}\int p(t,x,z)\mu_B(dz)\,dt = \int g^\lambda(x,z)\mu_B(dz). \ \square$$

以 $L_B(x,A) = P_x(x(l_B)\in A, l_B > 0)$ 表末遇点分布，则有下列定理，它由 Chung [3] 得到.

定理 2

$$L_B(x,A) = \int_A g(x,y)\mu_B(dy), \quad (x \in R^n, A \subset \mathcal{B}^n). \tag{4}$$

证 取 $f \geqslant 0$ 为 R^n 上连续函数，有紧支集，且在 x 之某邻域为 0. 因为在 $(l_B > t)$ 上，有 $l_B = t + \theta_t l_B$, 故对 $\lambda \geqslant 0$ 有

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda t} E_x[f(x(l_B - t); l_B > t)]dt &= E_x\left[\int_0^{l_B} e^{-\lambda t} f(x(l_B - t))dt\right] \\
&= E_x\left[\int_0^{l_B} e^{-\lambda(l_B - t)} f(x(t))dt\right] = E_x\left[\int_0^{l_B} e^{-\lambda\theta_t l_B} f(x(t))dt\right] \\
&= \int_0^\infty E_x[e^{-\lambda\theta_t l_B} f(x(t)); l_B > t]dt = \int_0^\infty E_x[f(x(t))E_{x(t)}(e^{-\lambda l_B}; l_B > 0)]dt \\
&= \int_0^\infty \int f(z)E_z(e^{-\lambda l_B}, l_B > 0)p(t,x,z)\,dzdt \\
&= \int g(x,z)f(z)\left[\int g^\lambda(z,y)\mu_B(dy)\right]dz \ (\text{由 } (3)) \\
&= \int g(x,z)f(z)\left[\int\int_0^\infty e^{-\lambda t}p(t,z,y)\,dt\,\mu_B(dy)\right]dz \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\int\int p(t,z,y)f(z)g(x,z)dz\,\mu_B(dy)\right]dt.
\end{aligned}$$

两边取反拉氏变换可知，对 L-a.e. $t \in (0,\infty)$, 有

$$E_x[f(x(l_B - t); l_B > t] = \int\int p(t,z,y)f(z)g(x,z)dz\,\mu_B(dy). \tag{5}$$

注意 $f(\cdot)g(x,\cdot)$ 连续而且有紧支集. 由于 (5) 中二方皆对 t 连续，故 (5) 对一切 $t > 0$ 成立. 在 (5) 中令 $t \to 0$, 得

$$E_x[f(x(l_B)); l_B > 0] = \int f(y)g(x,y)\mu_B(dy).$$

故

$$P_x(l_B > 0, x(l_B) \in A) = \int_A g(x,y)\mu_B(dy). \tag{6}$$

对 $A \subset R^n \setminus \{x\}$ 成立. 因

$$P_x(l_B > 0) = P_x(h_B < \infty) = \int g(x,y)\mu_B(dy),$$

故 (6) 对一切 $A \subset R^n$ 成立. □

系 2

$$P_x(l_B > t, x(l_B) \in A) = \int_A \left[\int_t^\infty p(s,x,z)ds \right] \mu_B(dz). \tag{7}$$

证 左式等于

$$\begin{aligned} P_x(\theta_t(l_B > 0, x(l_B) \in A)) &= E_x P_{x(t)}(l_B > 0, x(l_B) \in A) \\ &= \int p(t,x,y) P_y(l_B > 0, x(l_B) \in A) dy \\ &= \int p(t,x,y) \int_A g(y,z)\mu_B(dz)dy = \int_A \left(\int_t^\infty p(s,x,z)ds \right) \mu_B(dz). \ \square \end{aligned}$$

系 3 对相对紧集 B, 有

$$L_B(x,dy) = g(x,y) \lim_{|z|\to\infty} \frac{H_B(z,dy)}{g(z,y)}, \tag{8}$$

其中 $H_B(z,A) = P_z(x(h_B) \in A)$ 为首中点分布.

证 由 (6) 及 §8(5)

$$\frac{L_B(x,dy)}{g(x,y)} = \mu_B(dy) = \lim_{|z|\to\infty} \frac{H_B(z,dy)}{g(z)}.$$

再注意 $\lim\limits_{|z|\to\infty} \frac{g(z,y)}{g(z)} = 1$ 即得 (8). □

因之末遇点分布可通过首中点分布来表达.

(二) **球的情形** 自 x 出发, $|x| < r$, 则 B_r 与 S_r 之末遇时同分布, 末遇点也同分布. 以下的定理 3-7 皆首见于文献 [21,22], 定理 3 也在文献 [10] 中得到.

定理 3 自 0 出发, 球面 S_r 之末遇时 l_{S_r} 的分布 $P_0(l_{S_r} \leqslant t)$ 对 $t > 0$ 绝对连续, 有密度为

$$f(t) = \frac{r^{n-2}}{2^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} t^{-n/2} e^{-r^2/2t}, \quad (t > 0). \tag{9}$$

证 由定理 1 及 §8 例 1

$$\begin{aligned} f(t) &= \int p(t,x,z)\mu_{S_r}(dz) = \frac{r^{n-2}}{c_n} \int_{S_r} \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-|y|^2/2t} U_r(dy) \\ &= \frac{r^{n-2}}{c_n |S_r| (2\pi t)^{n/2}} \int_{S_r} e^{-|y|^2/2t} L_{n-1}(dy). \end{aligned} \tag{10}$$

将 §1(12) 对 r 微分, 得

$$\int_{S_r} f(|y|) L_{n-1}(dy) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^{n-1} f(r).$$

特别

$$\int_{S_r} e^{-|y|^2/2t} L_{n-1}(dy) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^{n-1} e^{-r^2/2t}. \tag{11}$$

以此代入 (10), 并注意

$$c_n|S_r| = \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)r^{n-1}\Big/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

即得证 (9). □

至于球面 S_r 的末遇点分布，则有

$$L_{S_r}(x,dy) = \frac{r^{n-2}}{|y-x|^{n-2}}U_r(dy),\quad (x\in R^n). \tag{12}$$

实际上，由 (4)

$$L_{S_r}(x,dy) = g(x,y)\mu_{S_r}(dy) = \frac{c_n}{|y-x|^{n-2}}\cdot\frac{r^{n-2}}{c_n}U_r(dy) = \frac{r^{n-2}}{|y-x|^{n-2}}U_r(dy).$$

特别，由 (12) 及 §3 定理 2, 知

$$P_0(x(h_r)\in A) = U_r(A) = P_0(x(l_{S_r})\in A).$$

即自 0 出发， S_r 之首中点与末遇点同分布，即球面上之均匀分布.

定理 4 对 $n(\geqslant 3)$ 维布朗运动，当且只当 $m<\frac{n}{2}-1$ 时， $E_0(l_{S_r})^m<\infty$, 而且

$$E_0(l_{S_r})^m = r^{2m}/(n-4)(n-6)\cdots(n-2m-2),\quad (n>4). \tag{13}$$

证 由 (9)

$$\begin{aligned} E_0(l_{S_r})^m &= \frac{r^{n-2}}{2^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}\int_0^\infty s^{m-\frac{n}{2}}e^{-r^2/2s}\,ds \\ &= \frac{r^{2m}}{2^m\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}\int_0^\infty u^{\frac{n}{2}-m-2}e^{-u}\,du. \end{aligned}$$

后一积分当且只当 $\frac{n}{2}>m+1$ 时收敛，其值为 $\Gamma(\frac{n}{2}-m-1)$. 利用等式 $\Gamma(\frac{n}{2}-1)=\Gamma(\frac{n}{2}-m-1)\prod\limits_{i=1}^{m}(\frac{n}{2}-i-1)$, 即得 (13). □

于是此矩有成双性质： $n=3,4$ 时， $E_0(l_{S_r})=\infty$; $n=5,6$ 时， $E_0(l_{S_r})<\infty$; $n=7,8$ 时， $E_0(l_{S_r})^2<\infty$ 等等.

关于矩还有一有趣性质：由 §3 注 2 、 §3 定理 1 以及本节 (13), 以 $l_r^{(n)}$, $h_r^{(n)}$ 及 $T_r^{(n)}$ 分别表 n 维空间中布朗运动对 S_r 的末遇时、首中时及在 B_r 中的停留时间

$$T_r^{(n)} = \int_0^\infty \chi_{B_r}(x_t)\,dt,$$

(χ_A 表 A 的示性函数), 则有

$$E_0[h_r^{(n)}] = E_0[T_r^{(n+2)}] = E_0[l_r^{(n+4)}] = \frac{r^2}{n},\ (n\geqslant 1). \tag{14}$$

在 §3 注 2 中已知 $h_r^{(n)}$ 与 $T_r^{(n+2)}$ 关于 P_0 同分布；上式可视为此事实在矩的方面的延拓. (14) 式还反映布朗粒子逃逸速度随维数 n 增高而加大.

以下固定 $n \geqslant 3$, 简写 $l_r^{(n)}$ 为 $l_r(\equiv l_{S_r})$, $h_r^{(n)}$ 为 h_r, 并定义

$$M_r = \max_{0\leqslant t\leqslant l_r} |x(t)|, \quad \alpha_r = \min_t(|x_t| = M_r,\ t \leqslant l_r). \tag{15}$$

M_r 是 n 维布朗运动粒子在末遇球面 S_r 前所走的极大游程，即与原点的最大距离，而 α_r 为首达极大的时刻.

定理 5 对 $x, |x| \leqslant r$, 有

$$P_x(M_r \leqslant a) = \begin{cases} 0, & \text{如} a \leqslant r, \\ 1 - \left(\dfrac{r}{a}\right)^{n-2}, & \text{如} a > r. \end{cases} \tag{16}$$

证 先设 $a > r$.

$$P_x(M_r \geqslant a) = P_x(l_r > h_a) = \int_{S_a} P_x(x(h_a) \in db)P_b(l_r > 0).$$

当 $b \in S_a$ 时， $|b| = a > r$. 由 §4(15), 得

$$P_b(l_r > 0) = P_b(h_r < \infty) = \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2};$$

$$P_x(M_r \geqslant a) = \int_{S_a} P_x(x(h_a) \in db)\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2} = \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2};$$

$$P_x(M_r > a) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} P_x(M_r \geqslant a + \varepsilon) = \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}.$$

次设 $a < r$. 由 M_r 之定义，显然有 $P_x(M_r \leqslant a) = 0$. 最后设 $a = r$. 由已证明的二结果得

$$\begin{aligned} P_x(M_r = r) &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} p_x(r - \varepsilon < M_r \leqslant r + \varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}[P_x(M_r \leqslant r + \varepsilon) - P_x(M_r \leqslant r - \varepsilon)] \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[1 - \left(\frac{r}{r+\varepsilon}\right)^{n-2}\right] = 0, \end{aligned}$$

$$P_x(M_r \leqslant r) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} P_x(M_r \leqslant r - \varepsilon) + P_x(M_r = r) = 0. \ \square$$

由 (16) 知 $P_x(M_r \leqslant a)$ 不依赖于 $x, |x| \leqslant r$. 它有密度

$$g_r(a) = \begin{cases} 0, & \text{如} a \leqslant r, \\ (n-2)r^{n-2}/a^{n-1}, & \text{如} a > r. \end{cases} \tag{17}$$

其 m 级矩为

$$E_x(M_r^m) = (n-2)r^{n-2}\int_r^\infty a^m a^{1-n} da = \begin{cases} \infty, & \text{如} m \geqslant n-2, \\ \dfrac{n-2}{n-m-2}r^m, & \text{如} m < n-2, \end{cases} \quad (|x| \leqslant r). \tag{18}$$

由此知： $n = 3$ 时， $E_x(M_r) = \infty$; $n = 4$ 时， $E_x(M_r) < \infty$, 但二级矩不存在； $n = 5$ 时， $E_x(M_r^2) < \infty$, 但三级矩不存在；等等.

今引入二特征数 C_l 及 C_M:

$$C_l = \max(\text{整数} m \geqslant 0,\ E_0(l_r^m) < \infty),$$
$$C_M == \max(\text{整数} m \geqslant 0,\ E_0(M_r^m) < \infty).$$

由 (13) 及 (18) 知它们依赖于空间维数 n, 但不依赖于球的半径 $r > 0$; 而且还有下表

n	3	4	5	6	$\cdots$	$2k-1$	$2k$
C_l	0	0	1	1		$k-2$	$k-2$
C_M	0	1	2	3		$2k-4$	$2k-3$

这说明 $2k-1$ 与 $2k$ 维布朗运动, 虽有相同的 $C_l = k-2$, 却有不同的 C_M, 分别为 $2k-4$ 与 $2k-3$. 用 C_l 可以把各维布朗运动按维数一对一对地区别开来, 而用 C_M 则可一一地分开. 在此意义上, C_M 比 C_l 更精确些.

现在讨论 M_r 的修正变量 N_r

$$M_r = \frac{M_r - r}{\sqrt{D_x M_r}} \quad (n > 4). \tag{19}$$

N_r 依赖于 n, 又 D 表方差. 由 (18), 当 $|x| \leqslant r$ 时

$$E_x(M_r) = \frac{n-2}{n-3} r, \quad D_x(M_r) = \frac{n-2}{(n-3)^2(n-4)} r^2. \tag{20}$$

定理 6 当 $|x| \leqslant r$ 时

$$\lim_{n\to\infty} P_x(N_r \leqslant a) = \begin{cases} 0 & \text{如} a \leqslant 0, \\ 1 - e^{-a}, & \text{如} a \leqslant 0. \end{cases} \tag{21}$$

证

$$P_x(N_r > a) = P_x\left(\frac{M_r - r}{\frac{r}{n-3}\sqrt{\frac{n-2}{n-4}}} > a\right)$$
$$= P_x\Big(M_r > \frac{ar}{n-3}\sqrt{\frac{n-2}{n-4}} + r\Big).$$

由定理 5, 当 $\frac{ar}{n-3}\sqrt{\frac{n-2}{n-4}} + r \leqslant r$ 时, 亦即当 $a \leqslant 0$ 时, 有 $P_x(N_r > a) = 1$. 由此得 (21) 中第一结论. 当 $a > 0$ 时, 仍由定理 5,

$$P_x(N_r > a) = \left[r\Big/\Big(\frac{ar}{n-3}\sqrt{\frac{n-2}{n-4}} + r\Big)\right]^{n-2}$$
$$= 1\Big/\left[1 + \frac{a}{n-3}\sqrt{\frac{n-2}{n-4}}\right]^{n-3}\left(1 + \frac{a}{n-3}\sqrt{\frac{n-2}{n-4}}\right) \to e^{-a},\ (n \to \infty). \ \square$$

今以 q_{ni} 表 Bessel 函数 $J_v(z)(v = \frac{n}{2} - 1)$ 的正零点, 又

$$\xi_{ni} = q_{ni}^{v-1}/2^{v-1}\Gamma(v+1)J_{v+1}(q_{ni}).$$

定理 7

(i) $P_0(\alpha_r > t) = (n-2)r^{n-2}\sum_{i=1}^{\infty}\xi_{ni}\cdot\int_r^{\infty}\frac{1}{a^{n-1}}e^{-q_{ni}^2 t/2a^2}da$;

(ii) $E_0\alpha_r = \frac{n-2}{n(n-4)}r^2$, $(n > 4)$.

证 α_r 是首中随机球面 S_{M_r} 的时间，亦即 $\alpha_r = h_{M_r}$. 由此及 (17) 得 [1]

$$P_0(\alpha_r > t) = P_0(h_{M_r} > t) = \int_r^{\infty} P_0(h_a > t)P_0(M_r \in da)$$
$$= \int_r^{\infty} P_0(h_a > t)\frac{(n-2)r^{n-2}}{a^{n-1}}da.$$

以 §3(10) 代入上式即得证 (i). 其次

$$E_0\alpha_r = \int_0^{\infty} P_0(\alpha_r > t)\,dt = \int_r^{\infty}\left[\int_0^{\infty} P_0(h_a > t)\,dt\right]\frac{(n-2)r^{n-2}}{a^{n-1}}da,$$

但由 (14)

$$\int_0^{\infty} P_0(h_a > t)dt = E_0(h_a) = \frac{a^2}{n}.$$

故

$$E_0\alpha_r = \frac{(n-2)r^{n-2}}{n}\int_r^{\infty}\frac{da}{a^{n-3}} = \frac{n-2}{n(n-4)}r^2. \ \square$$

于是对同一 n, 同一半径 r, 由上式及 (14) 得

$$E_0h_r = \frac{r^2}{n} < E_0T_r = \frac{r^2}{n-2} < E_0\alpha_r = \frac{n-2}{n(n-4)}r^2 < E_0l_r = \frac{r^2}{n-4},$$

其中 $E_0T_r < E_0\alpha_r$ 不是直观上可以预料的. 有关文献见 [25,26].

§11.13 格林 (Green) 函数

(一) 上调和 (superharmonic) 函数 设 $G \subset R^n$ 为一开集，取值于 $(-\infty,\infty]$、但在 G 的任一连通成分中都不恒等于 ∞ 的函数 $f(x)$, $(x \in G)$ 称为在 G 内上调和，如果

1° f 下连续于 G;

2° 对每 $x \in G$, 存在 $\delta > 0$, 使当球 $B_\delta(x) \subset G$ 时，对每 $0 < r < \delta$, 有

$$\int_{S_r(x)} f(y)U_r(dy) \leqslant f(x) \tag{1}$$

U_r 表 $S_r(x)$ 上的均匀分布.

---

[1] 可以证明：当 $r < a \leqslant b$ 时，有

$$P_0(h_a > t, M_r \geqslant b) = P_0(h_0 > t)\cdot P_0(M_r \geqslant b).$$

利用布朗运动，条件 (1) 可改写为

$$E_x f(x_e) \leqslant f(x) \tag{2}$$

e 为 $\overset{\circ}{B}_r(x)$ 的首出时，亦即 $S_r(x)$ 的首中时.

称函数 f 在 G 内下调和 (subhamonic), 如 $-f$ 在 G 内上调和.

显然，常数在 R^n 内上 (下) 调和；在 G 内调和的函数在 G 内上 (下) 调和.

以下皆设 $n \geqslant 3$.

由 §4 例 1, $g(y-x) = c_n/|y-x|^{n-2}$ 作为 y 的函数，在 $R^n \setminus \{x\}$ 调和，在 R^n 为上调和.

容易证明，势 $G\mu(x) = \int g(y-x)\mu(dy)$ 如不恒等于 ∞, 则它在任一开集 D 内为上调和. 实际上，在 §7 定理 2 之证中，已证明 $G\mu(x)$ 下连续. 其次，利用 $g(y-x)$ 的上调和性，有

$$\begin{aligned}\int_{S_r(x)} G\mu(y)U_r(dy) &= \int_{S_r(x)} \int g(z-y)d\mu(z)U_r(dy) \\ &= \iint_{S_r(x)} g(z-y)U_r(dy)d\mu(z) \leqslant \int g(z-x)d\mu(z) = G\mu(x).\end{aligned} \tag{3}$$

由于上调和函数的非负线性组合也上调和，故如 $h(x)$ 为开集 D 中调和函数，则

$$f(x) = G\mu(x) + h(x) \quad (x \in D) \tag{4}$$

也在 D 中为上调和.

有趣的是反面的结果也成立：设 $f(x)$ 在开集 D 内上调和，则 f 可表为

$$f(x) = G_D\mu(x) + h(x), \tag{5}$$

其中 $h(x)$ 在 D 内调和，而且是在 D 内不超过 f 的最大调和函数；$G_D\mu(x)$ 为格林势，即

$$G_D\mu(x) = \int g_D^*(x,y)\mu(dy), \tag{6}$$

其中 $g_D^*(x,y)$ 是下面即将定义的 D 的格林函数，而 μ 为支集含于 D 的 Radon 测度，而且 μ 被 f 唯一决定.

(5) 式称为 f 的 Riesz 分解，它与以下诸结论之证可见文献 [17].

调和函数有很好的解析性质，而上调和函数则不然，甚至连续性也不能保证. 但它却可被很好的函数列所逼近：设 $f(x)$ 在开集 D 内为上调和，D_m 为相对紧开集列，$D_m \uparrow D$, 则存在有界、无穷次可微、在 D_m 为上调和的函数 f_m, 使在 D_m 内，$f_r \geqslant f_m (r > m)$, 而且在 D 内有 $\lim\limits_{m\to\infty} f_m = f$; 如 $f \geqslant 0$, 则也可取 $f_m \geqslant 0$.

上调和函数与极集有下列关系：设 f 在开集 D 内上调和，则 $(x \in D: f(x) = \infty)$ 的每一紧子集是极集；反之，设 D 开，$B \subset D$, B 为极集，又 $x \in D \setminus B$, 则存在于 D 内为上调和的函数 f, 使在 B 上 $f = \infty$, 又 $f(x) < \infty$.(因使 $f(x) = \infty$ 之点 x 通常称为 f 的极点，这也许是极集命名的原因).

称定义在开集 D 内的非负函数 f 为在 D 内过份，如果它在 D 之任一连通成分内不恒等于 ∞, 而且

$$E_x(f(x_t),t<e_D)\leqslant f(x),\quad (\text{任意}t>0);$$
$$\lim_{t\to 0}E(f(x_t),t<e_D)=f(x)\quad (e_D\text{为 }D\text{ 的首出时}).$$

可以证明：设 $f\geqslant 0$, D 为开集，则 f 上调和于 D 的充要条件是它在 D 内过份.

此结果把上调和函数与布朗运动联系起来.

(二) 函数 $g_B(x,y)$ 的性质 对 $B\in\mathcal{B}^n$, $(n\geqslant 3)$, 在 §6 中定义了

$$g_B(x,y)=\int_0^\infty q_B(t,x,y)dt, \tag{7}$$

其中 $q_B(t,x,y)$ 为禁止转移密度. 直观上， $g_B(x,y)dy$ 可理解为自 x 出发在到达 B 之前在 $(y,y+dy)$ 中的平均停留时间. 由 §6(14)

$$\begin{aligned}g(y-x)&=\int_{\overline{B}}H_B(x,dz)g(y-z)+g_B(x,y)\\&=E_xg(y-x(h_B))+g_B(x,y).\end{aligned} \tag{8}$$

上面已叙及 $g(y-x)$ 有关调和的性质，故为研究 $g_B(x,y)$, 只需先研究

$$F_B(x,y)\equiv\int_{\overline{B}}H_B(x,dz)g(y-z)=E_xg(y-x(h_B)). \tag{9}$$

以 $F(x,\cdot)$ 表 $F(x,y)$ 中， x 固定， y 流动.

引理 1 $F_B(x,\cdot)$ 在 R^n 为上调和，在 $(\overline{B})^c$ 调和.

证 由 Fatou 引理

$$\begin{aligned}\varliminf_{y\to a}F_B(x,y)&=\varliminf_{y\to a}\int_{\overline{B}}H_B(x,dz)g(y-z)\geqslant\int_{\overline{B}}H_B(x,dz)\varliminf_{y\to a}g(y-z)\\&\geqslant\int_{\overline{B}}H_B(x,dz)g(a-z)=F_B(x,a).\end{aligned} \tag{10}$$

故 $F_B(x,\cdot)$ 下连续. 次对 $a\in R^n$ 及球 $B_r(a)$, 有

$$\begin{aligned}\int_{S_r(a)}F_B(x,z)U_r(dz)&=\int_{S_r(a)}\int_{\overline{B}}H_B(x,dv)g(z-v)U_r(dz)\\&=\int_{\overline{B}}H_B(x,dv)\int_{S_r(a)}g(z-v)U_r(dz)\leqslant\int_{\overline{B}}H_B(x,dv)g(a-v)=F_B(x,a).\end{aligned} \tag{11}$$

此得证第一结论. 下证在 $(\overline{B})^c$ 之调和性.

先证在 $a\overline{\in}\overline{B}$, $F_B(x,\cdot)$ 有球面平均性. 取 $S_r(a)\subset(\overline{B})^c$, 推理如 (11), 但 (11) 中不等号应为等号，此因 $g(\cdot-v)$ 在 $R^n\setminus\{v\}$ 为调和，而 $v\in\overline{B}$, 故它在 $(\overline{B})^c$ 调和. 再证 $F_B(x,\cdot)$ 的局部可积性. 由于 $\overline{B}$ 闭，当 $z\in\overline{B}$ 而 y 属于紧集 $K\subset(\overline{B})^c$ 时， $g(y-z)$ 对 z 有界；由 (9)$F_B(x,y)$ 对 $y\in K$ 也有界，从而它在 $(\overline{B})^c$ 局部可积. 于是由 §4 定理 2, $F(x,\cdot)$ 在 $(\overline{B})^c$ 调和. □

引理 2 设 G_m 及 G 皆开，又

$$G_1 \subset \overline{G}_1 \subset G_2 \subset \overline{G}_2 \subset \cdots, \ \bigcup_m G_m = G. \tag{12}$$

则对 $x \in G, y \in G$, 有

$$\lim_{m\to\infty} F_{G_m^c}(x,y) = F_{G^c}(x,y). \tag{13}$$

证 当 m 充分大时， $x \in G_m, y \in G_m$,

$$\begin{aligned} F_{G_m^c}(x,y) &= E_x g(y - x(h_{G_m^c})) = E_x g(y - x(h_{\partial G_m})) \\ &= E_x[g(y - x(h_{\partial G_m})); h_{\partial G} < \infty] + E_x[g(y - x(h_{\partial G_m}); \ h_{\partial G} = \infty]. \end{aligned} \tag{14}$$

注意 $x(h_{\partial G_m}) \in G_m^c$; 当 $y \in G_m$ 固定时， $g(y-z)$ 对 $z \in G_m^c$ 有界连续；又在 $h_{\partial G} < \infty$ 上，由 §6 引理 2, 对 $x \in G$, P_x 几乎处处有 $x(h_{\partial G_m}) \to x(h_{\partial G})$. 由于这些原因， (14) 中最右方的第一项趋于

$$E_x[g(y - x(h_{\partial G})); k_{\partial G} < \infty] = E_x[g(y - x(h_{G^c})); h_{G^c} < \infty] = F_{G^c}(x,y). \tag{15}$$

在 $h_{\partial G} = \infty$ 上， $P_x(x \in G)$ 几乎处处有 $h_{\partial G_m} \uparrow \infty$,

$$\lim_{m\to\infty} |x(h_{\partial G_m})| = \infty;$$

再注意 $\lim\limits_{|x|\to\infty} g(y-x) = 0$, 并利用控制收敛定理，知右方第二项趋于 0. □

关于 $g_B(x,y)$ 的性质，在 §6 中已有叙述，今再补充如下：

(i) $g_B(x,y) < \infty, (x \neq y)$; $g_B(x,x) = \infty$, $x \overline{\in} \overline{B}$.

事实上，由 $q_B(t,x,y) \leqslant p(t,x,y)$ 得

$$g_B(x,y) \leqslant g(x,y) < \infty \quad (x \neq y).$$

次如 $x \overline{\in} \overline{B}$, 由 (8)

$$g_B(x,x) = g(0) - \int_{\overline{B}} H_B(x,dz) g(x-z),$$

$g(0) = \infty$; 又当 $x \overline{\in} \overline{B}$ 时， $g(x-z)$ 对 $z \in \overline{B}$ 有界连续，故上式中积分有穷，于是 $g_B(x,x) = \infty$.

由 (8) 及引理 1, 立得

(ii) $g_B(x,\cdot)$ 上连续，在 $R^n \setminus \{x\}$ 为下调和.

(iii) $g_B(x,y)$ 对 $y \in (\overline{B})^c \setminus \{x\}$ 调和.

(iv) $g_B(x,y) - g(y-x)$ 对 $y \in (\overline{B})^c$ 调和.

(v) 如 $a \in B^r$, $\lim\limits_{y\to a} g_B(x,y) = g_B(x,a) = 0$.

事实上，由 (ii) 及 §6,7)

$$0 \leqslant \overline{\lim_{y\to a}}\, g_B(x,y) \leqslant g_B(x,a) = 0.$$

(三) **格林函数** 设 G 为非空开集，定义在 $G \times G$ 上的非负函数 $g_G^*(x,y)$ 称为 G 的格林函数，如果

1) $g_G^*(x,y)-g(y-x)$ 对 y 在 G 内调和；

2) 若另一 $u(x,y)\geqslant 0(x\in G,y\in G)$ 也使 $u(x,y)-g(y-x)$ 对 y 在 G 内调和，则

$$u(x,y)\geqslant g_G^*(x,y). \tag{16}$$

下定理是布朗运动与势论间的一重要联系.

定理 1 开集 G 的格林函数 g_G^* 等于 g_{G^c} 在 $G\times G$ 上的限制，即

$$g_G^*(x,y)=g_{G^c}(x,y)\quad (x\in G,y\in G). \tag{17}$$

证 1° 由性质 (iv) 立得证 $g_{G^c}(x,y)$ 满足 1).

2° 任取一个满足 2) 中条件的 $u(x,y)$, 往证

$$u(x,y)\geqslant g_{G^c}(x,y)\quad (x\in G,\ y\in G). \tag{18}$$

先设 G 有界而且 $\partial G\subset (G^c)^r$. 由 (v), 对 $a\in\partial G$

$$\varliminf_{y\to a}[u(x,y)-g_{G^c}(x,y)]=\varliminf_{y\to a}u(x,y)\geqslant 0.$$

由 (iv), 既然

$$u(x,y)-g_{G^c}(x,y)=[u(x,y)-g(y-x)]-[g_{G^c}(x,y)-g(y-x)]$$

对 $y\in G$ 调和，故由 §4 极大原理，即得 (18).

3° 设 G 为任意开集. 由 §6 引理 2, 存在有界开集列 $\{G_m\}$, 使

$$G_m\subset G,\ G_1\subset\overline{G}_1\subset G_2\subset\overline{G}_2\subset\cdots,\ \bigcup_m G_m=G,$$

而且 $\partial G_m\subset (G_m^c)^r$. 由于 G_m 有界，由 2° 有

$$u(x,y)\geqslant g_{G_m^c}(x,y)\quad (x\in G_m,y\in G_m). \tag{19}$$

因此，如能证 $g_{G_m^c}(x,y)\to g_{G^c}(x,y)$, $(x\in G,y\in G)$, 则 (18) 成立而定理证完.

为此，先设 $x=y\in G$. 对充分大的 m, $x=y\in G_m$. 由 (i)

$$\infty=g_{G_m^c}(x,x)\uparrow g_{G^c}(x,x)=\infty.$$

次设 $x\in G,y\in G,x\neq y$. 对充分大的 m, $y\in G_m$. 由 (8)

$$g_{G_m^c}(x,y)=g(y-x)-F_{G_m^c}(x,y),$$
$$g_{G^c}(x,y)=g(y-x)-F_{G^c}(x,y).$$

由此及引理 2 即得所欲证. □

作为用概率方法求格林函数之例，考虑开球 $G=\mathring{B}_r$, 试证它的格林函数为

$$g_G^*(x,y)=g(y-x)-\left(\frac{r}{|y|}\right)^{n-2}g(y^*-x),\ (n\geqslant 3), \tag{20}$$

其中 $x \in G, 0 \neq y \in G$, 又 y^* 由 y 经 Kelvin 变换 (相对于圆周 S_r 的反演) 而来，即

$$y^* = r^2 y/|y|^2 \quad (y \neq 0). \tag{21}$$

实际上，由定理 1 及 (8)

$$g_G^*(x,y) = g(y-x) - E_x g(y - x(h_{G^c})). \tag{22}$$

设 $z = x(h_{G^c}) \in S_r$. 利用关系式： $z \in S_r$, 有

$$|z - y^*|/|z-y| = r/|y|, \quad (y \neq 0),$$

得

$$g(y-x) = \frac{c_n}{|y-z|^{n-2}} = \left(\frac{r}{|y|}\right)^{n-2} g(y^* - z).$$

由于 $g(y^* - x)$ 对 $x \in R^n - \{y^*\}$ 调和，由 §4(5)

$$E_x g(y - x(h_{G^c})) = \left(\frac{r}{|y|}\right)^{n-2} E_x g(y^* - x(h_{G^c})) = \left(\frac{r}{|y|}\right)^{n-2} g(y^* - x).$$

由此及 (22) 即得 (20).

同理可证 $G = (B_r)^c$ 的格林函数也由 (20) 给出.

第十二章　二维布朗运动与对数位势

§12.1　对数位势的基本公式

(一)　对于一、二维布朗运动，$g(x,y)=\infty$(见 §11.2,(8)), 故需考虑另一势核 $k(x,y)$; 结果发现，$k(x,y)$ 是对数函数，由它而建立对数位势. 对数势与牛顿势的理论在许多问题上是平行的.

本章中无特别声明时，恒设 $n=2$. 仍令

$$g^{\lambda}(x)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}p(t,x)dt,\quad p(t,x)=\frac{1}{2\pi t}e^{-|x|^2/2t}.$$

任意固定一点 $u\in R^2$, 使 $|u|=1$.(例如，可取 $u=(1,0)$). 对任意 $x\in R^2,y\in R^2$, 定义

$$k^{\lambda}(x)=g^{\lambda}(u)-g^{\lambda}(x);\quad k^{\lambda}(x,y)=k^{\lambda}(y-x). \tag{1}$$

显见 $k^{\lambda}(x,y)=k^{\lambda}(y,x)$, 又

$$k^{\lambda}(x)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}[p(t,u)-p(t,x)]\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}(e^{-1/2t}-e^{-|x|^2/2t})\frac{dt}{t}. \tag{2}$$

由此知

$$k^{\lambda}(x)\begin{cases}=0, & \text{如}|x|=1;\\ >0, & \text{如}|x|>1,\ \text{此时 } k^{\lambda}(x)\ \text{随}\ \lambda\downarrow 0\ \text{而上升};\\ <0, & \text{如}|x|<1,\ \text{此时 } k^{\lambda}(x)\ \text{随}\ \lambda\downarrow 0\ \text{而下降}.\end{cases} \tag{3}$$

于是存在极限

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}k^{\lambda}(x)\equiv k(x). \tag{4}$$

这收敛性具有下列性质：

1) 单调性：当 $\lambda\downarrow 0$ 时

$$k^{\lambda}(x)\uparrow k(x),\quad \text{如}|x|\geqslant 1;$$
$$-k^{\lambda}(x)\uparrow -k(x),\quad \text{如}|x|\leqslant 1.$$

2) $k^{\lambda}(x)$ 及 $k(x)$ 在 $x\neq 0$ 连续 (这由下面 $k(x)$ 的表达式可见), 故在不含 0 的紧集上，收敛是均匀的.

现在来求 $k(x)$. 交换积分次序，得

$$\begin{aligned}k(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}(e^{-1/2t}-e^{-|x|^2/2t})\frac{dt}{t}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}(e^{-t}-e^{-|x|^2t})\frac{dt}{t}\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_t^{|x|^2t}e^{-s}\,ds\right)\frac{dt}{t}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\chi_{[t,|x|^2t]}(s)\frac{dt}{t}\right)e^{-s}ds\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{s/|x|^2}^{s}\frac{dt}{t}\right]e^{-s}\,ds,\end{aligned} \tag{5}$$

故

$$k(x)=\frac{1}{\pi}\log|x|,\quad (x\in R^2), \tag{6}$$

$$k(x,y)=\lim_{\lambda\downarrow 0}k^\lambda(x,y)=\frac{1}{\pi}\log|x-y|,\quad (x,y\in R^2). \tag{7}$$

称 $k(x,y)(=k(y-x)=k(x-y))$ 为对数势的核.

对 $B\in\mathcal{B}^2$, 由 §11.6, (6)

$$E_x e^{-\lambda h_B}=H_B^\lambda(x,\overline{B}), \tag{8}$$

$$g^\lambda(u)=\int_{\overline{B}}H_B^\lambda(x,dz)g^\lambda(u)+g^\lambda(u)[1-E_x e^{-\lambda h_B}]. \tag{9}$$

又首次通过公式的拉氏变换为

$$g^\lambda(y-x)=\int_{\overline{B}}H_B^\lambda(x,dz)g^\lambda(y-z)+g_B^\lambda(x,y). \tag{10}$$

自 (10) 减去 (9), 得

$$k^\lambda(y-x)=\int_{\overline{B}}H_B^\lambda(x,dz)k^\lambda(y-z)-g_B^\lambda(x,y)+L_B^\lambda(x),\quad (x,y\in R^2), \tag{11}$$

其中

$$L_B^\lambda(x)=g^\lambda(u)[1-E_x e^{-\lambda h_B}]. \tag{12}$$

显然, $L_B^\lambda(x)\geqslant 0$, 而且当 $x\in B^r$ 时, $L_B^\lambda(x)=0$. 本节的主要目的是证明: 如 B 非极集, 则可在 (11) 中令 $\lambda\downarrow 0$ 而得下列 (13) 式, 称它为 **对数势的基本公式**.

定理 1 设 B 为非极集. 则

i) $g_B(x,y)<\infty$, $(x\neq y)$;

ii) 存在极限 $\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}L_B^\lambda(x))=L_B(x)<\infty$, $(x\in R^2)$;

iii) 对 $x\neq y$, 有

$$k(y-x)=\int_{\overline{B}}H_B(x,dz)k(y-z)-g_B(x,y)+L_B(x). \tag{13}$$

为了证明, 须先证若干引理. 我们先作一些说明. 要在积分号下取极限, 可以用单调收敛定理或被积函数列在紧集上的均匀收敛性. 因此, 我们先对相对紧集证明定理 1, 然后考虑一般的 B. 对 $A\in\mathcal{B}^n$, 令

$$g_B^\lambda(x,A)=\int_A g_B^\lambda(x,y)\,dy,\quad (\lambda\geqslant 0). \tag{14}$$

引理 1 设 $B\in\mathcal{B}^n$ $(n\geqslant 1)$ 为非极集, 又 A 为相对紧集, 则

$$g_B^\lambda(x,A)\uparrow g_B(x,A)=E_x\int_0^{h_B}\chi_A(x_t)\,dt,\ (\lambda\downarrow 0); \tag{15}$$

$$\sup_{x\in R^n}E_x\int_0^{h_B}\chi_A(x_t)\,dt<\infty. \tag{16}$$

证 由单调收敛定理及

$$g_{B}^{\lambda}(x,A)=\int_{A}\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda t}q_{B}(t,x,y)\,dtdy=\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda t}P_x(h_B>t,x_t\in A)\,dt,$$

即得 (15) 中前式. 又

$$g_{B}(x,A)=\int_{0}^{\infty}P_x(h_B>t,x_t\in A)\,dt=E_x\int_{0}^{h_B}\chi_{A}(x_t)\,dt.$$

设 $n\geqslant 3$. 取球 $B_r\supset A$. 由 §11.1 引理 2, 知

$$g_{B}(x,A)\leqslant\int_{0}^{\infty}P_x(x_t\in A)\,dt\leqslant\int_{0}^{\infty}\int_{B_r}p(t,x,y)dydt=\int_{B_r}\frac{c_n}{|x-y|^{n-2}}dy<A_n,$$

其中 c_n,A_n 为常数, 故此时 (16) 成立.

今设 $n\leqslant 2$. 任取 $a\in R^2$, 必存在 $t_0>1$ 使

$$P_a(x_s\in B,\ 对某s\in(1,t_0))=\int p(1,y-a)P_y(h_B\leqslant t_0-1)\,dy>0 \tag{17}$$

其中 $\int=\int_{R^2}$. 否则, 如说上式对一切 $t_0>1$ 都为 0, 则

$$\begin{aligned}P_a(h_B<\infty)&=\int p(1,y-a)P_y(h_B<\infty)\,dy\\&=\lim_{t\to\infty}\int P(1,y-a)P_y(h_B\leqslant t-1)dy=0.\end{aligned}$$

故由 §11.6 系 1 知 $P_x(h_B<\infty)\equiv 0$. 此与 B 非极集矛盾.

由 (17), 存在紧集 F, 有正勒贝格测度, 使

$$P_y(h_B\leqslant t_0-1)>0,\quad (y\in F). \tag{18}$$

因 $p(1,x)$ 连续而且严格大于 0, 故 $p(1,y-x)$ 对 $y\in F,x\in A$ 的下确界大于 0. 于是由 (18),

$$\inf_{x\in A}P_x(h_B\leqslant t_0)\geqslant\inf_{x\in A}\int_F p(1,y-x)P_y(h_B\leqslant t_0-1)\,dy=\delta>0, \tag{19}$$

其中 δ 为某正数. 令

$$C=(t:x_t\in A,h_B>t),\quad I_j=[jt_0,(j+1)t_0].$$

定义下标集 $D=(j:I_j\cap C$ 非空). 故如 $j'\in D$, 则必存在 $t\in[j't_0,(j'+1)t_0]$, $t<h_B$, 使 $x_t\in A$. 把 D 排为 $j_1<j_2<\cdots$. 定义时刻 $T_1<T_2<\cdots$:

$T_1=\inf(t:t\in C)$, 如右方集非空, 否则令 $T_1=\infty$;

$T_{n+1}=\inf(t:t\in C;t\geqslant j_nt_0)$, 如右方集非空, 否则令 $T_{n+1}=\infty$.

由定义知, 如 $T_{n+1}<\infty$, 则 T_{n+1} 是 $[j_nt_0,h_B]$ 中首中 A 的时刻. 以 $N(\leqslant\infty)$ 表 D 中元的个

数. 则

$$
\begin{aligned}
&P_x(n < N \leqslant n+2) = P_x(T_n < \infty, T_{n+2} = \infty) \geqslant P_x(T_n < \infty, h_B \leqslant T_n + t_0) \\
&\quad = \int_A P_x(T_n < \infty, X(T_n) \in dz) P_z(h_B \leqslant t_0) \geqslant \delta P_x(T_n < \infty) = \delta P_x(N > n); \\
&P_x(N > n+2) \leqslant (1-\delta) P_x(N > n); \\
&E_x N = \sum_{n=0}^{\infty} P_x(N > n) = \sum_{n=0}^{\infty} P_x(N > 2n) + \sum_{n=1}^{\infty} P_x(N \geqslant 2n+1) < \frac{2}{\delta} < \infty.
\end{aligned}
$$

以 $|C|$ 表 C 的勒贝格测度, 得

$$
\sup_x E_x \int_0^{h_B} \chi_A(x_t)\,dt = \sup_x E_x |C| \leqslant \sup_x E_x \left| \bigcup_{j\in D} I_j \right| = \sup_x t_0 E_x N < \infty. \ \square
$$

注 1 由 §11.6(二), 当 $n=1$ 时, 引理 1 对任意非空的 $B \in \mathcal{B}^1$ 正确.

引理 2 设二可测集 $C \subset B$, 则

$$
g_C(x,y) \geqslant g_B(x,y), \quad (x, y \in R^2). \tag{20}
$$

证 $h_C \geqslant h_B$, 故对任意 $A \in \mathcal{B}^2$, 有

$$
P_x(h_C > t, x_t \in A) = P_x(h_B > t, x_t \in A).
$$

因而

$$
\begin{aligned}
&q_C(t,x,y) \geqslant q_B(t,x,y), \quad (\text{a.e. } y), \qquad\qquad (21)\\
&\int q_C(t-\varepsilon, x, z) p(\varepsilon, y-z)\,dz \geqslant \int q_B(t-\varepsilon, x, z) p(\varepsilon, y-z)\,dz.
\end{aligned}
$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$, 即得知 (21) 对一切 y 成立. 将 (21) 两边对 t 自 0 至 ∞ 积分即得 (20). □

引理 3 设 $B \in \mathcal{B}^2$, 则

$$
\lim_{\lambda \downarrow 0} \int_{\overline{B}} H_B^\lambda(x,dz) k^\lambda(y-z) = \int_{\overline{B}} H_B(x,dz) k(y-z). \tag{22}
$$

证 若 B 为极集, 则 $H_B^\lambda(x,A) = H_B(x,A) = 0 (A \in \mathcal{B}^2)$ 而不须证. 设 B 为非极集. 令 $D = (z:\ |y-z| \leqslant 1)$, 则

$$
\begin{aligned}
&\int_{\overline{B}} H_B^\lambda(x,dz) k^\lambda(y-z) \\
&\quad = E_x e^{-\lambda h_B} k^\lambda(y - x(h_B)) \chi_{D^c}(x(h_B)) - E_x e^{-\lambda h_B} [-k^\lambda(y - x(h_B)) \chi_D(x(h_B))] \\
&\quad = (\text{I}) - (\text{II}), (\text{设})
\end{aligned}
$$

当 $\lambda \downarrow 0$ 时, 由上述单调收敛性, (I),(II) 分别收敛于对应于 $\lambda = 0$ 的类似式 $(k^0(y) \equiv k(y))$, 故得证 (22). □

注 2 如 B 为相对紧集, 则

$$
-\infty < \int_{\overline{B}} H_B(x,dz) k(y-z) < \infty. \tag{23}
$$

(以下简记 $\int_F H_B(x,dz)k(y-z)$ 为 $\int_F$).

实际上,因 $k(y-z)$ 对 $z\in \overline{B}\cap D^c$ 有界,故 $\int_{\overline{B}\cap D^c}$ 有限;其次,当 $\lambda\downarrow 0$ 时, (II)$\uparrow -\int_{\overline{B}\cap D}\leqslant\infty$, 而 (II)$>-\infty$, 故 $-\infty\leqslant\int_{\overline{B}\cap D}<\infty$. 于是 $-\infty\leqslant\int_{\overline{B}}<\infty$; 又由下面引理 4 之证, "$-\infty\leqslant$" 可改为 "$-\infty<$".

引理 4 设 B 为相对紧集, 非极集, 则定理 1 成立.

证 取紧集 A, 使 $A\cap\overline{B}=\phi$ 而且在正勒贝格测度 $|A|$. 将 (11) 二方对 $y\in A$ 积分, 得

$$|A|L_B^\lambda(x)=\int_A k^\lambda(y-x)dy-\int_{\overline{B}}H_B^\lambda(x,dz)\int_A k^\lambda(y-z)dz+g_B^\lambda(x,A). \tag{24}$$

令 $\lambda\downarrow 0$ 而分别考虑各项, 由引理 1,

$$g_B^\lambda(x,A)\uparrow g_B(x,A)<\infty. \tag{25}$$

又由

$$\int_A k^\lambda(y-x)dy=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\cdot\left[\int_A(e^{-1/2t}-e^{-|y-x|^2/2t})dy\right]\frac{dt}{t} \tag{26}$$

及对 $\int_A k(y-x)\,dy$ 之类似展式, 可见

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\int_A k^\lambda(y-x)dy=\int_A k(y-x)dy. \tag{27}$$

在紧集上均匀成立. 因 $\overline{B}$ 紧, 有

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\int_{\overline{B}}H_B^\lambda(x,dz)\int_A k^\lambda(y-x)dy=\int_{\overline{B}}H_B(x,dz)\int_A k(y-x)dy. \tag{28}$$

由 (25),(27),(28) 知 (24) 右方有有限极限, 故存在有限极限

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}L_B^\lambda(x)\equiv L_B(x). \tag{29}$$

再由 (11), 对 $x\neq y$, 知存在有限极限

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\left[-g_B^\lambda(x,y)+\int_{\overline{B}}H_B^\lambda(x,dz)k^\lambda(y-z)\right]=k(y-x)-L_B(x). \tag{30}$$

今 $0\leqslant g_B^\lambda(x,y)\uparrow g_B(x,y)\leqslant\infty$, 而由 (22),(23)

$$-\infty\leqslant\lim_{\lambda\downarrow 0}\int_{\overline{B}}H_B^\lambda(x,dz)k^\lambda(y-z)=\int_{\overline{B}}H_B(x,dz)k(y-z)<\infty.$$

故对 $x\neq y$ 必有

$$g_B(x,y)<\infty;\quad \int_{\overline{B}}H_B(x,dz)k(y-z)>-\infty$$

以及 (13) 成立. □

定理 1 之证. 因 B 非极集, 必有相对紧子集 $A\subset B$ 而且 A 也非极集. 由引理 2 及引理 4,

$$g_B(x,y)\leqslant g_A(x,y)<\infty,\quad (x\neq y). \tag{31}$$

$$L_B^\lambda(x)=g^\lambda(u)[1-E_xe^{-\lambda h_B}]\leqslant g^\lambda(u)[1-E_xe^{-\lambda h_A}]=L_A^\lambda(x),$$

$$0\leqslant\overline{\lim_{\lambda\downarrow 0}}L_B^\lambda(x)\leqslant L_A(x)<\infty. \tag{32}$$

由 (11), 对 $x\neq y$, 存在有限极限

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\left[\int_{\overline{B}}H_B^\lambda(x,dz)k^\lambda(y-z)+L_B^\lambda(x)\right]=k(y-x)+g_B(x,y).$$

由此及 (32),(22), 必存在有限极限

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\int_{\overline{B}}H_B^\lambda(x,dz)k^\lambda(y-z)=\int_{\overline{B}}H_B(x,dz)k(y-z). \tag{33}$$

因而也必存在有限极限

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}L_B^\lambda(x)=L_B(x),\ (x\in R^2), \tag{34}$$

并且 (13) 成立. □

注 3 若 $E_xh_B<\infty$, $(x\in R^2)$, 则有

$$L_B(x)\equiv 0. \tag{35}$$

实际上

$$L_B^\lambda(x)=\lambda g^\lambda(u)E_x\Big(\frac{1-e^{-\lambda h_B}}{\lambda}\Big). \tag{36}$$

当 $\lambda>0$ 充分小时, 括号中函数被 h_B 所控制, 故当 $\lambda\downarrow 0$ 时

$$E_x\Big(\frac{1-e^{-\lambda h_B}}{\lambda}\Big)\to E_xh_B<\infty;\quad \lambda g^\lambda(u)\to 0.$$

故 $L_B(x)\equiv 0$. 特别, 如 B^c 为相对紧集, 则由 §11.3 系 1, 有 $E_xh_B<\infty$ $(x\in R^2)$. 其次, 由 (36) 知

$$L_B^\lambda(x)=0,\quad L_B(x)=0,\ (\text{如}x\in B^r). \tag{37}$$

第三, 如 B 紧, 又 $x\overline{\in}B$, 则由 (36) 知 $L_B^\lambda(x)=L_{\partial B}^\lambda(x)$, 故此时

$$L_B(x)=L_{\partial B}(x). \tag{38}$$

注 4 如 $B\in\mathcal{B}^2$ 为极集, 因而 $P_x(h_B=\infty)\equiv 1$. 由 (36), 令 $\lambda\downarrow 0$, 自然应定义 $L_B(x)\equiv\infty$.

§12.2　平面 Green 函数

(一)　利用 §12.1 定理 1, 容易讨论 $g_B(x,y)$ 的一些性质，其中 $B \in \mathcal{B}^2$ 为非极集. 由 §12.1(13)

$$g_B(x,y) = \int_{\overline{B}} H_B(x,dz)k(y-z) - k(y-x) + L_B(x), \tag{1}$$

$$k(x,y) = \frac{1}{\pi}\log|x-y|. \tag{2}$$

由 §4 例 1, $k(x,y)$ 对 y 在 $R^2-\{x\}$ 中调和，在 R^2 内下调和. 令

$$F_B(x,y) \equiv \int_{\overline{B}} H_B(x,dz)k(y-z) = E_x k(y-x(h_B)). \tag{3}$$

引理 1　函数 $F_B(x,\cdot)$ 在 R^2 为下调和，在 $(\overline{B})^c$ 调和.

此引理的证全同于 §11.13 引理 1 之证，因为 $k(y-z)$ 具有那里对 $g(y-z)$ 所需的相应性质.

定理 1　设 $B \in \mathcal{B}^2$ 非极集，则

(i) $0 \leqslant g_B(x,y) < \infty$,　$(x \neq y)$.

(ii) $g_B(x,y)$ 对 $y \in R^2-\{x\}$ 上连续、下调和.

(iii) $g_B(x,y)$ 对 $y \in (\overline{B})^c-\{x\}$ 调和.

(iv) $g_B(x,y)+k(y-x)$ 对 $y \in (\overline{B})^c$ 调和.

(v) $\lim\limits_{y\to a} g_B(x,y) = g_B(x,a) = 0$, 如 $a \in B^r$.

证　由 §12.1 定理 1 得 (i). 对 $y \in R^2-\{x\}$, $k(x,y)$ 调和，而 $F_B(x,y)$ 下调和，故由 (1) 得 (ii). 同样证明 (iii)(iv). (v) 之证同 §11.13(v) 之证.　□

(二)　称开集 G 为 Green 集，如存在 $G\times G$ 上之函数 $h(x,y)$ 使 $h(x,y)+k(y-x)$ 对 $y\in G$ 调和. 此时说函数 $h(x,y)$ 具有性质 $H(G)$. 如 G 为 Green 集，具有性质 $H(G)$ 的最小函数称为 G 的 Green 函数.

在 §11.13 中已知当 $n \geqslant 3$ 时，任一开集有 Green 函数；而且限制在 $G\times G$ 上的 g_{G^c} 是它的 Green 函数. 下定理表示，对 $n=2$, 只当 G^c 相当"大"(或 G 相当"小") 时，G 才是 Green 集.

定理 2　开集 G 为 Green 集的充要条件是 G^c 为非极集. 这时限制在 $G\times G$ 上的函数 g_{G^c} 是 G 的 Green 函数.

证　充分性：由定理 1(iv), $g_{G^c}(x,y)+k(y-x)$ 对 $y\in G^c$ 调和，故只要证 g_{G^c} 是具有性质 $H(G)$ 的最小函数.

先考虑 G 有界、并且每点 $x\in\partial G$ 对 G^c 规则的情形. 设 h 为任一具 $H(G)$ 的函数，由定理 1(v)

$$\varliminf_{y\to a}[h(x,y)-g_{G^c}(x,y)] = \varliminf_{y\to a} g(x,y) \geqslant 0,\ a\in\partial G\subset(G^c)^r,$$

故由 §11.4 极小原理，$h(x,y) \geqslant g_{G^c}(x,y) \geqslant 0,\ y\in G$.

今考虑任意开集 G. 由 §11.6 引理 2, 存在有界开集列 $\{G_n\}$, 使

$$G_1 \subset \overline{G}_1 \subset G_2 \subset \cdots, \quad \bigcup_n G_n = G;$$

又 ∂G_n 之点对 G_n^c 规则, 而且 $P_x(h_{\partial G_n} \uparrow h_{\partial G}) = 1, (x \in G)$.

由 §1 引理 2, 存在极限 $g^*(x,y)$:

$$g_{G_n^c}(x,y) \uparrow g^*(x,y) \leqslant g_{G^c}(x,y), \tag{4}$$

因 G^c 非极集, $g^*(x,y) \leqslant g_{G^c}(x,y) < \infty, (x \neq y)$. 下证

$$g^*(x,y) = g_{G^c}(x,y). \tag{5}$$

任取可测函数 $f \geqslant 0$. 对 $x \in G$, $P_x(h_{G_n^c} = h_{\partial G_n}) = 1$, $P_x(h_{G^c} = h_{\partial G}) = 1$, ($n$ 充分大), 故 $P_x(h_{G_n^c} \uparrow h_{G^c}) = 1$, 而有

$$E_x \int_0^{h_{G_n^c}} f(x_t)dt \uparrow E_x \int_0^{h_{G^c}} f(x_t)dt = \int_{R^2} g_{G^c}(x,y)f(y)\,dy;$$

另方面, 由单调收敛定理

$$E_x \int_0^{h_{G_n^c}} f(x_t)dt = \int_{R^2} g_{G_n^c}(x,y)f(y)\,dy \uparrow \int_{R^2} g^*(x,y)f(y)\,dy, \tag{6}$$

比较此二式即知 (5) 对 a.e. y 成立. 下证 (5) 对一切 y 也成立.

根据定理 1(iv),$g_{G_n^c}(x,y) + k(y-x)$ 对 $y \in G_n$ 调和; 又 $g_{G_n^c}(x,y) \uparrow g^*(x,y)$, $g^*(x,y) < \infty$, $(x \neq y)$. 故由 Harnack 定理, $g^*(x,y) + k(y-x)$ 对 $y \in G$ 调和, 因而连续. 另方面, 定理 1(iv) 表明 $g_{G^c}(x,y) + k(y-x)$ 对 $y \in G$ 也调和、连续, 故由 (5) 式几乎处处成立即得其对一切 $(x,y) \in G \times G$ 成立. 下面利用此结果以证 g_{G^c} 的最小性.

任取具有性质 $H(G)$ 的函数 $h(x,y), (x,y) \in G \times G$. 因在 G_n 上, h 也有性质 $H(G_n)$, 故由上面对有界开集之证明, 知

$$g_{G_n^c}(x,y) \leqslant h(x,y), \quad (x,y) \in G_n \times G_n.$$

由 (5), 对 $(x,y) \in G \times G$, 有

$$g_{G^c}(x,y) = g^*(x,y) = \lim_{n\to\infty} g_{G_n^c}(x,y) \leqslant h(x,y).$$

必要性: 即要证如 G^c 为极集, 则 G 非 Green 集. 否则, 如说 G 为 Green 集, 则如上所述, 对任一具性质 $H(G)$ 的函数 $h(x,y)$, 有

$$g^*(x,y) \leqslant h(x,y) < \infty, \quad x \neq y. \tag{7}$$

任取不恒为 0 、非负的连续函数 $f(x)$. 因 G^c 为极集, 由二维布朗运动的常返性可见

$$E_x \int_0^{h_{G_n^c}} f(x_t)dt \uparrow E_x \int_0^{h_{G^c}} f(x_t)dt = E_x \int_0^{\infty} f(x_t)dt = \infty,$$

由此与 (6) 得

$$\int_{R^2} g^*(x,y)f(y)dy = \infty.$$

既然 $f(x)$ 任意， $g^*(x,y)=\infty$, a.e. y. 此与 (7) 矛盾. □

§12.3 对 数 势

(一) 设 μ 为有界测度，有紧支集为 C. 函数

$$K\mu(x) \equiv -\int_C k(y-x)\mu(dy) = \frac{1}{\pi}\int_C \log\frac{1}{|y-x|}\mu(dy) \tag{1}$$

称为 μ 的势.

由 §11.4 例 1 知， $-k(y-x)$ 作为 y 的函数，在 $R^2-\{x\}$ 调和，在 R^2 为上调和，故仿照 §11.13 引理 1 之证，知 $K\mu(x)$ 在 R^2 为上调和，在 C^c 为调和.

设 B 为任一相对紧集，但非极集，自 z 出发，其首中点分布记为

$$H_B(z,dy) = P_z(x(h_B)\in dy). \tag{2}$$

令 $B_r=(x:|x|\leqslant r)$, $S_r=(x:|x|=r)$, $r>0$. 取 r 充分大，使 $\mathring{B}_r\supset B$. 以 U_r 表 S_r 上的均匀分布，定义测度 μ_B:

$$\mu_B(dy) = \int_{S_r} H_B(z,dy)U_r(dz). \tag{3}$$

由轨道的连续性及 (3) 可知，如 B 紧，则 $\mu_B=\mu_{\partial B}$.

定理 1 设 B 为相对紧集，非极集，则

$$\lim_{|y|\to\infty} g_B(x,y) = L_B(x), \tag{4}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} g_B(x,y) = L_B(y), \tag{5}$$

又在强收敛意义下，有

$$\lim_{|x|\to\infty} H_B(x,dy) = \mu_B(dy). \tag{6}$$

证 在任意紧集上，对 x 均匀地有

$$k(y-x)-k(y) = \frac{1}{\pi}\log\left|\frac{y-x}{y}\right| \to 0, \quad (|y|\to\infty). \tag{7}$$

由 §1 定理 1, 对 $x\neq y$ 有

$$k(y-x) - \int_{\overline{B}} H_B(x,dz)k(y-x) = -g_B(x,y)+L_B(x). \tag{8}$$

左方对任意紧集中的 x, 均匀地有

$$[k(y-x)-k(y)] - \int_{\overline{B}} H_B(x,dz)[k(y-z)-k(y)] \to 0, \quad (|y|\to\infty).$$

故左边同样地也趋于 0 而得证 (4). 由对称性 $g_B(x,y)=g_B(y,x)$ 得 (5).

由 §11.5(18),

$$H_{S_r}(x,dy)=\frac{|x|^2-r^2}{|y-x|^2}U_r(dy)\quad (x\overline{\in}S_r). \tag{9}$$

仿 §11.8 引理 1 之证，知在测度的强收敛下有

$$\lim_{|x|\to\infty}H_{S_r}(x,dy)=U_r(dy). \tag{10}$$

由强马氏性及 (3), 对 $x\overline{\in}B_r$, 有

$$\begin{aligned}|H_B(x,A)-\mu_B(A)|&=\left|\int_{S_r}H_{S_r}(x,dy)H_B(y,A)-\int_{S_r}U_r(dy)H_B(y,A)\right|\\&\leqslant\int_{S_r}|H_{S_r}(x,dy)-U_r(dy)|.\end{aligned} \tag{11}$$

对一切 $A\in\mathcal{B}^2$ 成立，故由 (10) 知 (6) 在强收敛意义下正确. □

直观地，(10) 式可理解为自 ∞ 出发，首中 S_r(或 B_r) 的点的分布为均匀分布，这与自 0 出发，S_r(或 B_r^c) 的首中点的分布相同. 而 (6) 则表示：自 ∞ 出发，B 的首中点的分布为 μ_B(比较 §11.8(7)). 又 (4) 可理解为：自 x 出发，在首中 B 以前，在 "∞ 远的单位面积的邻域" 中的平均停留时间约为 $L_B(x)$, 对 (5) 也可作类似的解释：自 ∞ 出发，在首中 B 以前，在 y 的单位面积的邻域中的平均停留时间约为 $L_B(y)$.

以后还会看到，在位势论中，应把 μ_B 看成 B 的平衡分布.

定理 2 设 B 为相对紧集，则存在有限极限

$$\lim_{|x|\to\infty}[L_B(x)-k(x)]=R(B), \tag{12}$$

而且 μ_B 的势 K_{μ_B} 满足

$$K\mu_B(x)=R(B)-L_B(x). \tag{13}$$

证 由 §1 定理 1

$$k(y-x)-k(x)-\int_{\overline{B}}H_{\overline{B}}(x,dz)k(y-z)+g_B(x,y)=L_B(x)-K(x). \tag{14}$$

右方与 y 无关. 如 $\overline{B}$ 紧，$y\overline{\in}\overline{B}$, 则 $k(y-z)$ 对 $z\in\overline{B}$ 有界，故由定理 1

$$\lim_{|x|\to\infty}\int_{\overline{B}}H_B(x,dz)k(y-z)=\int_{\overline{B}}\mu_B(dz)k(y-z)=K\mu_B(y).$$

令 $|x|\to\infty$, 由此式及 (5), 得知 (14) 左方趋于 $K\mu_B(y)+L_B(y)$. 因此，(14) 右方也有有限极限，记为 $R(B)$, 即得 (12). 并且

$$K\mu_B(y)+L_B(y)=R(B),\quad (y\overline{\in}\overline{B}).$$

这得证 (13) 对 $x\overline{\in}\overline{B}$ 成立. 下证它对 $x\in\overline{B}$ 也成立.

取 $y \in \overline{B}$. 由 (14) 及 (12)

$$\lim_{|x|\to\infty}\int_{\overline{B}} H_B(x,dz)k(y-z) = L_B(y) - R(B). \tag{15}$$

另方面，取 r 充分大，使开圆 $\overset{\circ}{B}_r \supset \overline{B}$. 当 $|x|>r$ 时，由强马氏性有

$$\int_{\overline{B}} H_B(x,dz)k(y-z) = \int_{S_r} H_{S_r}(x,d\xi)\int_{\overline{B}} H_B(\xi,dz)k(y-z).$$

如能证明 $\int_{\overline{B}} H_B(\xi,dz)k(y-z)$ 对 $|\xi|>r$ 有界，则由定理 1(6) 及上式立得

$$\begin{aligned}\lim_{|x|\to\infty}\int_{\overline{B}} H_B(x,dz)k(y-z) &= \int_{S_r} U_r(d\xi)\int_{\overline{B}} H_B(\xi,dz)k(y-z)\\ &= \int_{\overline{B}} \mu_B(dz)k(y-z) = -K\mu_B(y).\end{aligned} \tag{16}$$

(15)(16) 的右方应相等，故得证 (13) 对 $x\in\overline{B}$ 也成立. 剩下要证当 $y\in\overline{B}$ 时，$\int_{\overline{B}} H_B(\xi,dz)k(y-z)$ 对 $|\xi|>r$ 有界. 为此，改写 (14) 为

$$\int_{\overline{B}} H_{\overline{B}}(\xi,dz)k(y-z) = g_B(\xi,y) + k(y-\xi) - L_B(\xi). \tag{17}$$

因 $\lim\limits_{|\xi|\to\infty}\frac{k(y-\xi)}{k(\xi)}=1$, 故由 (12), 对 $y\in\overline{B}$, 当 $|\xi|>r$, r 充分大后， $k(y-\xi)-L_B(\xi)$ 有界，又由 §2 定理 1(iii),$g_B(\xi,y)$ 对 $y\in\overline{B}$, $|\xi|>r$ 有界. 故 (17) 的右方对 $|\xi|>r$ 有界. 因之其左方也如此. □

对非极集的相对紧集 B, 称测度 μ_B 为 B 的平衡测度，其势 $K\mu_B$ 称为 B 的平衡势，称常数 $R(B)$ 为 B 的 Robin 常数.

如 B 为相对紧的极集，则定义 $R(B)=\infty$. 以后会看到，这样的定义是合理的.

当 B 为紧集时，由于 $\mu_B=\mu_{\partial B}$; $L_B(x)=L_{\partial B}(x)$, $(x\overline{\in}B)$(见 §1(38)), 自 (13) 立得

$$R(B) = R(\partial B). \tag{18}$$

例 1 考虑圆 B_r 及圆周 S_r. 由 (10) 及上所述得二者的平衡测度都是 S_r 上的均匀分布 U_r

$$\mu_{B_r} = \mu_{S_r} = U_r. \tag{19}$$

还可证明

$$L_{B_r}(x) = \begin{cases} 0, & \text{如}|x|\leqslant r,\\ \dfrac{1}{\pi}\log\left(\dfrac{|x|}{r}\right), & \text{如}|x|>r.\end{cases} \tag{20}$$

实际上，如 $|x|\leqslant r$, 由 §1(37) 得 $L_{B_r}(x)=0$. 今设 $|x|>r$, 在对数势的基本公式 (§1(13)) 中，取 $y=0$ 得

$$L_{B_r}(x) = k(-x) + g_{B_r}(x,0) - \int_{B_r} H_{B_r}(x,dz)k(-z). \tag{21}$$

由 §2 定理 1(v),$g_{B_r}(x,0)=0$. 当 $|x|>r$ 时

$$\begin{aligned}\int_{B_r} H_{B_r}(x,dz)k(-z) &= \int_{S_r} H_{S_r}(x,dz)k(-z)\\ &= \int_{S_r} H_{S_r}(x,dz)\frac{1}{\pi}\log r = \frac{1}{\pi}\log r.\end{aligned} \tag{22}$$

于是由 (21) 得

$$L_{B_r}(x) = \frac{1}{\pi}\log\left(\frac{|x|}{r}\right) = L_{S_r}(x), \quad (|x|>r). \tag{23}$$

由 (12)(20) 及 (18), 得 Robin 常数为

$$R(B_r) = \frac{1}{\pi}\log\left(\frac{1}{r}\right) = R(S_r). \tag{24}$$

由 (13),(24),(20), 得平衡势为

$$K\mu_{B_r}(x) = K\mu_{S_r}(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right)\log\left(\frac{1}{|x|\vee r}\right), \tag{25}$$

其中 $a\vee b=\max(a,b)$.

§12.4 平面上的容度

(一) 试研究 Robin 常数的一些性质.

引理 1 设 A,B 为相对紧集，则

$$R(A\cup B)+R(A\cap B)\geqslant R(A)+R(B). \tag{1}$$

又若 $A\subset B$, 则

$$R(A)\geqslant R(B). \tag{2}$$

证 设 $A\subset B$. 如 B 为极集，则 A 必为极集，于是 $R(A)=R(B)=\infty$. 如 B 非极集，A 为极集，则 (2) 显然成立. 如二者皆非极集，由 $L_B^\lambda(x)$ 的定义 (§1,(12)) 以及 $h_A\geqslant h_B$, 得

$$L_B^\lambda(x)\leqslant L_A^\lambda(x);\quad L_B(x)\leqslant L_A(x). \tag{3}$$

于是由 §3(12) 得证 (2).

今证 (1). 只需对 A,B 皆非极集证明. 由于 $h_{A\cup B}=h_A\wedge h_B$, 有 [1]

$$P_x(h_{A\cup B}\leqslant t)\leqslant P_x(h_A\leqslant t)\cup(h_B\leqslant t)), \tag{4}$$

$$\begin{aligned}P_x(h_A\leqslant t,h_B\leqslant t) &= P_x(h_A\leqslant t)+P_x(h_B\leqslant t)-P_x((h_A\leqslant t)\cup(h_B\leqslant t))\\ &\leqslant P_x(h_A\leqslant t)+P_x(h_B\leqslant t)-P_x(h_{A\cup B}\leqslant t).\end{aligned} \tag{5}$$

---

[1] $h_{A\cap B}\geqslant h_A\vee h_B$.

由 §1(12) 得

$$L^\lambda_{A\cap B}(x) \geqslant L^\lambda_A(x) + L^\lambda_B(x) - L^\lambda_{A\cup B}(x). \tag{6}$$

令 $\lambda \downarrow 0$, 得

$$L_{A\cap B}(x) \geqslant L_A(x) + L_B(x) - L_{A\cup B}(x). \tag{7}$$

由 §3(12) 即得 (1). □

定理 1 i) 设 B 为紧集，则

$$R(B) = \sup(R(U): U \text{ 开}, \quad U \supset B, \overline{U} \text{ 紧}). \tag{8}$$

ii) 设 U 为相对紧开集，则

$$R(U) = \inf(R(A) : A \text{ 紧}, A \subset U). \tag{9}$$

证 i) 设 B 紧. 取一列相对紧开集 $\{B_n\}$,

$$B_1 \supset \overline{B}_2 \supset B_2 \supset \cdots, \quad \bigcap_n B_n = \bigcap_n \overline{B}_n = B.$$

由 §11.6 引理 1,

$$P_x(h_{B_n} \uparrow h_B) = 1, \text{ 一切} x \in B^c \cup B^r. \tag{10}$$

先对 B 为极集的情况证明 (8). 此时 $R(B) = \infty$. 只要证 (8) 之右方也等于 ∞. 任取 $f \geqslant 0$; 有紧支集为 D, $D \cap \overline{B}_1 = \phi$; 又 f 在 R^2 上之积分为 1. 令

$$Af(z) = \int k(y-z)f(y)dy = \int_D k(y-z)f(y)\,dy.$$

$\int = \int_{R^2}$. 如 §3 开头时所述， $Af(z)$ 对 $z \in D^c \supset \overline{B}_1$ 连续，故在 B_1 上有界. 从而

$$\left| \int_{\overline{B}_n} H_{B_n}(x, dz)Af(z) \right| \leqslant \sup_{z\in\overline{B}_1} |Af(z)| = M < \infty. \tag{11}$$

由 §3(13), 并注意 $\int f(x)\,dx = 1$,

$$\int K\mu_{B_n}(x)f(x)\,dx + \int L_{B_n}(x)f(x)dx = R(B_n). \tag{12}$$

今欲令 $n \to \infty$, 如能证右方第一积分有界，第二积分上升到 ∞, 则 $R(B_n) \to \infty$ $(n \to \infty)$ 而 (8) 得证. 为此，先有

$$\left| \int K\mu_{B_n}(x)f(x)\,dx \right| \leqslant \left| \int Af(x)\mu_{B_n}(dx) \right| = \left| \int_{\overline{B}_n} Af(x)\mu_{B_n}(dx) \right| \leqslant M < \infty. \tag{13}$$

其次，为证第二积分 $\uparrow \infty$, 只要证 $L_{B_n}(x) \uparrow \infty$.

利用 §1(13) 及 (11), 有

$$\begin{aligned} \left| -\int g_{B_n}(x,y)f(y)\,dy + L_{B_n}(x) \right| &= \left| Af(x) - \int_{\overline{B}_n} H_{B_n}(x,dz)Af(z) \right| \\ &\leqslant |Af(x)| + M < \infty. \end{aligned} \tag{14}$$

但当 $x \in B^c$ 时，由 (10)

$$\int g_{B_n}(x,y)f(y)dy = E_x \int_0^{h_{B_n}} f(x_t)dt \uparrow E_x \int_0^{h_B} f(x_t)dt. \tag{15}$$

因 B 为极集， $P_x(h_B = \infty) \equiv 1$; 利用二维布朗运动的常返性，得

$$E_x \int_0^{h_B} f(x_t)dt = E_x \int_0^{\infty} f(x_t)dt = \infty. \tag{16}$$

在 (14) 中令 $n \to \infty$, 由 (15),(16) 可见 $L_{B_n}(x) \uparrow \infty$.

次对非极集 B 证明 (8). 此时 (12) 仍成立. 又

$$\int K\mu_B(x)f(x)dx + \int L_B(x)f(x)dx = R(B).$$

故为证 $R(B_n) \to R(B)$, 只要证 (12) 左方二积分分别趋于上式左方二积分. 此时由于 $R(B_n) \leqslant R(B_{n+1})$, 故必 $R(B_n) \uparrow R(B)$.

对 $x \in B^c \cup B^r$, 仿 (15),(16), 有

$$\int g_{B_n}(x,y)f(y)dy \uparrow \int g_B(x,y)f(y)dy. \tag{17}$$

因 $P_x(x(h_{B_n}) \in \overline{B}_1) = 1$, $Af(z)$ 在 $\overline{B}_1$ 中连续，故由 (11) 右方及控制收敛定理，得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_{\overline{B}_n} H_{B_n}(x,dz)Af(z) &= \lim_{n\to\infty} E_x Af(x(h_{B_n})) \\ &= E_x Af(x(h_B)) = \int_{\overline{B}} H(x,dz)Af(z).\end{aligned} \tag{18}$$

由 §1(13) 及 (17)(18) 得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} L_{B_n}(x) &= \lim_{n\to\infty}\left[Af(x) - \int_{\overline{B}_n} H_{B_n}(x,dz)Af(z) + \int g_{B_n}(x,y)f(y)dy\right] \\ &= Af(x) - \int_{\overline{B}} H_B(x,dz)Af(z) + \int g_B(x,y)f(y)dy = L_B(x).\end{aligned} \tag{19}$$

而且由 $L_A \geqslant L_B$ (如 $A \subset B$) 知， $L_{B_n}(x) \uparrow L_B(x)$. 又因 $B \cap (B^r)^c$ 的 Lebesgue 测度为 0, 得

$$\begin{aligned}\int L_{B_n}(x)f(x)dx &= \int_{B^c \cup B^r} L_{B_n}(x)f(x)dx \\ &\uparrow \int_{B^c \cup B^r} L_B(x)f(x)dx = \int L_B(x)f(x)dx.\end{aligned} \tag{20}$$

剩下要考虑 (12) 中第一积分. 取圆 $D_r \supset \overline{B}$. 由 §3(3) 及控制收敛定理

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int K\mu_{B_n}(x)f(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{\overline{B}_n} \mu_{B_n}(dx)Af(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\overline{B}_n} \left[\int_{S_r} H_{B_n}(\xi,dx)U_r(d\xi)\right] Af(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{S_r} \left[\int_{\overline{B}_n} Af(x)H_{B_n}(\xi,dx)\right] U_r(d\xi) = \lim_{n\to\infty} \int_{S_r} E_\xi Af(x(h_{B_n}))U_r(d\xi) \\ &= \int_{S_r} E_\xi Af(x(h_B))U_r(d\xi) = \int K\mu_B(x)f(x)dx.\end{aligned}$$

ii) 只需考虑 U 为非极集情形. 仿 §11.6, 可找到紧集 $A_n \subset U, A_1 \subset A_2 \subset \cdots, \bigcup_n A_n = U$, 而且 $P_x(h_{A_n} \downarrow h_U) = 1$. 取紧集 D, 使 $D \cap \overline{U}^c = \phi$. 又取连续函数 $f \geqslant 0$, 有紧支集 D, 又 $\int f(x)dx = 1$. 然后仿上述 i) 中对非极集情况之证, 以 A_n 代 B_n, 以 U 代 B, 以 $\downarrow$ 代 $\uparrow$, 即可得证 (9). □

细看定理 1 的证明 (或稍加修改), 我们实际上已证明了:

系 1 i) 如 B_n 紧, $B_n \downarrow B$, 则对 $x \in B^r \cup B^c$, $L_{B_n}(x) \uparrow L_B(x)$; $R(B_n) \uparrow R(B)$.

ii) 如 B_n 紧, $B_n \uparrow B$, B 为相对紧, 则对一切 x, 有 $L_{B_n}(x) \downarrow L_B(x)$; 又 $R(B_n) \downarrow R(B)$.

(二) 以 $\mathbf{C}$ 表 R^2 中全体紧集之集. 定义

$$R^*(c) = -R(c), \quad c \in \mathbf{C}. \tag{21}$$

由 (1)(2) 及定理 1, 知 $R^*(\cdot)$ 是 $\mathbf{C}$ 上的 Choquet 容度 (参看 §11.9). 由容度的扩张定理, 可把 R^* 的定义域扩大到 $\mathcal{B}^2$ 上 (甚至全体解析集上). 使对任意 $B \in \mathcal{B}^2$, 有

$$R^*(B) = \sup(R^*(c): \ c \subset B, c \text{ 紧}) = \inf(R^*(0): \ 0 \supset B, \ 0 \text{ 开}). \tag{22}$$

并且对任意 Borel 集 A, B, 有

$$R^*(A \cup B) + R^*(A \cap B) \leqslant R^*(A) + R^*(B). \tag{23}$$

又若 $A \subset B$, 则

$$R^*(A) \leqslant R^*(B). \tag{24}$$

它们是 (1)(2) 的延拓.

在 §3 中我们已对相对紧集 A 定义了 Robin 常数 $R(A)$. 今证明 $-R(A)$ 与扩张而得的 $R^*(A)$ 相等. 实际上, 对任意紧集 $c \subset A$, 任意相对紧开集 $0 \supset A$, 有 $-R(c) \leqslant -R(A) \leqslant -R(0)$, 故

$$R^*(A) \leqslant -R(A) \leqslant R^*(A),$$

即 $R^*(A) = -R(A)$ 对相对紧集 A 成立.

利用 R^* 的扩张自然得到 Robin 常数的扩张: 对任意 $B \in \mathcal{B}^2$, 定义

$$R(B) = -R^*(B). \tag{25}$$

于是关于 $R^*(B), (B \in \mathcal{B}^2)$ 的结果, 可以通过 $R(B), (R \in \mathcal{B}^2)$ 来表达. 特别, 如 (22) 可改写为:

对任意 $B \in \mathcal{B}^2$, 有

$$\inf\{R(c) : c \subset B, c \text{ 紧}) = R(B) = \sup\{R(0) : 0 \supset B, 0 \text{ 开}\} \tag{26}$$

今对任意 $B \in \mathcal{B}^2$, 定义 B 的容度 $C(B)$ 为

$$C(B) = \exp\{-R(B)\}. \tag{27}$$

例如, 由 §3(24), 圆 B_r 及圆周 S_r 的容度为

$$C(B_r) = C(S_r) = r^{1/\pi}, \quad (r > 0). \tag{28}$$

容度有下列性质：

a) 如 $A \subset B$, 则 $C(A) \leqslant C(B)$.

b) 如 A 紧，则 $C(A) = C(\partial A)$.

c) 如 B_n 紧， $B_n \downarrow B$, 则 $C(B_n) \downarrow C(B)$.

d) 如 B_n 紧， $B_n \uparrow B$, B 相对紧，则 $C(B_n) \uparrow C(B)$.

实际上，由 (24) 得 a). 由 §1(12), 对 $x \bar{\in} A$, 有 $L_A^\lambda(x) = L_{\partial A}^\lambda(x)$, 故 $L_A(x) = L_{\partial A}(x)$. 于是由 §3(12) 得 b). 而 c),d) 则由系 1 推出.

显然， $C(B) = 0$ 等价于 $R(B) = \infty$.

(三) **定理 2** 设 $B \in \mathcal{B}^2$. 则 B 为极集的充要条件是 $C(B) = 0$; 换言之， $P_x(h_B < \infty) \equiv 1$ 或 $\equiv 0$, 视 $C(B) > 0$ 或 $= 0$ 而定.

证 如 B 为相对紧集，由 $R(B)$ 的定义及 §3 定理 2, 知 $R(B) = \infty$ 与 B 为极集等价. 以下设 B 为非相对紧集. 设 $R(B) = \infty$. 由 (26) 知， $R(c) = \infty$ 对紧集 $c \subset B$ 成立；再由 (26), $R(D) = \infty$ 对相对紧集 $D \subset B$ 也成立，于是由上所证知 D 为极集. 由于 B 可表为可列多个相对紧集之和，故 B 为极集. 反之，设 B 为极集，则 B 的每个紧子集 c 为极集，由上所证 $R(c) = \infty$. 再由 (26) 得 $R(B) = \infty$. □

与 §11.11 定理 5 相应，有

定理 3 设 B 为相对紧集，则 B 为极集的充要条件是

$$\sup_x K\mu(x) = \infty, \tag{29}$$

其中 μ 为任意非 0 有限测度，支集含于 B.

证 任取相对紧开集 $A \supset \overline{B}$. 对 $N > 0$, 定义

$$k_N(x) = \begin{cases} k(x), & \text{如} k(x) \geqslant -N; \\ -N, & \text{如} k(x) < -N. \end{cases}$$

则有

$$-\int \mu(dx) \int k_N(y-x)\mu_A(dy) = -\int \mu_A(dy) \int k_N(y-x)\mu(dx).$$

令 $N \uparrow \infty$, 由单调收敛定理

$$\int_{\overline{B}} \mu(dx) K\mu_A(x) = \int_{\overline{A}} \mu_A(dx) K\mu(x). \tag{30}$$

由 §1(12), 如 $x \in \overset{\circ}{B}$, 则 $L_B^\lambda(x) = L_B(x) = 0$. 因 $\overline{B} \subset A$, 由 §3(13), 左方等于

$$\int_{\overline{B}} R(A)\mu(dx) - \int_{\overline{B}} L_A(x)\mu(dx) = R(A)\mu(\overline{B}).$$

据此式及 (30), 得

$$R(A)\mu(\overline{B}) \leqslant \sup_x K\mu(x) \cdot \mu_A(\overline{A}) = \sup_x K\mu(x).$$

由 (26)

$$R(B)\mu(\overline{B}) \leqslant \sup_x K\mu(x).$$

今如 B 为极集，则 $R(B)=\infty$，故 $\sup\limits_x K\mu(x)=\infty$.

反之，设 $\sup\limits_x K\mu(x)=\infty$ 对满足定理条件的一切 μ 成立，则 B 必为极集. 否则，如说 B 非极集，即 $R(B)<\infty$; 取 B 的平衡测度 μ_B，它满足定理条件. 但由 §3(13)

$$K\mu_B(x)\leqslant R(B)<\infty,\quad 一切x.$$

此与假设矛盾. □

§12.5 补 充

(一) M. Brelot 认为：势论中有三大问题： Dirichlet 问题、 Balayage 问题与平衡问题. 在牛顿势与对数势的情况，我们对这些问题作了简要论述，阐明了它们与布朗运动的关系以及其概率解法. 但势论中还有许多问题，如可加泛函、能、Martin 边界等，则未涉及.

(二) 牛顿势的一般化是格林 (green) 势. 设 D 为 $R^n(n\geqslant 3)$ 中的开集，其格林函数为 $G_D^*(x,y),(x,y\in D)$. 如 $D=R^n$, $G_D^*(x,y)$ 等于牛顿势核 $g(y-x)$. 在一般情况，可以仿照牛顿势而在 D 上建立格林势：

$$G_D\mu(x)=\int G_D^*(x,y)\mu(dy),\quad (\text{supp}\mu\subset D).$$

它所对应的过程是首出 D 以前的布朗运动 $\{x_t(\omega),t<e_D\}$, e_D 为 D 的首出时. 于是也可以研究格林势的平衡问题等等.

(三) 受布朗运动的启发， Hunt 等发展了一般马氏过程 (主要是所谓 Hunt 过程) 与势论的联系. 为此，必须给出 "势论" 的一般定义；讨论那些可以用马氏过程的术语来表达的势论对象和运算. 例如，联系于每一马氏过程有它的 "调和函数""过份函数", 当此过程为布朗运动时，它们就分别化为本书中的调和函数与非负上调和函数.

主要参考文章为 [15,16]; 关于上述发展可见文献 [11,1,8,17,18] 以及新近的有关文献.

参 考 文 献

[1] Blumenthal, R. M. and Getoor, R. K., Markov Processes and Potential Theory, 1968.

[2] Burkholder, D. L., Brownian motion and classical analysis, Proceedings of Symp. in Pure Mathmatics, Probability, 31(1977), 5-14.

[2₁] Burkholder, D. L., *Exit times of Brownian motion, harmonic majorization and Hardy Spaces*, Adv. in Math., 26(1977), 182-205.

[3] Chung, K. L., *Probabilistic approach in potential theory to the equilibrium problem*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 23:3(1973), 313-322.

[4] Ciesielski, Z. and Taylor, S. J., *First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the Sample path*, Trans. Amer. Math. Soc., 103(1962), 434-50.

[5] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Теория случайных процессов, Том. 2, 1973.

[6] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of Mathematical Physics, 2(1962). (有中译本).

[7] Doob, J. L., *Semimartinggales and subharmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 77(1954), 86-121.

[8] Dynkin, E. B., Markov Processes, 1965.

[9] Friedman, A., Stochastic Differential Equations and Applications, 1975.

[10] Getoor, R. K., *The Brownian escape process*, Ann. of Probability, 7:5(1979), 864-867.

[10_1] Getoor, R. K., Sharpe, M. J. , *Excursions of Brownian motions and Bessel processes*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 47:1(1979) 83-106.

[11] Hunt, G. A., *Markoff processes and potentials*, I, II, III, Illinois J. Math., 1(1957), 44-93; 316-69; 2(1958), 151-213.

[12] Itô, K., and Mckean, H. P., Diffusion Processes and Their Sample Path, 1965.

[13] Kakutani, S., *Two-dimensional Brownian motion and harmonic functions*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 20(1944), 706-714.

[14] Kaar, A. F. and Pittenger, A. O., *An inverse Balayage problem for Brownian motion*, Ann. of Probability, 7:1(1979), 186-191.

[15] Port, S. and Stone, C., *Classical potential theory and Brownian motion*, Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. and Probability, 143-176, (1972).

[16] Port, S. and Stone, C., *Logarithmic potential and planar Brownian motion*, Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. and Probability, 177-192, (1972).

[17] Port, S. C. and Stone, C. J., Brownian Motion and Classical Potential Theory, 1978.

[18] Rao, M., Brownian Motion and Classical Potential Theory, 1977.

[19] Spitzer, F. L., *Electrostatic capacity, heat flow, and Brownian motion*, Z. Wahrscheinlichkeitheorie, 3(1964), 110-121.

[20] Тихонов А. Н. Самарский А. А., Уравнения Математической Физики 1953.

[21] 王梓坤，布朗运动的末遇分布与极大游程，中国科学， 10(1980), 933-940.

[22] 王梓坤，对称稳定过程与布朗运动的随机波，中国科学， 12(1982), 801-806.

[23] Дынкин, Е. Б., Основахия Теории Марковских Процессов, 1962. (有中译本：马尔科夫过程论基础).

[24] La Vallée Poussin, CH. J. De, Léxtension de la médode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet, Ann. Inst. H. Poincaré, 2(1932), 169-232.

[25] 吴荣， d 维布朗运动末离时的分布，科学通报， 11(1984), 647-650.

[26] 周性伟，吴荣，关于布朗运动的某些极值定理，中国科学， A 辑， 2(1983), 128-133.

[27] Wang Zikun (王梓坤), *The joint distributions of first hitting and last exit for Brownian Motion*, Chinese Science Bulletin, 40:6 (1995), 451–457.

第十三章 马尔科夫链的解析理论

§13.1 可测转移矩阵的一般性质

(一) 设 $p_{ij}(t)$ $(i,j\in E, t\geqslant 0)$ 是齐次转移函数，如上章所述，它是满足下列条件的实值函数：

(A) $p_{ij}(t)\geqslant 0$;

(B) $\sum\limits_j p_{ij}(t)=1$;

(C) $p_{ij}(s+t)=\sum\limits_k p_{ik}(s)p_{kj}(t)$;

(D) [1] $p_{ij}(0)=\delta_{ij}$.

为了研究转移函数的解析性质，需要对它逐步地补加条件，以下简记 $(p_{ij}(t))$ 为 (p_{ij}) 或 $P(t)$.

称转移矩阵 (p_{ij}) 为 **可测的**, 如果它的每一元 $p_{ij}(t)$ 是 $t\in(0,\infty)$ 的 Lebesgue 可测函数.

可测性条件导致深远的后果. 下定理表示，可测性等价于每 $p_{ij}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上的连续性，也等价于每 $p_{ij}(t)$ 在 0 点存在极限 $\lim\limits_{t\to 0+}p_{ij}(t)$.

定理 1 对任意转移矩阵 (p_{ij}), 下列五条件等价：

1° (p_{ij}) 可测；

2° 对任意固定的 $a>0$,

$$\lim_{h\to 0+}\sup_{t\geqslant a}\sum_j|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|=0 \tag{1}$$

3° 对任意固定的 $a>0$, 每个 $p_{ij}(t)$ 对 $t\in(a,\infty)$ 一致连续，而且这一致性对 j 也成立；精确地说，对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta(=\delta(a))>0$, 当 $|h|<\delta$ 时有

$$|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|<\varepsilon \quad (\text{一切}\ \ t\geqslant\delta, j\in E)$$

4° 每 $p_{ij}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 连续；

5° 对任意 $i,j\in E$, 存在极限

$$\lim_{t\to 0+}p_{ij}(t)=u_{ij}$$

而且极限矩阵 $U=(u_{ij})$ 具有下列性质

(a) $U\geqslant \mathbf{0}$ $(u_{ij}\geqslant 0)$;

(b) $UI\leqslant I$ $\left(\sum\limits_j u_{ij}\leqslant 1\right)$;

(c) $U=U^2$ $\left(u_{ij}=\sum\limits_k u_{ik}u_{kj}\right)$,

其中 $\mathbf{0}$ 表示元皆为 0 的矩阵，而 I 表单位直行矢量 (其元皆为 1).

---

[1] 如只讨论 $P(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上的性质，则条件 (D) 可不考虑.

证 $1^\circ \to 2^\circ$: 由 (C) 及 (B), 对 $0 \leqslant s < t$, 有

$$
\begin{aligned}
\sum_j |p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| &= \sum_j \Big| \sum_k [p_{ik}(s+h) - p_{ik}(s)] p_{kj}(t-s) \Big| \\
&\leqslant \sum_k |p_{ik}(s+h) - p_{ik}(s)| \sum_j p_{kj}(t-s) \\
&= \sum_k |p_{ik}(s+h) - p_{ik}(s)| \qquad (2)
\end{aligned}
$$

这说明级数的和 $\sum\limits_j |p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)|$ 是 t 的不增函数. 由可测性, 如 $t \geqslant a$, 可将 (2) 双方对 s 自 0 积分到 a 而得

$$
\sum_j |p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| \leqslant \sum_k \frac{1}{a} \int_0^a |p_{ik}(s+h) - p_{ik}(s)|\, ds
$$

既然右方与 t 无关, 故

$$
\sup_{t \geqslant a} \sum_j |p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| \leqslant \sum_k \frac{1}{a} \int_0^a |p_{ik}(s+h) - p_{ik}(s)|\, ds \qquad (3)
$$

如 $0 < h < a$, 则 (3) 的右方级数被收敛级数 $\frac{2}{a} \sum\limits_k \int_0^{2a} p_{ik}(s)\, ds$ 所控制, 故可在求和号下对 h 取极限. 因此, 如能证明

$$
\lim_{h \to 0+} \int_0^a |p_{ik}(s+h) - p_{ik}(s)|\, ds = 0 \qquad (4)
$$

则在 (3) 中令 $h \to 0+$ 后即得证 (1).

由实变函数论中 Лузин 定理, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在有界连续函数 $g_{ik}(s)$, 满足

$$
L(A) < \frac{\varepsilon}{8}, \quad A = (s:\ 0 \leqslant s \leqslant 2a,\ g_{ik}(s) \neq p_{ik}(s))
$$

其中 L 表 Lebesgue 测度, 对 $0 \leqslant h \leqslant a$, 令

$$
B = (s:\ 0 \leqslant s \leqslant a,\ g_{ik}(s+h) \neq p_{ik}(s+h))
$$

如 $s \in B$ 就有 $s + h \in A$, 所以 $L(B) \leqslant L(A)$, 故

$$
\begin{aligned}
\int_0^a |p_{ik}(s+h) - p_{ik}(s)|\, ds &\leqslant \int_{(0,a)\overline{AB}} |g_{ik}(s+h) - g_{ik}(s)|\, ds \\
&+ \int_{(0,a)A} |p_{ik}(s+h) - p_{ik}(s)|\, ds + \int_{(0,a)B} |p_{ik}(s+h) - p_{ik}(s)|\, ds
\end{aligned}
$$

由 $g_{ik}(s)$ 的有界连续性, 当 h 充分小时, 右方第一积分小于 $\frac{\varepsilon}{2}$; 第二积分不大于 $2L(A) < \frac{\varepsilon}{4}$; 第三积分不大于 $2L(B) \leqslant 2L(A) < \frac{\varepsilon}{4}$, 这得证 (4).

$2^\circ \to 3^\circ \to 4^\circ$: 显然.

$4^\circ \to 5^\circ$: 设

$$
U = \lim_{t_n \to 0+} P(t_n), \quad V = \lim_{s_n \to 0+} P(s_n)
$$

是任二极限矩阵，上二式中的收敛表逐元收敛．改写 (C) 为矩阵的形式

$$P(s+t)=P(s)P(t) \tag{5}$$

在 (5) 中令 t 沿 $t_n\to 0+$，利用 4° 及控制收敛定理，再改写 s 为 t 后得

$$P(t)=P(t)U \tag{6}$$

此式中第 i 横行之和为

$$1=\sum_k p_{ik}(t)=\sum_j p_{ij}(t)\cdot\sum_k u_{jk} \tag{7}$$

由 (B) 显然 $\sum\limits_k u_{jk}\leqslant 1$．如对某 j，$\sum\limits_k u_{jk}<1$，则由 (7) 对此 j 有 $p_{ij}(t)=0(t>0)$，从而 $u_{ij}=v_{ij}=0$．在 (6) 中令 t 沿 $s_n\to 0+$，利用 Fatou 引理得

$$v_{ik}\geqslant\sum_j v_{ij}u_{jk} \tag{8}$$

对 k 求和，并注意刚才所证的结果：如 $\sum\limits_k u_{jk}<1$ 则 $v_{ij}=0$，可见 (8) 式双方对 k 求和后都等于 $\sum\limits_k v_{ik}$，因此 (8) 中必取等式，亦即有

$$V=VU \tag{9}$$

另方面，在 (5) 中令 s 沿 $s_n\to 0+$，由 Fatou 引理得

$$P(t)\geqslant VP(t) \tag{10}$$

于 (10) 中令 t 沿 $t_n\to 0+$，我们有

$$U\geqslant VU \tag{11}$$

比较 (9),(11) 得 $U\geqslant V$；由对称性 $V\geqslant U$．于是 $U=V$ 而得证极限的存在．由此及 (9) 得证 (c)．(a) 与 (b) 则分别由 (A),(B) 而显然．

5° → 1°：由

$$\lim_{h\to 0+}p_{ij}(t+h)=\lim_{h\to 0+}\sum_k p_{ik}(t)p_{kj}(h)=\sum_k p_{ik}(t)u_{kj} \tag{12}$$

知 $p_{ij}(t)$ 在每 t 上有右极限．由函数论知，这种函数的不连续点集至多可数 [1]，因而 $p_{ij}(t)$ 可测．□

---

[1]实际上，对任意有理数 r，令

$$D_r=(t:\overline{\lim_{h\to 0}}\,p_{ij}(t+h)>r>\lim_{h\to 0+}p_{ij}(t+h))$$
$$E_r=(t:\underline{\lim_{h\to 0}}\,p_{ij}(t+h)<r<\lim_{h\to 0+}p_{ij}(t+h))$$

显见如 $s\in D_r$，则 s 是 D_r 的右孤立点，故 D_r 至多可数，从而 $\bigcup\limits_r D_r$ 也至多可数．同理，$\bigcup\limits_r E_r$ 也至多可数．于是 $p_{ij}(t)$ 的不连续点集也至多可数．

注 1 可测性只能导致每 $p_{ij}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 连续，而不能保证在 0 点的连续性，即不能保证 $u_{ij}=\delta_{ij}$. 实际上， $u_{ij}=\delta_{ij}$ 将作为一更强的条件 — 而引进，见 §2.

(二) 现在来研究 $p_{ij}(t)$ 在 0 点的极限 $\lim\limits_{t\to 0+} p_{ij}(t)$. 为此，由定理 1 中 5°, 只要讨论具有性质 (a),(b),(c) 的一般矩阵 U,(不必一定是 $\lim\limits_{t\to 0+} P(t)$). 定理 2 给出了这种矩阵的表达式；或者，从解方程的观点看，它给出了方程 (a),(b),(c) 的全部解.

定理 2 设 $U=(u_{ij})$ 为任意满足 (a),(b),(c) 的矩阵，则参数集 $E=(i)$ 可分解为互不相交的子集 $F,I,J,\cdots$, 使

(α) $u_{ij}=0$, 如 $j\in F$;

(β) 存在实数 $u_j (j\in E-F)$, 具有性质

$$u_j>0,\ \ \sum_{j\in J}u_j=1 \tag{13}$$

使

$$u_{ij}=\delta_{ij}u_j,\ \text{如}\, i\in I, j\in J \tag{14}$$

(γ) 存在非负数 $\rho_{iI},\rho_{iJ},\cdots,\ (i\in F)$, 具有性质 [1]

$$\sum_J \rho_{iJ}\leqslant 1 \tag{15}$$

使

$$u_{ij}=\rho_{iJ}u_j,\quad \text{如}\, i\in F, j\in J \tag{16}$$

反之，设已给 E 的任一分割，它将 E 分解为不相交的子集 $F,I,J,\cdots$, 并且已给满足 (13) 的实数 $u_j\ (j\in E-F)$ 及满足 (15) 的非负数 $\rho_{iI},\rho_{iJ},\cdots (i\in F)$, 则由 ($\alpha$), (14) 及 (16) 所定义的 $U=(u_{ij})$ 满足 (a),(b),(c).

证 令 $u_j=\sup_i u_{ij}$, 由 (a),(c)

$$u_{ij}\leqslant\sum_k u_{ik}u_j+u_{ij}(u_{jj}-u_j)$$

故由 (b)

$$u_{ij}(1+u_j-u_{jj})\leqslant\Big(\sum_k u_{ik}\Big)u_j\leqslant u_j$$

两边对 i 取上确界

$$u_j(1+u_j-u_{jj})\leqslant u_j$$

如 $u_j>0$, 由上式知 $u_j-u_{jj}\leqslant 0$, 故由 u_j 的定义得

$$u_{jj}=u_j \tag{17}$$

如 $u_j=0$, (17) 显然成立. 由 (17) 及 (c),(b) 得

$$u_{jj}\leqslant\sum_k u_{jk}u_{jj}+u_{ji}(u_{ij}-u_{jj})\leqslant u_{jj}+u_{ji}(u_{ij}-u_{jj})$$

---

[1] 集类 $(I,J,\cdots)$ 记为 $C,\sum\limits_J=\sum\limits_{J\in C}$.

因而

$$u_{ij} = u_{jj}, \quad \text{如} u_{ji} > 0 \tag{18}$$

今定义 $F = (j : u_{jj} = 0)$. 如 $j \in F$, 对任意 i, 有 $0 \leqslant u_{ij} \leqslant u_j = u_{jj} = 0$, 故 (α) 成立.

在 $E - F$ 中引进一关系 "$\sim$": 记 $i \sim j$, 如 $u_{ij} > 0$. 由 (17) 知此关系是反射的 (即 $j \sim j$); 由 (18) 知它对称 (即如 $i \sim j$, 则 $j \sim i$); 由 (c),(a) 得 $u_{ij} \geqslant u_{ik}u_{kj}$, 故它还是推移的 (即如 $i \sim k, k \sim j$, 则 $i \sim j$). 从而此关系将 $E - F$ 分为不相交子集 $I, J, \cdots$ 使当且只当 $u_{ij} > 0$ 时, i, j 属于同一子集.

今证 (14): 由分类法, 如 $i \in I, j \in J$, 当 $I \neq J$ 时有 $u_{ij} = 0$; 当 $I = J$ 时有 $u_{ii} > 0$, 由 (18) $u_{ij} = u_j$, 合并这两种情形即得 (14).

今证 (13): 其中第一式显然, 任取 $j \overline{\in} F$, 有

$$0 < u_{jj} = \sum_k u_{jk}u_{kj} \leqslant \Big(\sum_k u_{jk}\Big)u_j \tag{19}$$

以 $u_j = u_{jj}$ 除两边, 并注意 (b) 及 (14), 得

$$1 = \sum_j u_{ij} = \sum_{j \in J} u_j, \quad (i \overline{\in} F) \tag{20}$$

今定义

$$\rho_{iJ} = \sum_{k \in J} u_{ik} \tag{21}$$

如 $j \in J$, 则

$$u_{ij} = \sum_{k \in J} u_{ik}u_{kj} = \Big(\sum_{k \in J} u_{ik}\Big)u_j = \rho_{iJ}u_j$$

此得证 (16), 由 (b) 得 (15).

反面的结论是平凡的, 只需直接验证由 (α),(14) 及 (16) 定义的 U 满足 (a),(b),(c). □

(三) 现在回到可测转移矩阵 (p_{ij}) 在 0 点的极限矩阵 $U = (u_{ij})$, $u_{ij} = \lim\limits_{t \to 0+} p_{ij}(t)$, 利用它可以将 $P(t)$ 的元通过较简单的函数表达出来. 对此 U, 应用定理 2 而得 $u_j, F, I, J, \cdots, C$.

定理 3 设 (p_{ij}) 为任意可测转移矩阵, U 由上式定义, 又 E 按定理 2 的方式对 U 分解为

$$E = F \cup I \cup J \cup \cdots \tag{22}$$

则 $P(t)$, $(t > 0)$ 可如下表达:

(i) $p_{ij} = 0$, 如 $j \in F$, $(t > 0)$; (23)

(ii) 存在转移矩阵 (Π_{IJ}), $I, J \in C$, 满足

$$\lim_{t \to 0+} \Pi_{IJ}(t) = \delta_{IJ} \tag{24}$$

使对 $t > 0$, 有

$$p_{ij}(t) = \Pi_{IJ}(t)u_j, \quad \text{如 } i \in I, j \in J \tag{25}$$

其中 $u_j = u_{jj}$;

(iii) 可以找到在 $(0,\infty)$ 上的连续函数 Π_{iJ}, $i\in F, J\in C$, 满足

$$\left.\begin{aligned}&\Pi_{iJ}(t)\geqslant 0,\quad \sum_J \Pi_{iJ}(t)=1\\&\sum_k \Pi_{ik}(s)\Pi_{kJ}(t)=\Pi_{iJ}(s+t)\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

使

$$p_{ij}(t)=\Pi_{iJ}(t)u_j,\quad \text{如 } i\in F, j\in J\tag{27}$$

反之，设任给 E 的一分割，它将 E 分解为不相交的子集 $F,I,J,\cdots$, 并且已给任一满足 (24) 的转移矩阵 (Π_{IJ}), $I,J\in C$, 任意满足 (26) 的 $(0,\infty)$ 上的连续函数 $\{\Pi_{iJ}, i\in F, J\in C\}$ 及任意满足 (13) 的 u_j, $j\in E-F$, 则由 (23),(25),(27) 定义的 $P(t)$(在 $t=0$ 点补定义 $p_{ij}(0)=\delta_{ij}$) 是可测转移矩阵.

证 由 (10) 与 (6)

$$\sum_k u_{ik}p_{kj}(t)\leqslant \sum_k p_{ik}(t)u_{kj}=p_{ij}(t)\quad (t>0, i,j\in E)\tag{28}$$

如 $j\in F$, 由定理 2 中 (d), $u_{kj}=0$ $(k\in E)$, 故由 (28) 得 (23).

设 $i\in I, j\in J$, 由 (14) 及 (28)

$$p_{ij}(t)=\Big(\sum_{k\in J}p_{ik}(t)\Big)u_j\tag{29}$$

故 $p_{ij}(t)u_j^{-1}$ 只依赖于 i 及 J. 另方面，由 (10) 得

$$p_{ij}(t)\geqslant \sum_k u_{ik}p_{kj}(t)\tag{30}$$

如说对某 $j=j_0$, 上式取严格不等式 “>”, 则在 (30) 中对 j 求和，由 (20) 得

$$1>\sum_k u_{ik}\sum_j p_{kj}(t)=\sum_k u_{ik}=1$$

矛盾，故 (30) 应取等式. 再由 (14) 得

$$p_{ij}(t)=\sum_k u_{ik}p_{kj}(t)=\sum_{k\in I}u_{ik}p_{kj}(t)$$

这表明 $p_{ij}(t)u_j^{-1}$ 又只依赖于 I 及 j. 与上事实联合后知 $p_{ij}(t)u_j^{-1}$ 只依赖于 I 及 J, 从而可定义

$$\Pi_{IJ}(t)=p_{ij}(t)u_j^{-1}\quad (t>0)$$

(25) 显然成立.

今证 (Π_{IJ}) 是满足 (24) 的转移矩阵，$\Pi_{IJ}(t)\geqslant 0$ 明显. 设 $i\in I$, 由 (13)

$$1=\sum_{j\overline{\in} F}p_{ij}(t)=\sum_J\sum_{j\in J}\Pi_{IJ}(t)u_j=\sum_J \Pi_{IJ}(t)$$

$$\begin{aligned}\Pi_{IJ}(s+t)&=p_{ij}(s+t)u_j^{-1}=\sum_{k\overline{\in} F}p_{ik}(s)p_{kj}(t)u_j^{-1}=\sum_{k\overline{\in} F}\Pi_{IK}(s)u_k\Pi_{KJ}(t)\\&=\sum_K \Pi_{IK}(s)\Pi_{KJ}(t)\sum_{k\in K}u_k=\sum_K \Pi_{IK}(s)\Pi_{KJ}(t)\end{aligned}$$

再由 (14)

$$\lim_{t\to 0+}\Pi_{IJ}(t)=\lim_{t\to 0+}p_{ij}(t)u_j^{-1}=u_{ij}u_j^{-1}=\delta_{IJ} \tag{31}$$

今证 (iii). 注意 (29) 对一切 i 也成立. 定义

$$\Pi_{iJ}(t)=\sum_{k\in J}p_{ik}(t),\quad 如 i\in F, J\in C$$

(29) 化为 (27). 显然 $\Pi_{iJ}(t)\geqslant 0$;

$$\sum_J\Pi_{iJ}(t)=\sum_J\sum_{j\in J}p_{ij}(t)=\sum_{j\overline{\in} F}p_{ij}(t)=1$$

$$\begin{aligned}\Pi_{iJ}(s+t)&=p_{ij}(s+t)u_j^{-1}=\sum_k p_{ik}(s)p_{kj}(t)u_j^{-1}\\&=\sum_K\sum_{k\in K}\Pi_{iK}(s)u_k\Pi_{KJ}(t)=\sum_K\Pi_{iK}(s)\Pi_{KJ}(t)\end{aligned}$$

从而得证 (26). 由 $p_{ij}(t)$ 的连续性及 (27) 知 $\Pi_{iJ}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上连续.

反面的结论只需直接验证即可. □

(四) 可测转移矩阵的另一重要性质是下面的定理 4. 先证

引理 1 设 (p_{ij}) 为可测转移矩阵, 如 $i\overline{\in} F$, 则级数 $\sum_j p_{ij}(t)$ 在任一闭区间 $[0,T]$ 中对 t 一致收敛于 1.

证 要用到 Dini 关于一致收敛的定理: 设级数 $\sum\limits_n u_n(t)=S(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 的项 $u_n(t)\geqslant 0$ 而且连续, 则 $S(x)$ 连续的充要条件是此级数在 $[a,b]$ 中一致收敛[1].

定义

$$\overline{p}_{ij}(t)=\begin{cases}p_{ij}(t), & t>0\\ u_{ij}, & t=0\end{cases} \tag{32}$$

由 (B) 及 (20), 如 $i\overline{\in} F$, $\sum\limits_j\overline{p}_{ij}(t)=1$. 由 Dini 定理, $\sum\limits_j\overline{p}_{ij}(t)$ 在 $[0,T]$ 一致收敛, 从而 $\sum\limits_j p_{ij}(t)$ 亦然. □

引理 2 设 (p_{ij}) 为可测转移矩阵.

(i) 如 $j\in F$, 则 $p_{ij}(t)=0$, 一切 $t>0$, $i\in E$;

(ii) 如 $j\overline{\in} F$, 则 $p_{jj}(t)>0$, 一切 $t\geqslant 0$;

(iii) 如对某 $t_0>0$, 有 $p_{ij}(t_0)>0$, 则 $p_{ij}(t)>0$, 一切 $t\geqslant t_0$.

证 (i) 即 (23). 如 $j\overline{\in} F$, 则 $\lim\limits_{t\to 0+}p_{jj}(t)=u_j>0$, 故对任意固定的 $t>0$, 当 n 充分大时, 有 $p_{jj}\left(\frac{t}{n}\right)>0$; 从而由 (A),(C)

$$p_{jj}(t)\geqslant\left[p_{jj}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n>0 \tag{33}$$

$p_{jj}(0)=1>0$. 下证 (iii), 如 $p_{jj}(t_0)>0$ 对某 $t_0>0$ 成立, 则 $j\overline{\in} F$; 对 $t>t_0$, 由 (ii)

$$p_{ij}(t)>p_{ij}(t_0)p_{jj}(t-t_0)>0. \ \square$$

[1] 证见 E. C. Titchmarsh: 函数论.

引理 2 的深化是定理 4.

定理 4 可测转移矩阵的每一元 $p_{ij}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上或恒等于 0, 或恒大于 0.

证 先设 $i\in F$. 如说定理结论对某 p_{il} 不正确，则必存在 $t_0>0$ 使

$$p_{il}(t)=0,\ 0<t\leqslant t_0;\ p_{il}(2t_0)=c>0$$

由引理 1, 存在 N, 使

$$\sum_{j>N}p_{ij}(t)<\frac{c}{4},\quad \text{一切 } 0<t\leqslant 2t_0 \tag{34}$$

令 $s=t_0/2N$, 定义

$$A_m=(k:p_{ik}(ms)>0),\quad m=1,2,\cdots$$

由引理 2 得 $A_m\subset A_{m+1}$, 令 $B_1=A_1$, $B_m=A_m-A_{m-1}$, $m\geqslant 2$, 如 $k\overline{\in}A_m$, 则

$$0=p_{ik}(ms)=\sum_j p_{ij}((m-1)s)p_{jk}(s)=\sum_{j\in A_{m-1}}p_{ij}((m-1)s)p_{jk}(s)$$

因此

$$p_{jk}(s)=0,\quad \text{如}\, j\in A_{m-1},k\overline{\in}A_m \tag{35}$$

今证 $B_m(1\leqslant m\leqslant 2N)$ 非空而且互不相交，否则设 $A_m=A_{m-1}$ 对某 $m(1\leqslant m\leqslant 2N)$ 成立. 由 (35)

$$p_{ik}((m+1)s)=\sum_{j\in A_m}p_{ij}(ms)p_{jk}(s)=0,\ \text{如}\, k\overline{\in}A_m$$

因此 $A_{m+1}=A_m$, 重复下去得 $A_{m'}=A_m$, 一切 $m'\geqslant m$. 这是不可能的，因为 $l\overline{\in}A_{2N}$, 但由对 p_{il} 的假定 $l\in A_{4N}$. 令 $1\leqslant m\leqslant 2N$; 如 $k\overline{\in}A_m$, 则由 (35), 对每 $n\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}p_{ik}((n+1)s)&=\Big(\sum_{j\overline{\in}A_m}+\sum_{j\in B_m}+\sum_{j\in A_{m-1}}\Big)p_{ij}(ns)p_{jk}(s)\\&=\Big(\sum_{j\overline{\in}A_m}+\sum_{j\in B_m}\Big)p_{ij}(ns)p_{jk}(s)\end{aligned}$$

$$\sum_{k\overline{\in}A_m}p_{ik}((n+1)s)\leqslant\sum_{j\overline{\in}A_m}p_{ij}(ns)+\sum_{j\in B_m}p_{ij}(ns)$$

对 n 自 0 至 $4N-1$ 求和，得

$$\sum_{k\overline{\in}A_m}p_{ik}(4Ns)\leqslant\sum_{n=1}^{4N}\sum_{j\in B_m}p_{ij}(ns) \tag{36}$$

因 $l\overline{\in}A_{2N}$, l 更不属于 A_m, 故左方值至少等于 $p_{il}(4Ns)=c$. 于是

$$c\leqslant\sum_{n=1}^{4N}\sum_{j\in B_m}p_{ij}(ns),\quad 1\leqslant m\leqslant 2N$$

因为集 $B_1,\cdots,B_{2N}$ 非空不交，故其中至少存在 N 个集与集 $(1,\cdots,N)$ 不相交，此 N 个集之和记为 B, 我们有

$$Nc \leqslant \sum_{n=1}^{4N}\sum_{j\in B} p_{ij}(ns) \tag{37}$$

但另方面，由 (34)

$$\sum_{j\in B} p_{ij}(ns) \leqslant \sum_{j>N} p_{ij}(ns) < \frac{c}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{4N}\sum_{j\in B} p_{ij}(ns) < Nc$$

此与 (37) 矛盾. 于是定理对 $i\in F$ 得证.

今设 i 任意而且对某 t_1 有 $p_{ij}(t_1)>0$. 由 (C) 及引理 2(i), 必存在 $k\in F$ 使

$$p_{ik}\left(\frac{t_1}{2}\right)>0,\quad p_{kj}\left(\frac{t_1}{2}\right)>0$$

由上所证 $p_{kj}(\frac{t_1}{4})>0$, 故

$$p_{ij}\left(\frac{3}{4}t_1\right) \geqslant p_{ik}\left(\frac{t_1}{2}\right)p_{kj}\left(\frac{t_1}{4}\right)>0$$

重复此推理知 $p_{ij}((\frac{3}{4})nt_1)>0$, 一切 $n=1,2,\cdots$, 由引理 2(iii) 得知 $p_{ij}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上恒大于 0. □

(五) 上面已研究了 $P(t)$ 当 $t\to 0+$ 时的极限，现在来研究它当 $t\to\infty$ 时的极限.

引理 3 设 (p_{ij}) 为可测转移矩阵，则对任意 $i\in F$ 及 j, $p_{ij}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上一致连续.

证 对 $h>0$ 有

$$p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)=\sum_k p_{ik}(h)p_{kj}(t)-p_{ij}(t)$$

$$=\sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t)-p_{ij}(t)[1-p_{ii}(h)]$$

右方二项皆非负，而且都不大于 $1-p_{ii}(h)=\sum\limits_{k\neq i} p_{ik}(h)$, 故

$$|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)| \leqslant 1-p_{ii}(h) \tag{38}$$

注意，上式对任意 (不必可测) 转移矩阵成立.

由上式知，如条件

$$\lim_{h\to 0+} p_{ii}(h)=1$$

满足，则 $p_{ij}(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续，而且这一致性对 $j\in E$ 也成立.

如 $i\in I, j\in J$, 因 $\Pi_{IJ}(t)$ 满足上面条件，故由 (25), 知 $p_{ij}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上一致连续 (注意 (25) 只对 $t>0$ 成立); 如 $j\in F$, 则由 (23) 知引理结论仍成立. □

设 $X=\{x_t, t\geqslant 0\}$ 是可列马氏链，以 (p_{ij}) 为转移概率矩阵，对任意 $h>0$, 考虑随机变数的集合

$$X_h=\{x_{nh},\ n=0,1,2,\cdots\}$$

它是一个具有离散参数的马氏链，一步转移概率矩阵为 $\{p_{ij}(h)\}$, n 步则为 $\{p_{ij}(nh)\}$, 称 X_h 为 X 的有 **单位为 h 的离散骨架**, 或简称为 h-**骨架**. 在一些问题中，它可用来作为研究 X 的工具，如下定理所示：

定理 5 设 (p_{ij}) 是可测转移矩阵，则对每 $i,j\in E$, 存在极限

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = v_{ij} \tag{39}$$

极限矩阵 $V=(v_{ij})$ 具有性质 (a),(b),(c); 而且

$$V = VP(s) = P(s)V, \quad (s>0 \text{ 任意}) \tag{40}$$

$$\sum_j v_{ij} = 1, \quad \text{如} v_{ii} \neq 0 \tag{41}$$

证 先证极限存在，由 (23) 只要考虑 $j\bar{\in}F$.

设 $i\bar{\in}F$, 由引理 2(ii) 知：i 关于 X_h 而言有周期 1, 故由离散参数马氏链的极限定理

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(nh) = v_{ij}(h) \tag{42}$$

存在，因而对 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n,m\geqslant N$ 时有

$$|p_{ij}(nh)-p_{ij}(mh)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

由引理 3,$p_{ij}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上一致连续，故存在 $h>0$, 使对一切满足 $|s-t|\leqslant h$ 的 $s>0,t>0$, 有

$$|p_{ij}(t)-p_{ij}(s)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

今对 $t>0$ 定义正整数 n_t, 使 $|t-n_t h|\leqslant h$, 则当 u 及 v 都大于 $(N+1)h$ 时有

$$\begin{aligned}|p_{ij}(u)-p_{ij}(v)| &\leqslant |p_{ij}(u)-p_{ij}(n_u h)| \\ &\quad + |p_{ij}(n_u h)-p_{ij}(n_v h)| + |p_{ij}(n_v h)-p_{ij}(v)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

从而得证 $i\bar{\in}F$ 时 (39) 中极限的存在.

特别，对定理 3 中的 (Π_{IJ}), 由 (24),$\Pi_{KK}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上不恒为 0, 又 (Π_{IJ}) 由 (25) 可测，故由引理 2(i) 及刚才所证知极限 $\lim\limits_{t\to\infty}\Pi_{KJ}(t)$ 存在.

设 $i\in F$, 由 (27),(26), 存在极限

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \lim_{t\to\infty}\Pi_{iJ}(t)u_j = \sum_k \Pi_{ik}(s)\lim_{t\to\infty}\Pi_{kJ}(t)u_j$$

其中 $s>0$ 任意.

V 显然有性质 (a), 由 (B) 及 Fatou 引理得 (b), 由 (C) 及 Fatou 引理得

$$v_{ij} \geqslant \sum_k v_{ik}p_{kj}(s)$$

对 j 求和：$\sum_j v_{ij} \geqslant \sum_k v_{ik} \sum_j p_{kj}(s) = \sum_k v_{ik}$，故上式应取等式而得

$$v_{ij} = \sum_k v_{ik} p_{kj}(s) \tag{43}$$

此即 $V = VP(s)$. 于此式中令 $s \to \infty$，并注意右方级数被级数 $\sum_k v_{ik} \leqslant 1$ 所控制，即得 $V = V^2$，即 (C). 在

$$p_{ij}(s+t) = \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t)$$

中令 $t \to \infty$，得 $V = P(s)V$. 最后，(41) 自 (20) 得到. □

定理 6 设 (p_{ij}) 是可测转移矩阵，则

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T p_{ij}(t)\, dt = v_{ij} \quad (i, j \in E) \tag{44}$$

其中 v_{ij} 由 (39) 定义.

证 由 (39) 及 L'Hospitale 求极限的法则直接推出 (44). □

§13.2. 标准转移矩阵的可微性

(一) 设 (p_{ij}) 为齐次转移矩阵，如果它满足条件

$$\lim_{t\to 0+} p_{ij}(t) = \delta_{ij}, \quad (i, j \in E) \tag{1}$$

就称它为标准的；条件 (1) 称为 **标准性条件**.

由 §1 定理 1 中 5° 知：标准转移矩阵必可测.

从概率意义上看，标准性条件是很自然的. 它表示：如果 t 很小，那么从 i 出发，经过 t 时后仍在 i 的概率接近于 1. 在许多实际问题中出现的马氏链大都满足 (1). 另方面，根据 §1(24),(25)，可测转移矩阵的某些性质可以通过标准转移矩阵来研究 (例如下面的系 1)，由于这两方面的原因，标准转移矩阵是研究得最多，理论也较完满的一种转移矩阵.

回忆 $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$，可见条件 (1) 等价于 $p_{ij}(t)$ 在 0 点的连续性.

显然，条件 (1) 还等价于

$$\lim_{t\to 0+} p_{ii}(t) = 1, \quad (i \in E) \tag{2}$$

以后 T 总表示 $[0, \infty)$.

定理 1 对任意转移矩阵 (p_{ij})，下列四条件等价：

1° (p_{ij}) 是标准的；

2° $p_{ij}(t)$ 在 T 上一致连续 [1]，而且这一致性对 j 也成立；

3° $p_{ij}(t)$ 在 T 上连续；

[1] 在 0 点的连续性自然应理解为右连续性.

4° (p_{ij}) 可测，又 E 关于它的按 §1 定理 3 的分解

$$E = F \cup I \cup J \cup \cdots \tag{3}$$

中，$F=\phi$ 而且 I,J 等各只含一点.

证 1° → 2°: 这在证明 §1 引理 3 时已附带证明.

2° → 3°: 显然.

3° → 4°: 由连续性得可测性；因 $p_{jj}(t) \to p_{jj}(0)=1\ (t\to 0+)$, 由 §1 引理 2(i) 知 $F=\phi$, 又由同节 (13) 知 J 只含一元.

4° → 1°: 由 §1 定理 3 推出，参看 §1(25) 并注意那里的 $u_j = 1$. □

(二) 试研究 $p_{ij}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 中的可微性.

利用已给的转移矩阵 (p_{ij}), 可以定义一族把序列 $\xi=(\xi_i)$ 变为序列 $T_t\xi=([T_t\xi]_i)$ 的变换 T_t, $(t\geqslant 0)$:

$$\left.\begin{aligned} &\xi \to T_t\xi \\ &[T_t\xi]_i = \sum_j \xi_j p_{ji}(t) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

只要 (4) 中级数对一切 i 收敛.

引理 1 设 (p_{ij}) 为标准转移矩阵，则 $p_{ii}(t)$ 在某区间 $[0,t_i]$ 中具有有界变差，一切 i.

证 只对 $p_{00}(t)$ 证明，对其它的 $p_{ii}(t)$ 之证类似[1]. 因 $p_{00}(t)$ 在任一有限区间中一致连续，故只要证明

$$\sum_{i=0}^{N-1}\left|p_{00}\left(\frac{it_0}{N}\right) - p_{00}\left(\frac{i+1}{N}t_0\right)\right| \leqslant M < \infty$$

其中上界 M 与正整数 N 无关；于是 $p_{00}(t)$ 在 $[0,t_0]$ 中的变差也不超过 M. 这里的 $t_0(>0)$ 待定. 令

$$T = T_{t_0/N},\quad f_i = p_{00}\left(\frac{it_0}{N}\right)$$
$$T_1 = T,\quad T^s = T(T^{s-1})$$

对任一序列 $v=(v_i)$, 以 v^* 表一新序列：

$$v_0^* = 0,\ v_i^* = v_i\ (i\geqslant 1)$$

今定义一列序列 $v^{(i)} = (v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, \cdots)$, $i=0,1,2,\cdots$.

$$v^{(0)} = (1,0,0,\cdots),\quad v^{(i+1)} = (Tv^{(i)})^* \tag{5}$$

即 $v^{(0)}$ 中除首元为 1 外，其余元皆为 0; 而 $v^{(i+1)}$ 中之首元为 0, 其余元等于 $Tv^{(i)}$ 之对应元. 以下之证分成四步.

1°. 先证

$$T^s v^{(0)} = \sum_{i=0}^{s} f_{s-i} v^{(i)} \tag{6}$$

[1] 对 $p_{kk}(t)$ 证明时，只要作下列修改：令 $v_k^*=0, v_i^*=v_i, (i\neq k)$; $v^{(0)}$ 中 $v_i^{(0)}=\delta_{ki}$ 等等.

实际上，当 $s=1$ 时此式显然成立. 今设它对某 s 正确而欲证

$$T^{s+1}v^{(0)}=\sum_{i=0}^{s+1}f_{s+1-i}v^{(i)} \tag{6_1}$$

对 (6) 双方施以变换 T, 由 T 之线性，得

$$T^{s+1}v^{(0)}=\sum_{i=0}^{s}f_{s-i}Tv^{(i)} \tag{6_2}$$

分别考虑其分量. 对 $k\geqslant 1$, 由 (6_2) 得

$$[T^{s+1}v^{(0)}]_k=\sum_{i=0}^{s}f_{s-i}[Tv^{(i)}]_k=\sum_{i=0}^{s}f_{s-i}v_k^{(i+1)}=\sum_{i=0}^{s+1}f_{s+1-i}v_k^{(i)},\ (\because v_k^{(0)}=0)$$

故 (6_1) 对第 $k(\geqslant 1)$ 号分量成立. 今考虑第 0 号，由 T^s 之定义，易见

$$[T^{s+1}v^{(0)}]_0=p_{00}\Big(\frac{s+1}{N}t_0\Big)=f_{s+1}=\sum_{i=0}^{s+1}f_{s+1-i}v_0^{(i)},\ (\because v_0^{(i)}=0,\ i\geqslant 1)$$

2° 今定义一列正数 (β_i):

$$\beta_0=1-f_1=1-p_{00}\Big(\frac{t_0}{N}\Big)$$
$$\beta_i=[Tv^{(i)}]_0\ (\text{即 } Tv^{(i)} \text{ 之首元}),\ i\geqslant 1$$

于是

$$[Tv^{(0)}]_0=p_{00}\Big(\frac{t_0}{N}\Big)=f_1=1-\beta_0$$

比较 (6_2) 双方之首元，得

$$f_{s+1}=f_s[Tv^{(0)}]_0+\sum_{i=1}^{s}f_{s-i}[Tv^{(i)}]_0=f_s(1-\beta_0)+\sum_{i=1}^{s}f_{s-i}\beta_i \tag{7}$$

$$f_{s+1}-f_s=-f_s\beta_0+\sum_{i=1}^{s}f_{s-i}\beta_i=f_s\sum_{i=1}^{s}\beta_i-f_s\beta_0+\sum_{i=1}^{s}(f_{s-i}-f_s)\beta_i$$

$$\sum_{s=0}^{N-1}|f_s-f_{s+1}|\leqslant\sum_{s=0}^{N-1}\Big|f_s\sum_{i=1}^{s}\beta_i-f_s\beta_0\Big|+\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{i=1}^{s}|f_{s-i}-f_s|\beta_i \tag{8}$$

但最后一项等于

$$\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=j}^{N-1}|f_{k-j}-f_k|\beta_j\leqslant\sum_{j=1}^{N-1}\Big(j\sum_{s=0}^{N-1}|f_s-f_{s+1}|\Big)\beta_j=\Big(\sum_{i=1}^{N-1}i\beta_i\Big)\Big(\sum_{s=0}^{N-1}|f_s-f_{s+1}|\Big) \tag{9}$$

由 (8),(9) 得

$$\sum_{s=0}^{N-1}|f_s-f_{s+1}|\leqslant\sum_{s=0}^{N-1}\Big|f_s\sum_{i=1}^{s}\beta_i-f_s\beta_0\Big|+\Big(\sum_{i=1}^{N-1}i\beta_i\Big)\Big(\sum_{s=0}^{N-1}|f_s-f_{s+1}|\Big) \tag{10}$$

由 (1), 可取 $t_0 > 0$, 使

$$p_{00}(t) > \frac{3}{4}, \quad (t \leqslant t_0) \tag{11}$$

下面证明

$$\sum_{i=1}^{N-1} i\beta_i < \frac{1}{2}, \quad \sum_{s=0}^{N-1} \left| f_s \sum_{i=1}^{s} \beta_i - f_s\beta_0 \right| < \frac{1}{2}$$

于是由 (10) 得

$$\sum_{s=0}^{N-1} |f_s - f_{s+1}| < 1 \tag{11_1}$$

从而引理 1 得以证明.

3° 令 $|v| = \sum\limits_{i=0}^{\infty} |v_i|$. 为证 $\sum\limits_{i=1}^{N-1} i\beta_i < \frac{1}{2}$, 注意

$$Tv^{(i)} = (v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, \cdots)P\left(\frac{t_0}{N}\right) = \left(\sum v_j^{(i)} p_{j0}\left(\frac{t_0}{N}\right), \sum v_j^{(i)} p_{j1}\left(\frac{t_0}{N}\right), \cdots\right)$$

$$v^{(i+1)} = [Tv^{(i)}]^* = \left(0, \sum v_j^{(i)} p_{j1}\left(\frac{t_0}{N}\right), \sum v_j^{(i)} p_{j2}\left(\frac{t_0}{N}\right), \cdots\right)$$

其中 Σ 表 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}$. 注意 $v_0^{(i)} = 0 (i \geqslant 1)$, 故

$$\begin{aligned} |v^{(i+1)}| &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} v_j^{(i)} p_{jk}\left(\frac{t_0}{N}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} v_j^{(i)} \left[1 - p_{j0}\left(\frac{t_0}{N}\right)\right] \\ &= |v^{(i)}| - \sum_{j=1}^{\infty} v_j^{(i)} p_{j0}\left(\frac{t_0}{N}\right) = |v^{(i)}| - \beta_i \end{aligned}$$

$$\beta_i = |v^{(i)}| - |v^{(i+1)}|, \quad (i \geqslant 1) \tag{11_2}$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} i\beta_i = \sum_{i=1}^{N-1} i[|v^{i)}| - |v^{(i+1)}|] < \sum_{i=1}^{N} |v^{(i)}| \tag{12}$$

其次, 由 (6), $T^N v^{(0)} = f_N v^{(0)} + \sum\limits_{i=1}^{N} f_{N-i} v^{(i)}$. 因 $|T^N v^{(0)}| = 1$, 故

$$\sum_{i=1}^{N} f_{N-i} |v^{(i)}| = 1 - f_N = 1 - p_{00}(t_0) < \frac{1}{4}$$

又由 (11), 每 $f_{N-i} = p_{00}\left(\frac{N-i}{N} t_0\right) > \frac{1}{2}$, 故由上式得

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} |v^{(i)}| < \sum_{i=1}^{N} f_{N-i} |v^{(i)}| < \frac{1}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} |v^{(i)}| < \frac{1}{2} \tag{12_1}$$

由此及 (12) 即得证 $\sum\limits_{i=1}^{N-1} i\beta_i < \frac{1}{2}$.

4° 因 $|v^{(1)}| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_{0k}\left(\frac{t_0}{N}\right) = 1 - p_{00}\left(\frac{t_0}{N}\right) = \beta_0$, 故由 (11_2)

$$\left|\beta_0 - \sum_{i=1}^{s}\beta_i\right| = \left|\beta_0 - \sum_{i=1}^{s}(|v^{(i)}| - |v^{(i+1)}|)\right| = |\beta_0 - |v^{(1)}| + |v^{(s+1)}|| = |v^{(s+1)}|$$

因此,

$$\sum_{s=0}^{N-1}\left|f_s\sum_{i=1}^{s}\beta_i - f_s\beta_s\right| = \sum_{s=0}^{N-1} f_s|v^{(s+1)}| \leqslant \sum_{s=1}^{N}|v^{(s)}| < \frac{1}{2}. \ \square$$

引理 2 设 (p_{ij}) 为标准转移矩阵, 则 $p_{ij}(t)$ 在 $[0,t_i]$ 中具有有界变差, t_i 与引理 1 中的相同.

证 仍对 $i=0$ 证. 由 (6) 我们有

$$T^{s+1}v^{(0)} - T^s v^{(0)} = \sum_{i=0}^{s+1}(f_{s+1-i} - f_{s-i})v^{(i)}, \ (f_{-1} = 0)$$

$$\sum_{s=0}^{N-1}|T^{s+1}v^{(0)} - T^s v^{(0)}| \leqslant \sum_{s=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{s+1}|f_{s+1-i} - f_{s-i})v^{(i)}| \leqslant \sum_{s=0}^{N}\sum_{s=i-1}^{N-1}|(f_{s+1-i} - f_{s-i})v^{(i)}|$$

利用 (11_1), 并注意 $f_0 - f_{-1} = 1$ 以及 (12_1), 得

$$\sum_{s=0}^{N-1}|T^{s+1}v^{(i)} - T^s v^{(0)}| \leqslant 2\sum_{i=0}^{N}|v^{(i)}| \leqslant 4 \tag{13}$$

然而由定义

$$T^s v^{(0)} = (1,0,0,\cdots)P\left(\frac{st_0}{N}\right) = \left(p_{00}\left(\frac{st_0}{N}\right), p_{01}\left(\frac{st_0}{N}\right), \cdots\right)$$

故 (13) 表示

$$\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{\infty}\left|p_{0j}\left(\frac{s+1}{N}t_0\right) - p_{oj}\left(\frac{s}{N}t_0\right)\right| \leqslant 4. \ \square \tag{13$_1$}$$

定理 2 标准转移矩阵中每一元 $p_{ij}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 中都有有穷的连续导数 $p'_{ij}(t)$, 而且满足方程

$$p'_{ij}(s+t) = \sum_{k=0}^{\infty}p'_{ik}(s)p_{kj}(t), \ (s>0, t>0, i,j\in E) \tag{14}$$

又 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|p'_{ij}(t)|$ 有穷 $(t>0)$, 而且对 t 不上升.

证 仍对 $i=0$ 证. 由引理 2, $p_{0j}(t)$ 在 $[0,t_0]$ 中具有有界变差, 因而在 $[0,t_0]$ 中几乎处处有有穷导数. 由于 j 属于可列集, 故对任意 $\eta>0$, 总存在 t_1, $0<t_1<\min(\eta,t_0)$, 使一切 $p_{oj}(t)$ 在 t_1 有有穷导数. 以下分成三步.

1° 先证: 对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 k, 使对一切 α, $0<\alpha<\frac{t_1}{4}$, 有

$$\sum_{j=k}^{\infty}\frac{|p_{0j}(t_1) - p_{0j}(t_1+\alpha)|}{\alpha} < \varepsilon \tag{15}$$

事实上，对已给的 $0<\alpha<\frac{t_1}{4}$, 可取 $t_0'\in\left(\frac{t_1}{2},t_1\right)$ 及正偶数 N, 使 $t_0'/N\leqslant\alpha$. 然后以 t_0' 代替 t_0 来定义 T 及 $v^{(i)}$, 定义方法仿引理 1 之证.

由 §1 引理 1, 对 $0<\varepsilon_1<\frac{\varepsilon}{8}\cdot\frac{t_1}{2}\cdot\frac{1}{2}$, 存在 k_1, 使

$$\sum_{j\geqslant k_1}p_{0j}(t)<\varepsilon_1,\quad 一切 t<t_1 \tag{15_1}$$

记 $|v|_k=\sum\limits_{j\geqslant k}|v_j|$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}|v^{(i)}|_{k_1}&=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\geqslant k_1}|v_j^{(i)}|=\sum_{j\geqslant k_1}\sum_{i=1}^{N}|v_j^{(i)}|\\&\leqslant\frac{4}{3}\sum_{j\geqslant k_1}\sum_{i=0}^{N}f_{N-i}|v_j^{(i)}|\quad[由\ (11)]\\&=\frac{4}{3}\sum_{j\geqslant k_1}p_{0j}(t_0')\quad[由\ (6)]<2\varepsilon_1.\end{aligned}$$

完全仿 (13) 之证有

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{N-1}|T^{s+1}v^{(0)}-T^sv^{(0)}|_{k_1}&=\sum_{s=0}^{N-1}\left|\sum_{i=0}^{s+1}(f_{s+1-i}-f_{s-i})v^{(i)}\right|_{k_1}\\&\leqslant\sum_{i=0}^{N}\sum_{s=i-1}^{N-1}|f_{s+1-i}-f_{s-i}||v^{(i)}|_{k_1}\leqslant2\sum_{i=1}^{N}|v^{(i)}|_{k_1}<4\varepsilon_1\end{aligned}$$

由此即有

$$\sum_{s=1}^{N-1}\sum_{j=k_1}^{\infty}|p_{0j}([s+1]\alpha)-p_{0j}(s\alpha)|<4\varepsilon_1 \tag{16}$$

于是至少有 $\frac{N}{2}$ 个整数 s, 使

$$\sum_{j=k_1}^{\infty}|p_{0j}([s+1]\alpha)-p_{0j}(s\alpha)|<\frac{8\varepsilon_1}{N} \tag{17}$$

并且由 (13) 可见，对其中之一，如 r, 有

$$\sum_{j=0}^{k_1}|p_{0j}([r+1]\alpha)-p_{0j}(r\alpha)]|<\frac{8}{N} \tag{18}$$

今对正数 $\varepsilon_2<\frac{\varepsilon}{8}\cdot\frac{t_1}{2}\cdot\frac{1}{2}$, 存在 $k>k_1$, 使

$$\sum_{j=k}^{\infty}p_{ij}(t)<\varepsilon_2,\quad 一切\ t<t_1\ 及\ i\leqslant k_1 \tag{19}$$

于是

$$\sum_{j=k}^{\infty}|p_{0j}(t_1)-p_{0j}(t_1+\alpha)|\leqslant\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|p_{0j}(r\alpha)-p_{0j}([r+1]\alpha)|p_{jm}(t_1-r\alpha)$$

$$\leqslant\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{j=k_1+1}^{\infty}|p_{0j}(r\alpha)-p_{0j}([r+1]\alpha)|p_{jm}(t_1-r\alpha)$$

$$+\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{j=0}^{k_1}|p_{0j}(r\alpha)-p_{0j}([r+1]\alpha)|p_{jm}(t_1-r\alpha)$$

右方第一项由 (17) 小于 $\frac{8\varepsilon_1}{N}$; 又由 (18)

$$\sum_{j=0}^{k_1}|p_{0j}(r\alpha)-p_{0j}([r+1]\alpha)|<\frac{8}{N}$$

再利用 (19), 即知右方第二项也小于 $\frac{8\varepsilon_2}{N}$. 因此

$$\sum_{j=k}^{\infty}\frac{|p_{0j}(t_1)-p_{0j}(t_1+\alpha)|}{\alpha}\leqslant\frac{8(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{N\alpha}<\frac{t_1\varepsilon}{2N\alpha}$$

回忆 $\alpha\geqslant t_0'/N$ 以及 $t_1<2t_0'$, 即得证 (15).

2° 对任意 $t_2>0,\alpha>0$, 有

$$\frac{p_{0j}(t_1+t_2)-p_{0j}(t_1+t_2+\alpha)}{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p_{0k}(t_1)-p_{0k}(t_1+\alpha)}{\alpha}p_{kj}(t_2)$$

由 (15), 当 $\alpha\to 0+$ 时，有

$$p_{0j}^{+}(t_1+t_2)=\sum_{k=0}^{\infty}p_{0k}'(t_1)p_{kj}(t_)\tag{20}$$

其中 $p_{0j}^{+}(t)$ 表 $p_{0j}(t)$ 的右导数. 由 (15) 还知

$$\sum_{k=0}^{\infty}|p_{0k}'(t_1)|<\infty\tag{21}$$

故可在 (20) 中求和号下对 t_2 取极限. 回忆 $p_{kj}(t_2)$ 对 $t_2\geqslant 0$ 连续，故由 (20) 知 $p_{0j}^{+}(t_1+t_2)$ 是 t_2 的连续函数. 利用下事实 [1]: 一连续函数如有连续的右导数，则必有导数，而且导数与右导数一致. 故由 (20) 得

$$p_{0j}(t_1+t_2)=\sum_{k=0}^{\infty}p_{0k}'(t_1)p_{kj}(t_2)\tag{22}$$

由于 $t_1>0$ 可任意小，这表示 $p_{oj}'(t)$ 在 $(0,\infty)$ 中存在，有穷而且连续.

---

[1] 证见 §4.5,13.

对任意的 $s>0, t>0$, 总可找到 $t_1<s$ 使 (22) 成立. 于是

$$p'_{0j}(s+t)=p'_{0j}(t_1+[s-t_1+t])=\sum_{k=0}^{\infty}p'_{0k}(t_1)p_{kj}(s-t_1+t)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}p'_{0k}(t_1)\sum_{l=0}^{\infty}p_{kl}(s-t_1)p_{lj}(t)=\sum_{l=0}^{\infty}p'_{0l}(s)p_{lj}(t) \tag{23}$$

此得证 (14).

3° 对 $t>0$, 取 $t_1<t$ 使满足 (21). 由 (14)

$$p'_{0j}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}p'_{0k}(t_1)p_{kj}(t-t_1)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}|p'_{0j}(t)|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}|p'_{0k}(t_1)|<\infty \quad (t>0) \tag{24}$$

仿 (24) 之证即知 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|p'_{0j}(t)|$ 对 t 不上升. □

我们虽然证明了 $p'_{ii}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 中的有穷性及连续性，但在 $t=0$ 却未必如此，可能

$$p'_{ii}(0)=-\infty,\quad 但\quad \lim_{t\to 0}p'_{ii}(t)\neq-\infty$$

甚至 $\overline{\lim\limits_{t\to 0}}\,p_{ii}(t)=\infty$. 详见 G. Smith [1].

系 1 设 (p_{ij}) 为可测转移矩阵，又

$$\lim_{t\to 0+}p_{ii}(t)=u_i>0,\quad (i\in E) \tag{25}$$

则每个 $p_{ij}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 中有连续有穷导数.

证 利用 §1 定理 3 并采用那里的符号，由 (25) 知 $F=\phi$. 根据

$$p_{ij}(t)=\Pi_{IJ}(t)u_j \tag{26}$$

及 (Π_{IJ}) 的标准性， $0<u_j\leqslant 1$, 知 $p'_{ij}(t)=\Pi'_{IJ}(t)u_j$ 具有所需的性质. □

系 2 设 (p_{ij}) 为标准转移矩阵，则

$$\lim_{t\to\infty}p'_{ij}(t)=0\quad (i,j\in E)$$

证 在 (14) 中，固定 $s>0$ 而令 $t\to\infty$. 由于 $\sum\limits_{j}|p'_{ij}(s)|<\infty$, 故可在求和号下取极限；由 §1 定理 5 可见存在极限 $b_{ij}=\lim\limits_{t\to\infty}p'_{ij}(t)$. 如说 $b_{ij}>0$, 则存在常数 $c>0$, 使对 $s\geqslant c$, 有

$$\frac{1}{2}b_{ij}<p'_{ij}(s)<\frac{3}{2}b_{ij}$$

故由 $p'_{ij}(s)$ 在 $(0,\infty)$ 的连续性得

$$\frac{1}{2}b_{ij}(t-c)<p_{ij}(t)-p_{ij}(c)=\int_c^t p'_{ij}(s)\,ds<\frac{3}{2}b_{ij}(t-c)$$

于是 $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \infty$ 而与 $0 \leqslant p_{ij}(t) \leqslant 1$ 矛盾，故 b_{ij} 不可能大于 0. 类似可证它也不能小于 0. 故 $b_{ij} = 0$. □

(三) 密度矩阵 现在来研究 $p_{ij}(t)$ 在 0 点的导数. 回忆

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij}.$$

定理 3 设 (p_{ij}) 为标准转移矩阵，则存在极限 (可能无穷)

$$-\infty \leqslant \lim_{t\to 0+} \frac{p_{ii}(t)-1}{t} = p'_{ii}(0) \leqslant 0 \tag{27}$$

证 由 §1, 引理 2 及标准性

$$p_{ii}(t) > 0 \quad (t \in T) \tag{28}$$

故函数

$$f(t) = -\log p_{ii}(t) \tag{29}$$

对一切 $t \geqslant 0$ 有定义，非负有穷，而且由于

$$p_{ii}(s+t) \geqslant p_{ii}(s)p_{ii}(t)$$

有

$$f(s+t) \leqslant f(s) + f(t) \tag{30}$$

对 $t>0, h>0$, 取 n 使 $t = nh + \varepsilon, 0 \leqslant \varepsilon < h$, 由 (30)

$$\frac{f(t)}{t} \leqslant \frac{nf(h)}{t} + \frac{f(\varepsilon)}{t} = \frac{nh}{t}\frac{f(h)}{h} + \frac{f(\varepsilon)}{t}$$

令 $h \to 0$, 则 $\frac{nh}{t} \to 1$, $f(\varepsilon) = -\log p_{ii}(\varepsilon) \to 0$, 故

$$\frac{f(t)}{t} \leqslant \varliminf_{h\to 0+} \frac{f(h)}{h}$$

$$\varlimsup_{h\to 0+} \frac{f(h)}{h} \leqslant \sup_{t>0} \frac{f(t)}{t} < \varliminf_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$$

从而得知存在极限

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(h)}{h} = q_i = \sup_{t>0} \frac{f(t)}{t} \tag{31}$$

由 (29),(31)

$$\frac{1-p_{ii}(h)}{h} = \frac{1-e^{-f(h)}}{h} = [1+o(1)]\frac{f(h)}{h} \to q_i \quad (h \to 0+)$$

故得证 $p_{ii}(t)$ 在 0 的导数 $p'_{ii}(0)$ 存在，而且

$$0 \leqslant -p'_{ii}(0) = q_i \leqslant \infty \tag{32}$$

其中 q_i 由 (31) 定义. □

定理 4 设 (p_{ij}) 为标准矩阵，则存在有穷极限

$$0 \leqslant \lim_{t \to 0+} \frac{p_{ij}(t)}{t} = q_{ij} \leqslant q_i \quad (i \neq j) \tag{33}$$

而且

$$0 \leqslant \sum_{j \neq i} q_{ij} \leqslant q_i \leqslant \infty, \ (i \in E) \tag{34}$$

证 对正数 $\varepsilon < \frac{1}{3}$. 由 (2) 存在 $\delta > 0$, 使

$$p_{ii}(t) > 1 - \varepsilon, \ p_{jj}(t) > 1 - \varepsilon, \ (t \leqslant \delta) \tag{35}$$

造函数列

$$\left.\begin{aligned} {}_jp_{ik}(h) &= p_{ik}(h) \\ {}_jp_{ik}((l+1)h) &= \sum_{r \neq j} {}_jp_{ir}(lh) p_{rk}(h) \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

于是 ${}_jp_{ik}((l+1)h)$ 是自 i 出发，于 $h, 2h, \cdots, lh$ 不在 j, 但于 $(l+1)h$ 时在 k 的概率，亦即等于

$$P_i(x_{nh} \neq j, \ n = 1, \cdots, l, \ x_{(l+1)h} = k)$$

其中 $\{x_t, t \geqslant 0\}$ 是以 (p_{ij}) 为转移矩阵的马氏链，因而

$$p_{ik}(mh) = \sum_{l=1}^{m-1} {}_jp_{ij}(lh) p_{jk}((m-l)h) + {}_jp_{ik}(mh) \tag{37}$$

对已给的 h 及 $t (\leqslant \delta)$, $h \leqslant t$, 取 $n = [t/h]$, 即 n 为不超过 t/h 的最大整数，则由 (37) 可得下二不等式：

$$p_{ij}(nh) \geqslant \sum_{l=1}^{n} {}_jp_{ii}((l-1)h)(1-\varepsilon) p_{ij}(h) \tag{38}$$

$$\sum_{l=1}^{n} {}_jp_{ij}(lh) \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \tag{39}$$

实际上，在 (37) 中取 $k = j, m = n$ 得

$$p_{ij}(nh) = \sum_{l=1}^{n} {}_jp_{ij}(lh) p_{jj}((n-l)h) \tag{40}$$

既然

$${}_jp_{ik}(lh) \geqslant {}_jp_{ii}((l-1)h) p_{ik}(h)$$

故

$$p_{ij}(nh) \geqslant \sum_{l=1}^{n} {}_jp_{ii}((l-1)h) p_{ij}(h) p_{jj}((n-l)h) \geqslant \sum_{l=1}^{n} {}_jp_{ii}((l-1)h) p_{ij}(h)(1-\varepsilon)$$

此即 (38). 再由 (40), 并注意 $nh \leqslant \delta$, $i \neq j$, 得

$$\varepsilon > p_{ij}(nh) \geqslant (1-\varepsilon)\sum_{l=1}^{n} {}_jp_{ij}(lh)$$

由此得 (39).

今在 (37) 中令 $k=i, m \leqslant n$, 利用 (39) 得

$$1-\varepsilon < p_{ii}(mh) \leqslant \sum_{l=1}^{m-1} {}_jp_{ij}(lh) + {}_jp_{ii}(mh) \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} + {}_jp_{ii}(mh)$$

因而

$${}_jp_{ii}(mh) \geqslant \frac{1-3\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

以它代入 (38) 得

$$p_{ij}(nh) \geqslant n(1-3\varepsilon)p_{ij}(h)$$
$$\frac{1}{1-3\varepsilon}\frac{p_{ij}(nh)}{nh} \geqslant \frac{p_{ij}(h)}{h} \quad \left(\varepsilon < \frac{1}{3}\right)$$

当 $h \to 0+$ 时， $nh \to t$, 既然 $p_{ij}(t)$ 对 t 连续，故

$$\frac{1}{1-3\varepsilon}\frac{p_{ij}(t)}{t} \geqslant \overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{p_{ij}(h)}{h} \tag{41}$$
$$\frac{1}{1-3\varepsilon}\underline{\lim_{t\to 0+}}\frac{p_{ij}(t)}{t} \geqslant \overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{p_{ij}(h)}{h}$$

再令 $\varepsilon \to 0+$, 即得证存在极限 $q_{ij} = \lim\limits_{t\to 0+}\frac{p_{ij}(t)}{t} \geqslant 0$; 由 (41) 知 $q_{ij} < \infty$, 在下式

$$\sum_{j\neq i}\frac{p_{ij}(t)}{t} = \frac{1-p_{ij}(t)}{t}$$

中，令 $t \to 0+$ 并利用 Fatou 引理，即得 (34). □

记 $q_{ii} \equiv p'_{ii}(0) = -q_i$. 称矩阵

$$Q = (q_{ij}) \tag{42}$$

为 (p_{ij})**的密度矩阵**, q_{ij} 是 $p_{ij}(t)$ 在 0 点的 (右) 导数， $q_{ij} = p'_{ij}(0)$, 如果马氏链 $X = \{x_t, t \geqslant 0\}$ 的转移概率矩阵是 (p_{ij}), 我们也说 Q 是 X**的密度矩阵**. 在实际问题中， Q 往往比 (p_{ij}) 更容易求到，因为 Q 只决定于 (p_{ij}) 在任意短的时间区间 $[0,\varepsilon)$ 中的值.

(四) 密度矩阵的概率意义 设 $X = \{x_t, t \geqslant 0\}$ 是以 (p_{ij}) 为转移概率矩阵的马氏链，我们有

引理 3 设 (p_{ij}) 标准，则 X 是右随机连续的.

证 对 $t \geqslant 0, h \geqslant 0$, 由齐次性及标准性

$$P_{t,i}(x_t \neq x_{t+h}) = P_{0,i}(x_0 \neq x_h) = 1 - p_{ii}(h) \to 0 \quad (h \to 0) \tag{43}$$

故对任意 $\varepsilon > 0$

$$P(|x_t - x_{t+h}| > \varepsilon) \leqslant P(x_t \neq x_{t+h}) = \sum_i P(x_t = i) P_{t,i}(x_t \neq x_{t+h}) \to 0, \quad (h \to 0). \ \square$$

由于 X 右随机连续，故根据 §3.1 定理 2, 可以假定 X 是完全可分的过程，本节以后恒如此假定.

定理 5 对任意 $s \geqslant 0, i \in E$, 有

$$P_{s,i}(x_{s+u} \equiv i,\ 0 \leqslant u \leqslant t) = e^{-q_i t} \tag{44}$$

证 由齐次性只要对 $s = 0$ 证明. 根据完全可分性及 (31)

$$\begin{aligned} P_i(x_u \equiv i, 0 \leqslant u \leqslant t) &= \lim_{n\to\infty} P_i(x_{kt/2^n} = i,\ 0 \leqslant k \leqslant 2^n) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[p_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right]^{2^n} = \lim_{n\to\infty} \exp\left\{\frac{\log p_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)}{\frac{t}{2^n}} \cdot \frac{t}{2^n} \cdot 2^n\right\} = e^{-q_i t}. \ \square \end{aligned}$$

由定理 5 可见，如 $q_i = 0$, 则质点自 i 出发，以概率 1 永远停留在 i; 如 $q_i = \infty$, 则自 i 出发立即离开 i, 停留的时间不构成任何一区间；如 $0 < q_i < \infty$, 则自 i 出发，在 i 停留一段时间然后离开，这段时间的长有参数为 q_i 的指数分布. 由于这些原因，我们称 i 为 **吸引** 状态，如 $q_i = 0$; 为 **瞬时** 状态，如 $q_i = \infty$; 为 **逗留** 状态，如 $0 < q_i < \infty$.

可把 (44) 换一种写法：定义

$$\tau(\omega) = \inf(t : x_t(\omega) \neq x_0(\omega)) \tag{45}$$

由可分性知 $\tau(\omega)$ 是随机变数，取值于 $[0, \infty]$ (如 (45) 右方 t- 集空，就令 $\tau = \infty$). 直观上可理解 $\tau(\omega)$ 为离开开始状态的时刻，也就是停留在开始状态的时间长. 由 (44) 可得

$$P_i(\tau > t) = e^{-q_i t} \tag{46}$$

$$E_i \tau = \frac{1}{q_i} \tag{47}$$

设 $f(t), (t \geqslant 0)$ 是任意实值函数，称 s 是它的 **跳跃点**, 如果存在 $\varepsilon > 0$, 使 $f(t) \equiv c_1 (s - \varepsilon < t < s)$; $f(t) \equiv c_2, (s \leqslant t < s + \varepsilon)$, 而且 $c_1 \neq c_2$. 称 $f(t)$ 在 $[0, c)$ **是跳跃函数**, 如果在任意 $[0, \alpha]$ 中， $\alpha < c$, $f(t)$ 只有有穷多个不连续点 s_i, $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n \leqslant \alpha$, 它们都是跳跃点，而且在任一 $[s_i, s_{i+1})$ 中恒等于一常数 c_i, $(s_0 = 0)$. 在 $[0, \infty)$ 中的跳跃函数简称为 **跳跃函数**.

定理 6 设 X 是 Borel 可测过程，又 $0 < q_i < \infty, q_i < \infty, i \neq j$, 则 [1]

(i) $P_i(X$ 在 $[0, \alpha)$ 中有第一个不连续点 $\tau(\omega)$; 而且它是

$$\text{跳跃点;}\ (x(\tau + 0) = j) = (1 - e^{-q_i \alpha}) \frac{q_{ij}}{q_i} \tag{48}$$

[1] $x(\tau + 0)$ 表 $\lim\limits_{t \to \tau + 0} x(t)$.

(ii) $P_i(X$ 在 $[0,\infty)$ 中有第一个不连续点 $\tau(\omega)$; 而且它是

$$\text{跳跃点}; \ (x(\tau+0)=j)=\frac{q_{ij}}{q_i} \tag{49}$$

证 任取 $\beta>0$, 定义 ω- 集

$$D_{n\beta}=\left(\begin{array}{c}\omega: \text{存在整数} v, 2\leqslant v\leqslant 2^n, \text{使} \\ x_t(\omega)=\begin{cases} i, & \text{如} 0\leqslant t\leqslant \dfrac{v-1}{2^n}\alpha \\ j, & \text{如} \dfrac{v\alpha}{2^n}\leqslant t\leqslant \dfrac{v\alpha}{2^n}+\beta \end{cases}\end{array}\right)$$

如果 $n_1<n_2<n_3$, 又 $\omega\in D_{n_1\beta}, \omega\in D_{n_3\beta}$, 则当 n_1 充分大时，有 $\omega\in D_{n_2\beta}$, 故

$$D_\beta=\bigcap_{k=1}^{n}\bigcup_{n=k}^{\infty}D_{n\beta}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}D_{n\beta}=\lim_{n\to\infty}D_{n\beta}$$

当 $\beta\to 0$ 时， D_β 不下降，故可定义

$$D=\lim_{\beta\to 0}D_\beta=\lim_{n\to\infty}D_{\frac{1}{n}}=\bigcup_{\beta>0}D_\beta \tag{50}$$

第二等号表示 D 可测，由定理 5 及 4 得

$$\begin{aligned} P_i(D_{n\beta}) &= \sum_{v=2}^{2^n} e^{-q_i\frac{v-1}{2^n}\alpha}p_{ij}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)e^{-q_j\beta}=\frac{e^{-q_i\frac{\alpha}{2^n}}-e^{-q_i\alpha}}{\frac{(1-e^{-q_i\frac{\alpha}{2^n}})}{\frac{\alpha}{2^n}}}\cdot\frac{p_{ij}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}{\frac{\alpha}{2^n}}\cdot e^{-q_j\beta} \\ &\to \frac{1-e^{-q_i\alpha}}{q_i}q_{ij}e^{-q_j\beta}=P_i(D_\beta)\ \ (n\to\infty) \\ &\to (1-e^{-q_i\alpha})\frac{q_{ij}}{q_i}=P_i(D)\ \ (\beta\to 0) \end{aligned} \tag{51}$$

然而当 $\omega\in D$ 时，必存在某 $\tau=\tau(\omega), 0<\tau\leqslant\alpha$, 使在 $[0,\tau)$ 中， $x_t(\omega)\equiv i$, 而且在某一以 τ 为左端点的区间中， $x_t(\omega)$ 恒等于 j, 由此推知 D 就是 (48) 左方括号中的 ω- 集，故 (48) 得证. 在 (48) 中令 $\alpha\to\infty$ 即得 (49). □

注 1 由 (46) 知对任一常数 t, $P_i(\tau=t)=0$, 故不影响过程的有穷维联合分布及转移概率，可假定 X 在 τ 右连续，这时 (48),(49) 中的 $x(\tau+0)$ 可换为 $x(\tau)$; 以后永远如此假定.

(五) (q_i) 的有界性条件. 由 (46),(47) 可见， q_i 的大小关系到质点的转移速度，即 q_i 越大，则停留在 i 的时间越短，因而转移越快；反之则转移慢. 如果 (q_i) 有界，即存在常数 c, 使 $q_i<c$(一切 i) 时，以后会看到，这时在任一有限区间 $[0,a]$ 中，以概率 1 只有有穷多个跳跃点，因而过程 X 的样本函数以概率 1 是跳跃函数. 直观地说， (46),(49) 表示： (q_i) 决定转移速度，而 (q_{ij}/q_i) 则决定在跳跃点的转移概率， $i\neq j$.

试给出 (q_i) 有界的一个充要条件：

定理 7 (q_i) 有界的充要条件是条件 (2) 对 i 一致成立. 这时 (27) 也对 i 一致成立.

证 由 (29),(31) 得

$$p_{ii}(t)=e^{-\frac{f(t)}{t}t}\geqslant e^{-q_it} \tag{51'}$$

故如 (q_i) 有上界为 $c \geqslant 0$, 则

$$P_{ii}(t) \geqslant e^{-ct}; \quad 1 - p_{ii}(t) \leqslant 1 - e^{-ct}$$

对 $\varepsilon > 0$, 存在 $B > 0$, 使 $1 - e^{-ct} < \varepsilon$, $0 \leqslant t \leqslant B$, 故

$$1 - p_{ii}(t) < \varepsilon; \quad 一切 i, \quad 0 \leqslant t \leqslant B \tag{52}$$

故得证 (2) 对 i 的一致性.

反之, 设 (52) 成立. 对任意一组常数 $0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n = B$, 定义

$$_v p_{ii} = \begin{cases} 1, & v = 0 \\ P_i(x_{\tau_j} = i, j = 0, 1, \cdots, v), & n \geqslant v \geqslant 1 \end{cases}$$

则

$$1 - \varepsilon \leqslant p_{ii}(B) = {}_n p_{ii} + \sum_{v=0}^{n-2} \sum_{j \neq i} {}_v p_{ii} p_{ij}(\tau_{v+1} - \tau_v) p_{ji}(B - \tau_{v+1})$$

$$\leqslant {}_n p_{ii} + \varepsilon \sum_{v=0}^{n-2} \sum_{j \neq i} {}_v p_{ii} p_{ij}(\tau_{v+1} - \tau_v) \leqslant {}_n p_{ii} + \varepsilon [1 - {}_n p_{ii}]$$

因而

$$(1 - \varepsilon)[1 - {}_n p_{ii}] \leqslant 1 - p_{ii}(B) \leqslant \varepsilon \tag{53}$$

在以 (p_{ij}) 为转移概率矩阵的马氏链中取一完全可分的修正 X, 由 (53) 及 (44) 得

$$(1 - \varepsilon)[1 - e^{-q_i B}] \leqslant 1 - p_{ii}(B) \leqslant \varepsilon \tag{54}$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{3}$, 由上式得 $e^{-q_i B} \geqslant \frac{1}{2}$, 故 (q_i) 有界.

最后, 当 B 充分小时, 由 (51)′ 及 (54) 得

$$(1 - \varepsilon) \frac{1 - e^{-q_i B}}{B} \leqslant \frac{1 - p_{ii}(B)}{B} \leqslant \frac{1 - e^{-q_i B}}{B}$$

如 (q_i) 有上界 c, 则由上式经简单计算后得

$$\left| \frac{1 - p_{ii}(B)}{B} - q_i \right| \leqslant \frac{c^2}{2} B$$

这得证 (27) 对 i 的一致性. □

注 2 如 E 只含有穷多个状态, 则 (2) 对 i 一致成立, 只要标准性条件满足.

注 3 设 (p_{ij}) 为广转移矩阵, 如果它是标准的, 即如

$$p_{ii}(t) \to 1 \quad (t \to 0, i \in E) \tag{55}$$

引进附加状态 a 后可化它为标准转移矩阵, 因而可利用本节的结果. 例如可证 $p'_{ij}(t)$ 存在并于 $(0, \infty)$ 连续等等.

§13.3 向前与向后微分方程组

(一) 设 (p_{ij}) 是标准转移矩阵，有密度矩阵为

$$Q=(q_{ij}),\ q_{ij}=\lim_{t\to 0+}\frac{p_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t} \tag{1}$$

对 $t\geqslant 0, h>0$, 有 [1]

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}=\frac{p_{ii}(h)-1}{h}p_{ii}(t)+\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t) \tag{2}$$

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}=p_{ij}(t)\frac{p_{jj}(h)-1}{h}+\sum_{k\neq j}p_{ik}(t)\frac{p_{kj}(h)}{h} \tag{3}$$

以下总设

$$q_i\equiv -q_{ii}<\infty,\quad (i\in E) \tag{4}$$

令 $h\to 0$ 得

$$p'_{ij}(t)\geqslant -q_ip_{ij}(t)+\sum_{k\neq i}q_{ik}p_{kj}(t) \tag{5}$$

$$p'_{ij}(t)\geqslant -p_{ij}(t)q_j+\sum_{k\neq j}p_{ik}(t)q_{kj} \tag{6}$$

如果上二式取等号，我们就得到两组线性微分方程，分别称为 **向后** 和 **向前方程**, 它们是 Колмогоров 得到的，故也称为 Колмогоров(**柯氏**) 方程，以 $P'(t)$ 表矩阵 $(p'_{ij}(t))$, 可把它们写成矩阵方程：对 $t\geqslant 0$,

$$P'(t)=QP(t)\ \text{(向后方程组)} \tag{7}$$

$$P'(t)=P(t)Q\ \text{(向前方程组)} \tag{8}$$

对一般的标准转移矩阵，即使一切 $q_i<\infty$, 也未必满足 (7) 或 (8). 下面分别讨论 (7) 及 (8) 成立的充要条件.

引理 1 设 $q_i<\infty$, 则

$$\sum_j|p'_{ij}(t)|\leqslant 2q_i\quad (t\geqslant 0) \tag{9}$$

证 由 §2(31) 及其下一式

$$\frac{1}{h}(1-p_{ii}(h))=\frac{1}{h}(1-e^{-f(h)})\leqslant\frac{f(h)}{h}\leqslant q_i \tag{10}$$

记 $\delta_{ij}(t,t+s)=[p_{ij}(t+s)-p_{ij}(t)]/s$, $(t>0,s>0)$, 得

$$\delta_{ij}(t,t+s)\geqslant\frac{p_{ii}(s)-1}{s}p_{ij}(t)\geqslant -q_ip_{ij}(t)$$

---

[1] 在 §2 定理 2 中已证明 $p'_{ij}(t)$ 存在，故只要考虑 $p_{ij}(t)$ 的右导数.

对 $j \in A(\subset E)$ 求和，得

$$\sum_{j \in A} \delta_{ij}(t, t+s) \geqslant -q_i \tag{11}$$

另方面，由 $\sum_j \delta_{ij}(t, t+s) = 0$, 知

$$\sum_{j \in A} \delta_{ij}(t, t+s) = -\sum_{j \overline{\in} A} \delta_{ij}(t, t+s) \leqslant q_i$$

在 (11) 及上式中取 $A = (j : \delta_{ij}(t, t+s) \geqslant 0)$, 即知

$$\sum_j |\delta_{ij}(t, t+s)| = \sum_{j \in A} \delta_{ij}(t, t+s) - \sum_{j \overline{\in} A} \delta_{ij}(t, t+s) \leqslant 2q_i$$

令 $s \to 0$ 便得证 (9). □

称密度矩阵 Q 为 **保守的**, 如果

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} = -q_{ii} \equiv q_i < \infty \quad (i \in E) \tag{12}$$

以下设 $X = \{x_t, t \geqslant 0\}$ 是以 (p_{ij}) 为转移概率矩阵的完全可分的马氏链.

定理 1 设 $q_i < \infty (i \in E)$, 则下列三条件等价:

1° 向后方程组 (7) 成立;

2° 密度矩阵 Q 保守;

3° 对任意固定的 $t_0 \geqslant 0$, 几乎一切样本函数具有性质：或者 x_t 在 $[t_0, \infty)$ 中恒等于一常数 [1]; 或者 x_t 在 $[t_0, \infty)$ 中有不连续点，那么这时必有第一个不连续点，而且它是一跳跃点.

证 1° → 2°: 改写 (7) 为

$$p'_{ij}(t) = -q_i p_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t), \quad (i, j \in E) \tag{13}$$

对 j 求和并利用 $\sum_j p_{ij}(t) = 1$, 得

$$\sum_j p'_{ij}(t) = -q_i + \sum_{k \neq i} q_{ik} \tag{14}$$

两边对 t 自 0 积分到 s, 得

$$\int_0^s \left[\sum_j p'_{ij}(t)\right] dt = -q_i s + \sum_{k \neq i} q_{ik} s \tag{15}$$

由引理 1 及 Fubini 定理

$$\int_0^s \left[\sum_j p'_{ij}(t)\right] dt = \sum_j \int_0^s p'_{ij}(t) dt = \sum_j p_{ij}(s) - 1 = 0$$

[1] 此常数可依赖于 ω.

由此及 (15) 即得 Q 的保守性.

$2^\circ \to 3^\circ$: 由齐次性只要考虑 $t_0=0$. 如果 $q_i=0$, 则 i 是吸引状态，故 x_t 在 $[0,\infty)$ 中以 P_i 概率 1 恒等于常数. 如 $q_i>0$, 则由 $\sum\limits_{j\neq i}\frac{q_{ij}}{q_i}=1$ 及 §2(49) 式，以 P_i 概率 1, x_t 在 $[0,\infty)$ 有不连续点，其中存在第一个不连续点 τ, 它是跳跃点.

$3^\circ \to 1^\circ$: 设 $x_{t_0}=i$. 于 t_0+t 时转移到 j 的方式至少有两种：一是在 $[t_0,t_0+t]$ 中没有不连续点而转移到 j, 发生这种转移的概率为 $\delta_{ij}e^{-q_it}$ (参看 §2(44)); 二是在 $[t_0,t_0+t]$ 中有不连续点，而且存在第一个，它是一跳跃点，发生这种转移的概率是

$$\sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i(t-s)}q_{ik}p_{kj}(s)\,ds$$

因此

$$p_{ij}(t)\geqslant\sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i(t-s)}q_{ik}p_{kj}(s)ds+\delta_{ij}e^{-q_it} \tag{16}$$

而二边之差

$$p_{ij}(t)-\sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i(t-s)}q_{ik}p_{kj}(s)ds-\delta_{ij}e^{-q_it} \tag{17}$$

则是发生其它种转移的概率；然而在假定 3° 下，后一概率为 0, 故 (17) 中值为 0 而 (16) 取等号，从而

$$p_{ij}(t)=\sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i(t-s)}q_{ik}p_{kj}(s)ds+\delta_{ij}e^{-q_it} \tag{18}$$

在此式中对 t 求导数即得 (13). □

定理 2 设 $q_i<\infty(i\in E)$, 则向前方程组 (8) 成立的充分条件是：对任意固定的 $t_0>0$, 几乎一切样本函数 x_t 在 $[0,t_0]$ 中或者恒等于一常数；或者在 $[0,t_0)$ 中有不连续点，那么这时必有最后一个不连续点，而且它是一跳跃点.

证 利用定理 1,$3^\circ\to 1^\circ$ 中同样的想法，不过要把最后的不连续点代替那里的第一个不连续点. 设 $0<t_1<t_2$ 而且 $x_0=i$, 要在 t_2 时转移到 j 至少有两种方式：一是于 t_1 时到 j, 然后在 $[t_1,t_2]$ 中不发生转移 (即无不连续点) 而于 t_2 时到 j, 对应的概率是 $p_{ij}(t_1)e^{-q_j(t_2-t_1)}$; 二是在 $[t_1,t_2]$ 中有不连续点，而且有最后一个，它还是跳跃点，经此次跳跃后来到 j, 对应的概率是

$$\sum_{k\neq j}\int_{t_1}^{t_2}p_{ik}(s)q_{kj}e^{-q_j(t_2-s)}ds$$

因此

$$p_{ij}(t_2)-p_{ij}(t_1)e^{-q_j(t_2-t_1)}\geqslant\sum_{k\neq j}\int_{t_1}^{t_2}p_{ik}(s)q_{kj}e^{-q_j(t_2-s)}ds \tag{19}$$

显然，定理中所述的充要条件等价于 (19) 式取等号. 以 t_2-t_1 除 (19) 两边，并令 t_2 及 t_1 都趋于 t. 即得

$$p'_{ij}(t)\geqslant -p_{ij}(t)q_j+\sum_{k\neq j}p_{ik}(t)q_{kj} \tag{20}$$

由于 (20) 中取等号等价于 (19) 中取等号，故得所欲证. □

(二) 关于 Q 过程. 柯氏方程 (7),(8) 的意义，自然不在于去验证已给的 $(p_{ij}(t))$ 满足 (7) 或 (8), 而是在于当已知 Q 时，可通过解 (7) 或 (8) 而求出转移矩阵 $(p_{ij}(t))$. 上面已经看到，在实际问题中， Q 往往比 $(p_{ij}(t))$ 容易求到.

因此，自然地提出反面的问题：设已给矩阵 $Q=(q_{ij}),\ i,j\in E$, 满足条件

$$0\leqslant q_{ij}\ (i\neq j);\quad \sum_{j\neq 1}q_{ij}=-q_{ii}\equiv q_i<\infty \tag{21}$$

试求向后方程组 (7) 的标准转移函数解 (或标准广转移函数解), 亦即求 (7) 的满足 §1 中条件 (A),(B),(C),(D) 及标准性条件的解 (或满足 (A),(B′):$\sum\limits_j p_{ij}(t)\leqslant 1$, (C),(D) 及标准性条件的解). 注意，用微分方程的话说， (D) 是开始条件. 对向前方程 (8), 同样也可提出类似的问题.

这样的解是否存在？是否唯一？如不唯一，如何求出全部这样的解？

前两个问题容易解决，下面就来叙述：但求全部解的问题迄今还未完全解决，在第六章中将对一类特殊的 Q 来讨论此问题.

方程组 (7) 的求解问题与 Q 过程的构造问题等价. 这可如下说明.

设已给满足 (21) 的矩阵 $Q=(q_{ij})$, 如果转移矩阵 (或广转移矩阵)(p_{ij}) 与 Q 有下列关系：

$$\lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t}=q_{ij}\quad (i,j\in E) \tag{22}$$

就称 (p_{ij}) 为 **Q转移矩阵**(或 **Q广转移矩阵**), 以 Q 转移矩阵 (p_{ij}) 为转移概率的马氏链 $X=\{x_t,t\geqslant 0\}$ 称为 **Q过程**.

注意，满足 (22) 的 (p_{ij}) 可能不唯一，因此， Q 转移矩阵 (因之 Q 过程) 一般不唯一，即不为 Q 所唯一决定.

如果把具有相同的 (p_{ij}) 的 Q 过程等同起来，就是说，如果两个马氏链 X_1,X_2 具有相同的 (p_{ij}), 那么就把 X_1,X_2 看成是同一马氏链而不加区别，则 Q 转移矩阵与 Q 过程是一一对应的. 于是一个 Q 过程就是指一个 Q 转移矩阵 (P_{ij}).

下定理表示， Q 转移矩阵与向后方程组 (7) 的转移矩阵解也是一一对应的. 这样一来，上面对方程组 (7) 提出的三个问题就分别等价于下列关于 Q 过程的三个问题：满足 (22) 的过程是否存在？是否唯一？如不唯一，如何构造出全部 Q 过程？

定理 3 设已给满足 (21) 的矩阵 Q, 则标准转移矩阵 (p_{ij}) 是 Q 转移矩阵的充要条件是它满足向后方程组 (7).

证 设 (p_{ij}) 满足 (22), 由于 Q 满足 (21), 根据定理 1 中 1°,2° 的等价性即知 (p_{ij}) 满足 (7).

反之，设 (p_{ij}) 满足 (13). 由标准性知 $p_{ij}(t)$ 在 T 上连续；由 $\sum\limits_{k\neq i}q_{ik}=q_i<\infty$ 可在 (13) 中求和号下对 t 取极限；由 (13) 还知 $p'_{ij}(t)$ 在 T 连续，在 (13) 中令 $t\to 0$ 即得 $p'_{ij}(0)=q_{ij}$, 此即 (22). □

注 1 Q 转移矩阵必是标准的，这由 (22) 及 $q_i<\infty$ 推出，定理 3 中标准性假设只在证充分性时用到.

(三) 现在来研究唯一性问题，采用概率的方法，这种方法的本质是考察运动的轨道 (即样本函数) 的性质.

引理 2 设 $X=\{x_t,t\geqslant 0\}$ 是具有标准转移矩阵 (p_{ij}) 的完全可分马氏链，$q_i<\infty(i\in E)$, 又 τ 是满足下列条件的非负随机变量:

1° 对每 $s>0,(\tau<s)\in\mathcal{F}'\{x_t,t\leqslant s\}$ [1]; (23)

2° 以概率 1 存在右极限

$$x(\tau+0)=\lim_{t\to\tau+0}x(t)$$

则 $Y=\{y_t,t\geqslant 0\}$ 是具有与 X 相同的转移矩阵 (p_{ij}) 的马氏链，其中 $y_t=x_{\tau+t}$; 而且 Y 也是完全可分的.

证 由于存在 $x(\tau+0)$ 及 E 的可列性，以概率 1 存在 $\varepsilon=\varepsilon(\omega)>0$, 使 $x(t)$ 在 $(\tau,\tau+\varepsilon)$ 中等于常数 (此常数依赖于 ω), 于是除一零测集外

$$\{x(\tau+0)=j\}=\lim_{n\to\infty}\bigcup_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{r}{2^n}\leqslant\tau<\frac{r+1}{2^n},\ x\left(\frac{r+1}{2^n}\right)=j\right\}$$

这表示 $x(\tau+0)$ 是一随机变量而且

$$P\{x(\tau+0)=j\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{\infty}P\left\{\frac{r}{2^n}\leqslant\tau<\frac{r+1}{2^n},\ x\left(\frac{r+1}{2^n}\right)=j\right\}$$

类似地知 $x(\tau+t)$ 也是随机变量. 由 1° 及马氏性得

$$\begin{aligned}P\{x(\tau+t)=k\}&=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\sum_j\sum_{r=0}^{\infty}P\left\{\frac{r}{2^n}\leqslant\tau<\frac{r+1}{2^n},x\left(\frac{r+1}{2^n}\right)=j,\right.\\&\qquad\left.x\left(\frac{r+1}{2^n}+s\right)=k,|s-t|<\varepsilon\right\}\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\sum_j P\{x(\tau+0)=j\}p_{jk}(t-\varepsilon)\exp\{-q_k2\varepsilon\}\\&=\sum_j P(x(\tau+0)=j)p_{jk}(t)\end{aligned}\tag{24}$$

更一般地可得，对 $0\leqslant t_1<\cdots<t_l,k_i\in E$, 有

$$\begin{aligned}&P(x(\tau+t_i)=k_i,i=1,\cdots,l)\\&\quad=\sum_j P(x(\tau+0)=j)p_{jk_1}(t_1)p_{k_1k_2}(t_2-t_1)\cdots p_{k_{l-1}k_l}(t_l-t_{l-1})\end{aligned}\tag{25}$$

此得证 Y 是具有转移矩阵 (p_{ij}) 的马氏链.

由 §2 引理 3, 为证 Y 完全可分，只要证它关于非负有理数集 $\{r_i\}$ 可分，又由于证明开头时所指出的事实，为此只要证明，对几乎一切样本函数 Y, 由它作 $\delta\equiv\delta(\omega)>0$ 推移后的函数 $Y_\delta(t)=Y(\delta+t)(t\geqslant0)$ 关于 $R=\{r_i\}$ 可分，其中 $\delta<\varepsilon$. 因此，不妨设 τ 以概率 1 取有理数为值. 于是根据

$$X\subset\overline{X}_R\ \ \text{(a.s.)}$$

---

[1] σ 代数 $\mathcal{F}\{x_s,s\leqslant t\}$ 关于 P 的完全化 σ 代数记为 $\mathcal{F}'\{x_s,s\leqslant t\}$.

立得

$$Y \subset \overline{X}_{\tau+R} \subset \overline{Y}_R \quad \text{(a.s.)}$$

其中 $\tau+R$ 表全体形如 $\tau+r_i(r_i \in R)$ 的集. 故得证 Y 关于 R 的可分性. □

现在考虑完全可分的马氏链 $X=\{x_t, t \geqslant 0\}$, 并设它的密度矩阵是保守的, 定义

$$\tau_1(\omega)=\inf(t: x_t(\omega) \neq x_0(\omega)) \tag{26}$$

它是 X 的第一个跳跃点. 以 R 表可分集, 除一 0 测集外, 有

$$(\tau_1(\omega)<s)=\bigcup_{\substack{r_n<s \\ r_n \in R}}\{x(r_n, \omega) \neq x(0, \omega)\} \in \mathcal{F}\{x_t, t \leqslant s\} \tag{27}$$

故可对 $\tau_1(\omega)$ 应用引理 2, 从而知

$$Y_1=\{y_t=x_{\tau_1+t}, t \geqslant 0\}$$

是有相同转移概率的完全可分马氏链, 于是 Y_1 也有第一个跳跃点 $r_1(\omega)$, 而 $\tau_2(\omega)=\tau_1(\omega)+r_1(\omega)$ 显然是 X 的第二个跳跃点. 如此继续, 便得 X 的一列跳跃点 $\tau_i(\omega)$

$$\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \cdots ; \ \tau_n \uparrow \eta \quad \text{(a.s.)} \tag{28}$$

称 $\eta=\eta(\omega)$ 为 X 的 **第一个飞跃点**, 它几乎处处有定义, 而且是跳跃点集的最小的极限点. 显然, 在 $[0, \eta)$ 中, X 的样本函数以概率 1 是跳跃函数, 如果

$$\eta=\infty \quad \text{(a.s.)} \tag{29}$$

则 X 的几乎一切样本函数是跳跃函数.

什么时候 (29) 成立? 一个简单的充分条件是: $\{q_i\}$ 有界 (由 §2 定理 7, 这等价于标准性条件对 i 一致成立). 实际上, 令 $q=\sup q_i$, 则

$$\begin{aligned} P(\tau_{n+1}-\tau_n \geqslant \alpha) &= \sum_i P(\tau_{n+1}-\tau_n \geqslant \alpha |\, x(\tau_n)=i) \cdot P(x(\tau_n)=i) \\ &= \sum_i e^{-q_i \alpha} P(x(\tau_n)=i) \geqslant e^{-q \alpha}, \quad (n \geqslant 0, \alpha \geqslant 0) \end{aligned} \tag{30}$$

其中 $\tau_0 \equiv 0$, 并理解 $\infty-c=\infty(c \leqslant \infty)$, 因而

$$P\Big(\bigcap_{k=1} \bigcup_{n=k}[\tau_{n+1}-\tau_n \geqslant \alpha]\Big) \geqslant \varlimsup_{n \to \infty} P(\tau_{n+1}-\tau_n \geqslant \alpha) \geqslant e^{-q \alpha}$$

这表示有无穷多个 $\tau_{n+1}-\tau_n$ 不小于 α 的概率不小于 $e^{-q \alpha}$, 于是

$$P(\eta=\infty) \geqslant e^{-q \alpha}$$

令 $\alpha \to 0$ 即得证 (29).

这样便证明了下定理的前半部分:

定理 4 (i) 设可分马氏链 X 的转移矩阵 (p_{ij}) 的密度矩阵 Q 是保守的，则以概率 1 存在一随机变量 $\eta(\leqslant\infty)$, 它是跳跃点的最小的极限点，而且在 $[0,\eta)$ 中，几乎一切样本函数是跳跃函数，特别，如 $\{q_i\}$ 有界，则几乎一切样本函数是跳跃函数.

(ii) 反之，设已给一矩阵 $Q=(q_{ij})$ 满足 (21), 则至少存在一个 Q 转移矩阵 (P_{ij}). 只有两种可能性：或者这样的 (p_{ij}) 只有一个，发生这种可能性的充要条件是任一可分 Q 过程的第一个飞跃点 $\eta=\infty$, (a.s.); 或者这样的 (p_{ij}) 有无穷多个，发生这种可能性的充要条件是任一可分 Q 过程的第一个飞跃点 η 以正概率小于 ∞.

证 (ii) 取 Z_1 为任一随机变量，它只取值于 E, 又取非负随机变量 τ_1, 使它与 Z_1 的联合分布由下式决定：

$$P(\tau_1\geqslant\alpha|Z_1=i)=e^{-q_i\alpha}\ (\alpha\geqslant0,q_i=-q_{ii}) \tag{31}$$

(如 $q_i=0$, 则取 $\tau_1\equiv\infty$), 如果 $Z_1,\cdots,Z_n;\tau_1,\cdots,\tau_n$ 都已取定，则取 Z_{n+1}, 使 Z_{n+1} 取值于 E 而且它与 $Z_1,\cdots,Z_n,\tau_1,\cdots,\tau_n$ 的联合分布满足下式：

$$P(Z_{n+1}=j|\tau_1,\cdots,\tau_n;Z_1,\cdots,Z_n)=\frac{q_{ij}}{q_i},\ \text{如}\,Z_n=i \tag{32}$$

再取非负随机变数 τ_{n+1}, 使对任 $\alpha\geqslant0$

$$P(\tau_{n+1}-\tau_n\geqslant\alpha|\tau_1,\cdots,\tau_n,Z_1,\cdots,Z_{n+1})=e^{-q_i\alpha}\quad\text{如}\,Z_{n+1}=i \tag{33}$$

这里我们假定了：如 $Z_n=i$, 则 $q_i>0$. 若 $q_i=0$, 应补定义

$$\left.\begin{aligned}&P(Z_{n+1}=i|\ \tau_1,\cdots,\tau_n;Z_1,\cdots,Z_n)=1,\quad\text{如}\,Z_n=i,q_i=0\\&P(\tau_{n+1}=\infty|\ \tau_1,\cdots,\tau_n;Z_1,\cdots,Z_{n+1})=1,\quad\text{如}\,Z_{n+1}=i,q_i=0\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

由定义可见 $0\leqslant\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant\cdots$, $\tau_n\uparrow\eta^{(1)}$ (a.s.).

今定义

$$x_t(\omega)=\begin{cases}Z_1(\omega), & \text{如}\,0\leqslant t<\tau_1(\omega)\\Z_2(\omega), & \text{如}\,\tau_1(\omega)\leqslant t<\tau_2(\omega)\\\cdots\ \cdots\cdots\cdots\end{cases} \tag{35}$$

因而对几乎一切 ω, $x_t(\omega)$ 在 $[0,\eta^{(1)}(\omega))$ 中有定义，如 $P(\eta^{(1)}(\omega)=\infty)=1$, 则略去一 0 测集后，$x_t(\omega)$ 对一切 $t\geqslant0$ 完全确定.

如果 $P(\eta^{(1)}(\omega)=\infty)<1$, 需要补定义 $x_t(\omega)$ 于 $[\eta^{(1)},\infty)$. 一种补定义的方法由 Doob 提出，如下：任取一与 $Z_n,\tau_n(n=1,2,\cdots)$ 独立的随机变量 $Z_1^{(1)}$, 它取值于 E, 分布为 $\{\pi_i\}$, $(i\in E)$, 视 $\eta^{(1)}$ 如同 0, 视 $Z_1^{(1)}$ 如同 Z_1 而继续上面的造法：取 $\tau_1^{(1)}$ 使

$$P(\tau_1^{(1)}-\eta^{(1)}\geqslant\alpha|\tau_1,\tau_2,\cdots,\eta^{(1)};Z_1,Z_2,\cdots,Z_1^{(1)})=e^{-q_i\alpha}\ \text{如}\,Z_1^{(1)}=i,\ q_i>0$$

并定义 $x_t(\omega)=Z_1^{(1)}(\omega)$, 如 $\eta^{(1)}(\omega)\leqslant t<\tau_1^{(1)}(\omega),\cdots$; 如此仿上继续，直到第二个极限点 $\eta^{(2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n^{(1)}$, 又视 $\eta^{(2)}$ 如同 0, 视 $Z_1^{(2)}$ 如同 Z_1, 这里 $Z_1^{(2)}$ 有相同的分布 $\{\pi_i\}$, 并与 $Z_n,\tau_n,Z_n^{(1)},\tau_n^{(1)}$, $n=1,2,\cdots$ 独立. 这样下去，得 $\{\eta^{(n)}\}$. 不难看出

$$\lim_{n\to\infty}\eta^{(n)}=\infty,\quad\text{(a.s.)} \tag{36}$$

因而略去一 0 测集外，对一切 $t \geqslant 0$ 与 $\omega, x_t(\omega)$ 有定义. 由于分布 $\pi = \{\pi_i\}$ 有无穷多种取法，这样的过程也有无穷多个.

现在证明所造出的 $X = \{x_t, t \geqslant 0\}$ 是 Q 过程. 为此利用下事实：如随机变量 y 有指数分布

$$P(y \geqslant t) = e^{-ct} \quad (c > 0)$$

则对 $s \geqslant 0, t \geqslant 0$ 有

$$P(y \geqslant s + t | \, y > s) = P(y \geqslant t) = e^{-ct}$$

由此知：如于时刻 s 停止上面的造法，因而 $x_t(\omega)$ 只定义于 $t \leqslant s$, 然后以 $x_s(\omega)$ 的分布为开始分布，视 s 如同 0 并重新开始上面的构造而得 $\{y_u(\omega), u \geqslant 0\}$, 则过程

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_t(\omega) &= x_t(\omega), \quad 如 t \leqslant s \\ &= y_u(\omega), \quad 如 t = s + u \end{aligned}$$

与过程 $\{x_t(\omega), t \geqslant 0\}$ 是同一过程，这说明在已知现在 s 时，将来与过去独立，故过程是马氏的；而且 $P(x_t = j | \, x_s = i)$ 只依赖于 $t - s$.

所造的过程的转移矩阵 (p_{ij}) 显然满足

$$P_{ii}(t) \geqslant P_i(\tau_1 \geqslant t) = e^{-q_i t} \to 1 \quad (t \to 0) \tag{37}$$

$$P_i(x(\tau_1) = j) = \frac{q_{ij}}{q_i} \tag{38}$$

故 (p_{ij}) 是标准的，而且是 Q 转移矩阵. 由于 (p_{ij}) 依赖于 $\{\pi_i\}$, 而 $\{\pi_i\}$ 有无穷多种取法，故 Q 转移矩阵也有无穷多个.

这样便证明了 (ii) 中只有两种可能性，而且 $\eta = \infty$ (a.s.) 及 $P(\eta = \infty) < 1$ 分别是这两种可能性出现的充分条件，从而分别也是必要条件. □

由定理 4 立得

系 1 对满足 (21) 的 Q, 向后方程 (7) 恒有标准转移矩阵解；这种解如不唯一，则必有无穷多个.

在定理 4(ii) 的证明中所造出的 Q 过程称为 Doob**过程**, 它的转移概率矩阵由矩阵 Q 及 $x(\eta)$ 的分布 $\pi = \{\pi_i\}$ 所决定，故宜记此过程为 (Q, π)**过程**. 令后我们会看到，Doob 过程是一类较简单的 Q 过程，它们远不能穷尽一切 Q 过程.

(**四**) 为了具体地求出 (7)(及 (8)) 的一个标准广转移函数解，设 $X = \{x_t, t \geqslant 0\}$ 是一 Q 过程，并以 ${}_np_{ij}(t)$ 表在 $x_0 = i$ 的条件下，于 t 时位于 j, 而且这转移只由 n 个跳跃完成的，亦即

$${}_np_{ij}(t) = P_i(x_t = j, \ 在 \ [0, t] \ 中只有 \ n \ 个断点,它们都是跳跃点) \tag{39}$$

易见

$$\left.\begin{aligned} {}_0p_{ij}(t) &= \delta_{ij} e^{-q_i t} \\ {}_{n+1}p_{ij}(t) &= \sum_{k \neq i} \int_0^t e^{-q_i s} q_{ik\,n} p_{kj}(t - s) ds \quad (n \geqslant 0) \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

${}_n p_{ij}(t)$ 也等于

$$\left.\begin{aligned}&{}_0p_{ij}(t)=\delta_{ij}e^{-q_it}\\&{}_{n+1}p_{ij}(t)=\sum_{k\neq j}\int_0^t {}_np_{ik}(s)q_{kj}e^{-q_j(t-s)}ds,\quad (n\geqslant 0)\end{aligned}\right\}\tag{41}$$

(40),(41) 的成立可由与 (18),(19) 的推导方法得到，也可仿 §2 定理 6 而严格证明.

今令

$$f_{ij}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}{}_np_{ij}(t)\tag{42}$$

因而 $f_{ij}(t)$ 是自 i 出发，经有穷多次跳跃，历时间 t 而转移到 j 的概率，即

$$f_{ij}(t)=P_j(x_t=j,\eta>t)\tag{43}$$

其中 η 是 X 的第一个飞跃点. 由此推出

$$p_{ij}(t)=P_i(x_t=j)\geqslant f_{ij}(t)\tag{44}$$

$$f_i(t)\equiv P_i(\eta\leqslant t)=1-\sum_j f_{ij}(t)\tag{45}$$

注意 $f_i(t)$ 是在 $x(0)=i$ 下，η 的条件分布函数.

引理 3 (f_{ij}) 是标准广转移矩阵.

证 根据 $f_{ij}(t)$ 的概率意义，$0\leqslant f_{ij}(t)\leqslant 1$, 而且

$$f_{ij}(s+t)=\sum_k f_{ik}(s)f_{kj}(t)$$
$$f_{ij}(0)=\delta_{ij}$$

由 (44), $\sum\limits_j f_{ij}(t)\leqslant\sum\limits_j p_{ij}(t)=1$. 标准性由下式推出：

$$f_{ij}(t)\geqslant {}_0p_{ij}(t)=\delta_{ij}e^{-q_it}\to\delta_{ij}\quad(t\to 0).\ \square$$

定理 5 (i) (f_{ij}) 是向后方程组 (7) 的标准广转移函数解；

(ii) (f_{ij}) 是 (7) 的 **最小解**, 就是说：如果 (g_{ij}) 是 (7) 的任一广转移函数解，则

$$g_{ij}(t)\geqslant f_{ij}(t)\quad(t\geqslant 0,i,j\in E)\tag{46}$$

(iii) (f_{ij}) 也是向前方程组 (8) 的解.

证 在 (40) 中对 n 求和，改换变数后得

$$f_{ij}(t)=\sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i(t-s)}q_{ik}f_{kj}(s)ds+\delta_{ij}e^{-q_it}\tag{47}$$

(比较 (18)), 对 t 微分后即得证 (i). 类似可证明 (iii). 如 (g_{ij}) 满足 (7), 亦即满足 (13), 对 t 积分得

$$g_{ij}(t)=\sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i(t-s)}q_{ik}g_{kj}(s)ds+\delta_{ij}e^{-q_it}\tag{48}$$

因此

$$g_{ij}(t) \geqslant \delta_{ij}e^{-q_i t} = {}_0p_{ij}(t)$$

今设

$$g_{ij}(t) \geqslant \sum_{v=0}^{n} {}_vp_{ij}(t), \quad (i,j \in E)$$

则由 (48) 得

$$\begin{aligned} g_{ij}(t) &\geqslant \sum_{k\neq i}\int_0^t e^{-q_i(t-s)}q_{ij}\left(\sum_{n=0}^{n} {}_vp_{ij}(s)\right)ds + \delta_{ij}e^{-q_i t} \\ &= \sum_{v=0}^{n} {}_{v+1}p_{ij}(t) + \delta_{ij}e^{-q_i t} = \sum_{v=0}^{n+1} {}_vp_{ij}(t) \end{aligned}$$

这得证对任一非负整数 n, 有

$$g_{ij}(t) \geqslant \sum_{v=0}^{n} {}_vp_{ij}(t)$$

令 $n\to\infty$ 即得 (46). □

系 2 向后方程组 (7) 的标准转移函数解唯一 (亦即 Q 过程唯一) 的充要条件是 [1]

$$\sum_j f_{ij}(t) = 1 \quad (t \geqslant 0) \tag{49}$$

证 由 (44) 及 (49)

$$1 = \sum_j p_{ij}(t) \geqslant \sum_j f_{ij}(t) = 1$$

再由 (44), $p_{ij}(t) = f_{ij}(t)$, 即

$$P_i(x_t = j) = P_i(x_t = j, \eta > t) \quad (t \geqslant 0)$$

从而 $P_i(\eta = \infty) = 1 \ (i \in E)$,

$$P(\eta = \infty) = \sum_i P(x(0) = i)P_i(\eta = \infty) = 1$$

根据定理 4(ii) 即知 Q 过程 (亦即 Q 转移函数) 唯一，这得证 (49) 的充分性. 逆转推理即可推出它的必要性. □

---

[1] 在 §15.3 系 1 中还要给出它充要条件.

第十四章　样本函数的性质

§14.1　常值集与常值区间

(一)　设 $X=\{x_t(\omega),t\geqslant 0\}$ 为定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的马氏链，取值于 $E=(i)$, E 是此链的最小状态空间，就是说，对任一 $i\in E$, 必存在 $t\geqslant 0$, 使

$$P(x_i=i)>0 \tag{1}$$

在本章中，如无特别声明，我们总设 X 的转移矩阵 (p_{ij}) 是标准的.

$$\lim_{t\to 0+} p_{ii}(t)=1 \quad (i\in E) \tag{2}$$

(p_{ij}) 的密度矩阵仍如上章一样记为 $Q=(q_{ij})$, 并令 $q_i=-q_{ii}$.

在样本函数的研究中，我们假定 X 是可分过程，因而需要引入一附加状态，记为 ∞ [1] 由 §3.1 注 1 知

$$P(x_t=\infty)=0 \quad (t\geqslant 0) \tag{3}$$

虽然如此，我们仍不能不考虑 ∞, 因为可能对某些过程 X, 有

$$P(\omega:\ 存在t\geqslant 0,\ 使x_t(\omega)=\infty)=1 \tag{4}$$

对样本函数 $x(\cdot,\omega)$ 及 $i\in E\cup\{\infty\}$, 考虑 t- 集

$$S_i(\omega)=(t:x_t(\omega)=i) \tag{5}$$

称 $S_i(\omega)$ 为 i-**常值集**, 或简称 i-**集**, 并以 $\overline{S_i(\omega)}$ 表 $S_i(\omega)$ 在实数中通常欧氏距离所产生拓扑下的闭包. 当 $\omega\in\Omega$ 固定时，$S_i(\omega)$ 及 $\overline{S_i(\omega)}$ 都是 $[0,\infty)$ 中的集. 回忆瞬时状态的定义，并称非瞬时的状态 (即逗留或吸引状态) 为 **稳定状态**. 显然

$$[0,\infty)=\bigcup_{i\ 稳定} S_i(\omega)\cup\bigcup_{j\ 瞬时} S_j(\omega)\cup S_\infty(\omega) \tag{6}$$

对一切 $\omega\in\Omega$ 成立. 因此，为了研究样本函数 $x(\cdot,\omega)$ 在 $[0,\infty)$ 的性质，必须首先考察 $S_i(\omega)$ 的结构. 注意，对 $t\in S_i(\omega)$, $x(\cdot,\omega)$ 等于常值 i.

如 X 可分，在 §13.2 中证明了：不论 i 是否稳定.

$$P_{s,i}(x_{s+u}\equiv i,0\leqslant u\leqslant t)=e^{-q_it} \quad (i\neq\infty) \tag{7}$$

我们取这式为以下研究的出发点，分别考虑 i 为稳定，瞬时或 ∞ 三种情况.

---

[1] 不要把它与表示“无限大”的 ∞ 相混.

引理 1 设 X 可分. (i) 如 i 稳定，则

$$P_{s,i}(S_i(\omega) \text{ 包含一个含 } s \text{ 的开区间}) = 1 \quad (s > 0) \tag{8}$$

(ii) 如 i 瞬时，则

$$P(S_i(\omega) \text{ 含某一开区间}) = 0 \tag{9}$$

证 以 A, B 分别表 (8),(9) 左方括号中的事件. 令

$$P_i(s) \equiv P(x_s = i) = \sum_j P_j(0)p_{ji}(s) > 0 \tag{10}$$

由 $p_{ji}(s)$ 的连续性及 $\sum\limits_j P_j(0) = 1$, 知 $P_i(s)$ 在 $[0, \infty)$ 连续. 如 $q_i < \infty$, 由 (7)

$$\begin{aligned}
&P_{s,i}(x_u \equiv i, s - \varepsilon \leqslant u < s + \varepsilon) \\
&\quad = P(x_{s-\varepsilon} = i; x_u \equiv i, s - \varepsilon < u < s + \varepsilon)/P(x_s = i) \\
&\quad = P(x_{s-\varepsilon} = i)P(x_u \equiv i, s - \varepsilon < u < s + \varepsilon)| \, x_{s-\varepsilon} = i)/P(x_s = i) \\
&\quad = P_i(s - \varepsilon)e^{-2q_i\varepsilon} \cdot P_i(s)^{-1}
\end{aligned} \tag{11}$$

令 $\varepsilon \to 0$, 左方趋于 $P_{s,i}(A)$, 右方趋于 1, 故得 $P_{s,i}(A) = 1$.

其次，由

$$P(x_t \equiv i, r \leqslant t < r + \varepsilon) = P(x_r = i)P_{r,i}(x_t \equiv i, r < t < r + \varepsilon)$$

令 $B_{r,\varepsilon} = (x_t \equiv i, r \leqslant t < r + \varepsilon)$. 如 $q_i = \infty$, 则由 (7),$P(B_{r,\varepsilon}) = 0$. 由于 $B \subset \bigcup\limits_r \bigcup\limits_\varepsilon B_{r,\varepsilon}$ (r 遍历非负有理数), 得

$$P(B) \leqslant \sum_{r,n} P(B_{r,\frac{1}{n}}) = 0. \ \square$$

称 $S_i(\omega)$ 中的开区间为一 **i-常值区间** 或 **i-区间**, 如果它在下列意义下是最大的：它不是含于 $S_i(\omega)$ 中的另一开区间的真正子区间. 由引理 1 知 i- 区间只有对稳定的 i 才有意义.

i- 区间的个数以概率 1 显然不超过可列多个. 以 $\xi_i(s,t)$ 表右端点在 (s,t) 中的 i- 区间的个数，它是一随机变量，取非负整数及 ∞ 为值.

引理 2 设 X 可分， $q_i < \infty$, 则对任意 $0 \leqslant s < t < \infty$,

$$P(\xi_i(s,t) < \infty) = 1$$

而且

$$E\xi_i(s,t) \leqslant q_i(t - s) \tag{12}$$

证 设 R 是可分集，将 $R \cap (s,t)$ 中的点排为 $\{r_1, r_2, \cdots\}$, 再将其中前 $n-2$ 个点加上点 s, t 后按大小排为

$$s = r_1^{(n)} < r_2^{(n)} < \cdots < r_n^{(n)} = t$$

定义随机变量

$$\xi_k^{(n)}(\omega)=1,\quad \text{如}x_{r_{k-1}^{(n)}}(\omega)=i,\ x_{r_k^{(n)}}(\omega)\neq i$$
$$=0,\quad \text{反之}$$
$$\eta^{(n)}(\omega)=\sum_{k=2}^{n}\xi_k^{(n)}(\omega)$$

由 §13.3 (37) 易见

$$\begin{aligned}E\eta^{(n)}&=\sum_{k=2}^{n}E\xi_k^{(n)}=\sum_{k=2}^{n}P(x_{r_{k-1}^{(n)}}=i,\ x_{r_k^{(n)}}\neq i)\\&=\sum_{k=2}^{n}p_i(r_{k-1}^{(n)})[1-p_{ii}(r_k^{(n)}-r_{k-1}^{(n)})]\\&\leqslant\sum_{k=2}^{n}[1-p_{ii}(r_k^{(n)}-r_{k-1}^{(n)})]\leqslant\sum_{k=2}^{n}[1-e^{-q_i(r_k^{(n)}-r_{k-1}^{(n)})}]\\&\leqslant\sum_{k=2}^{n}q_i(r_k^{(n)}-r_{k-1}^{(n)})\leqslant q_i(t-s)\end{aligned}$$

当 n 增大时， $\eta^{(n)}(\omega)$ 不下降，由可分性

$$\xi_i(s,t)=\lim_{n\to\infty}\eta^{(n)}$$

根据积分的单调收敛定理得证 (12); 再由 (12) 知

$$P(\xi_i(s,t)<\infty)=1.\ \square \tag{13}$$

我们注意 (12) 是比 (13) 更强的结论.

i- 区间的内点虽全含于 $S_i(\omega)$ 中，但它们的端点却可能在，也可能不在 $S_i(\omega)$ 中. 由 (13), 我们可以把 $x(\cdot,\omega)$ 的 i- 区间按次序排为 $(a_k(\omega),b_k(\omega))$, 使 $a_1(\omega)<b_1(\omega)\leqslant a_2(\omega)<b_2(\omega)\leqslant\cdots$, (a.s.) [1], 如果说 $b_k(\omega)=a_{k+1}(\omega)$, 根据可分性， $x(b_k,\omega)=i$, 因而 $(a_k(\omega),b_k(\omega))$ 与 $(a_{k+1}(\omega),b_{k+1}(\omega))$ 应连成一更大的 i- 区间，这与 $(a_k(\omega),b_k(\omega))$ 的最大性矛盾. 这样便证明了

$$a_1(\omega)<b_1(\omega)<a_2(\omega)<b_2(\omega)<\cdots,\ \text{(a.s.)} \tag{14}$$

对稳定的 i, 我们已经知道 $S_i(\omega)$ 包含有穷或可列多个 i- 区间， $S_i(\omega)$ 还包含些什么点？下定理解决了 $S_i(\omega)$ 的构造问题，它说明 $S_i(\omega)$ 除含一些 i- 区间外，至多只含这些 i- 区间的端点，因而这定理具有重要的意义. 为完全计，我们把引理 2 的结论也写在此定理中.

定理 1 设 X 可分， i 稳定. 则对几乎一切 ω, 有

$$\bigcup_k(a_k(\omega),b_k(\omega))\subset S_i(\omega)\subset\overline{S_i(\omega)}=\bigcup_k[a_k(\omega),b_k(\omega)] \tag{15}$$

---

[1] 如无特别声明， (a.s.) 系对 P 而言.

而且在任一有限区间 (s,t) 中只有有穷多个 i- 区间，它的个数 $\xi_i(s,t)$ 的平均值满足 (12).

证 由引理 2 只要证明

$$\overline{S_i(\omega)} = \bigcup_k [a_k(\omega), b_k(\omega)] \tag{16}$$

以 R 表可分集，由引理 1(i), 对几乎一切 ω, 每 $r \in R \cap S_i(\omega)$ 含于某 i- 区间中，故存在 $\Omega_0 \subset \Omega$, $P(\Omega_0) = 1$, 使对任 $\omega \in \Omega_0$, 有

(a) 在任一有限区间中，$x(\cdot,\omega)$ 只有有穷多个 i- 区间 $(a_k(\omega), b_k(\omega))$;

(b) $x(\cdot,\omega)$ 关于 B 可分；

(c) $R \cap S_i(\omega) \subset \bigcup_k (a_k(\omega), b_k(\omega))$.

今对 $\omega \in \Omega_0$ 及 $\tau \in S_i(\omega)$, $\tau \overline{\in} R$, 由 (b)τ 必须是 $R \cap S_i(\omega)$ 的极限点，故由 (c) 知 τ 的任一邻域都必定与某 i- 区间相交，这只有两种可能：或者 τ 属于某一 $[a_k(\omega), b_k(\omega)]$; 或者 $\tau \overline{\in} \bigcup_k [a_k(\omega), b_k(\omega)]$, 但在 τ 的左 (或右) 方存在无穷多个互不相交的 i- 区间，它们的长度趋于 0 而端点趋于 τ. 然而由 (a) 知后一种可能性不存在，故 $\tau \in \bigcup_k [a_k(\omega), b_k(\omega)]$. 于是证明了

$$S_i(\omega) \in \bigcup_k [a_k(\omega), b_k(\omega)]$$

再由 (a) 知 $\overline{S_i(\omega)} \subset \bigcup_k [a_k(\omega), b_k(\omega)]$. 注意到 (15) 中第一个包含关系即得 (16). □

(二) 现在考虑一般的 i $(i \neq \infty)$, 以 L 表直线上的 Lebesgue 测度，设 A 是 L- 可测集，称点 t 是 **A的全密点**, 如果

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{L[A \cap (t-\varepsilon, t+\varepsilon)]}{2\varepsilon} = 1$$

在实变函数论中证明了下述定理：可测集 A 的几乎一切 (关于 L 测度) 的点 t 是 A 的全密点 [1].

显然，如一开区间含 A 的一全密点 t, 则在 t 的两边各含 A 的具有正 L 测度的子集. 这事实下面要用到.

称集 A 是 **自稠密的**, 如果任一开区间，只要包含 A 的一点，就必含 A 的具有正 L 测度的子集.

由定理 1 知：如 $q_i < \infty$, 则对几乎一切 ω, $S_i(\omega)$ 是自稠密的. 其实这对瞬时状态也成立：

定理 2 设 X 可测，$i \neq \infty$, 则

(i) 任一固定的 $t(>0)$ 是 $S_i(\omega)$ 的全密点 ($P_{t,i}$, a.s.);

(ii) 如 X 还可分，那么 $S_i(\omega)$ 是自稠密集 (a.s.).

证 (i) 要证的是：对已给的 $t > 0$ 有

$$P_{t,i}\left\{ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} L[S_i(\omega) \cap (t-\varepsilon, t+\varepsilon) = 1 \right\} = 1 \tag{17}$$

首先注意，由 X 的可测性，二维集

$$\{(s,\omega):\ x_s(\omega) = i\} \in \overline{\mathcal{B}_1 \times \mathcal{F}}$$

[1]见 Натонсон: 实变函数论，第九章，§6, 定理 1.

$\overline{\mathcal{B}_1 \times \mathcal{F}}$ 表 $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{F}$ 关于测度 $L \times P$ 的完全化 σ- 代数， $\mathcal{B}_1$ 表 $[0,\infty)$ 中 Borel σ- 代数．由 Fubini 定理，对几乎一切 ω, 上面的二维集的 ω- 截口集

$$S_i(\omega) = (s : x_s(\omega) = i) \in \mathcal{B}_1$$

即几乎一切 $S_i(\omega)$ 是 L- 可测集．

对已给的 ε, $t(0 < \varepsilon < t)$, 令

$$e(s,t) = \begin{cases} 1, & \text{如} |s-t| < \varepsilon \\ 0, & \text{反之} \end{cases}$$

$$\xi(s,\omega) = \begin{cases} 1, & \text{如} x_s(\omega) = t \\ 0, & \text{反之} \end{cases} \tag{18}$$

显然，三元函数 $e(s,t)\xi(s,\omega)$ 是 $\overline{\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_1 \times \mathcal{F}}$ 可测的．由 Fubini 定理

$$L[s_i(\omega) \cap (t-\varepsilon, t+\varepsilon)] = \int_0^\infty e(s,t)\xi(s,\omega)\, ds \tag{19}$$

为 $\overline{\mathcal{B}_1 \times \mathcal{F}}$ 可测，从而

$$D = \left\{(t,\omega) : \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} L[S_i(\omega) \cap (t-\varepsilon, t+\varepsilon)] = 1\right\} \times \in \overline{\mathcal{B}_1 \times \mathcal{F}} \tag{20}$$

根据上述实变函数论中的定理，得

$$L\{t:\ x_t(\omega) = i;\ (t,\omega) \overline{\in} D\} = 0, \quad \text{(a.s.)}$$

由 Fubini 定理得：对 L- 几乎一切 t, 有

$$P(\omega : x_t(\omega) = i,\ \ (t,\omega) \overline{\in} D) = 0$$

亦即 $P_{t,i}(\omega:\ (t,\omega) \in D) = 1$, 这说明 (17) 对 L- 几乎一切 t 成立．

为了完成 (i) 对一切 $t > 0$ 成立的证明，只要证 (17) 左方的值不依赖于 $t > 0$. 对 $0 < \varepsilon < \delta < s < t$, 由过程的齐次性

$$P_{t-\delta,i}(x_t = i, M_t) = P_{s-\delta,i}(x_s = i, M_s) \tag{21}$$

其中事件

$$M_t = \left(\omega:\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} L[S_i \cap (t-\varepsilon, t+\varepsilon)] = 1\right)$$

这说明

$$P_{t-\delta,i}(x_t = i, M_t) = \frac{P(x_{t-\delta} = i, x_t = i, M_t)}{P(x_{t-\delta} = i)} \tag{22}$$

与 t 无关．令 $\delta \to 0$, 由 (10) 中 $P_i(s)$ 的连续性及 X 的随机连续性，上式右方趋于 $P_{t,i}(M_t)$, 故此极限也不依赖于 $t > 0$, 这得证 (i).

(ii) 以 R 表可分集，对几乎一切 ω 及任一 $\tau \in S_i(\omega)$, 每个含 τ 的开区间必含点 $r \in R \cap S_i(\omega)$, $r > 0$, 这由可分性的假定直接推出．另方面，对 R 中每个 $r > 0$ 应用 (i), 可见对

几乎一切 ω, 任一开区间如含 $R\cap S_i(\omega)$ 中的一点 r, 则必在 r 的两侧各含一具有正 L- 测度的 $S_i(\omega)$ 的子集，综合这二结论即得证 (ii). □

注 1 记 $L(t,i;\varepsilon)=\frac{1}{2\varepsilon}L[S_i(\omega)\cap(t-\varepsilon,t+\varepsilon)]$. 我们有

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}E_{t,i}|L(t,i;\varepsilon)-1|=0 \tag{23}$$

实际上，由 (17) 知 $L(t,i;\varepsilon)$ 依 $P_{t,i}$ 测度收敛于 1. 注意 $L(t,i;\varepsilon)$ 有界，但对一致有界随机变量，依测度收敛等价于平均收敛，故 (23) 成立.

设 X 为可测过程，对每 $i\in E\cup\{\infty\}$, 我们已知 $S_i(\omega)$ 是 L- 可测集 (a.s.), 由 (18) 定义的过程 $\xi(t,\omega)$, $t\geqslant 0$ 也是可测的，它只取 0,1 两值，若 $A\subset R_1$ 为任一 L- 可测集，由 Fubini 定理知

$$L[S_i(\omega)\cap A]=\int_A\xi(t,\omega)\,dt \tag{24}$$

是随机变量.

最后，关于附加状态 ∞, 我们有

定理 3 设过程 X 可测、可分，则当且只当 $i=\infty$ 时

$$P(L[S_i(\omega)]=0)=1 \tag{25}$$

证 由 (1) 与 (3), 可见当且只当 $i=\infty$ 时 $P_i(t)\equiv 0$, 故

$$E\{L[S_i(\omega)]\}=\int_0^\infty P_i(t)\,dt=0$$

因 $L[S_i(\omega)]\geqslant 0$, 故 $E\{L[S_i(\omega)]\}=0$ 等价于 (25) 成立. □

§14.2 右下半连续性；典范链

(一) 在上节中我们对样本函数作了静态的研究，研究了 $S_i(\omega)$ 的结构. 进一步需要作动态的考察，考察样本函数的收敛情形. 为此要区别两个观念："固定的 t" 及 "流动的 t". 固定的 t 是指常数 t, 它与 ω 无关；流动的 $t[=t(\omega)]$ 可以随 ω 而不同，它以固定的 t 为特殊情形. 因此，"对几乎一切 ω, 性质 (A) 对每个流动的 t 成立" 是比 "对每固定的 t, 性质 (A) 对几乎一切 ω 成立" 更强的结论. 因为前者是说："存在一 Ω_0, $P(\Omega_0)=1$, 当 $\omega\in\Omega_0$ 时，(A) 对每 t 成立", 这时使 (A) 不成立的 0 测集 $\overline{\Omega}_0$ 是固定的；而后者则指，"对每固定的 t, 存在 $\Omega_t, P(\Omega_t)=1$, 使对每 $\omega\in\Omega_t$, (A) 成立", 因而使 (A) 不成立的 0 测集 $\overline{\Omega}_t$ 依赖于 t. 例如："对几乎一切 ω, 样本函数对 t(流动的) 右下半连续" 和 "对每固定的 t, 几乎一切样本函数在 t 点右下半连续" 显然是二不同的论断.

下面的定理是基本的:

定理 1 设 X 可分，则几乎一切样本函数具有

性质(A): 对任一流动的 $t>0$, 当 $s\downarrow t$ 或 $s\uparrow t$ 时，$x(s,\omega)$ 至多只有一个有限 [1] 的极限点；只有三种可能性:

[1] 属于 E 的点称为有限点.

(a) $x(s,\omega)\to i$, 此时 i 稳定；

(b) $x(s,\omega)$ 恰有二极限点 i 及 ∞, 此时 i 瞬时；

(c) $x(s,\omega)\to\infty$.

反之，

(a)′ 如 $x(t,\omega)=i$, 而且 i 稳定，则至少存在 t 的一侧 (右或左), 使 s 从此侧趋于 t 时, (a) 对此 i 成立；

(b)′ 如 $x(t,\omega)=i$, 而且 i 瞬时，则至少存在 t 的一侧 (右或左), 使 s 从此侧趋于 t 时, (b) 对此 i 成立；

证 对固定的 $A>0$ 及 $j\in E$, 定义

$$y^{(A,j)}(t,\omega)=p_{x(t,\omega),j}(A-t)\quad(0\leqslant t\leqslant A)\tag{1}$$

过程 $\{y^{(A,j)}(t,\omega),\ 0\leqslant t<A\}$ 关于 σ- 代数族 $\mathcal{F}'\{x_s,0\leqslant s\leqslant t\}$ 是一 Martingale(见 Doob [1], 第七章末). 取它的可分修正而不改换记号，因而对每固定的 t, (1) 对几乎一切 ω 成立，可分集设为 R. 由 Martingale 的一熟知定理 [1], 存在 ω- 集 $N^{(A,j)}$, $P(N^{(A,j)})=0$, 使当 $\omega\overline{\in}N^{(A,j)}$ 时，对流动的 $t>0$, 存在有穷的左、右极限

$$\left.\begin{aligned}y^{(A,j)}(t-0,\omega)&=\lim_{s\uparrow t}y^{(A,j)}(s,\omega)\\ y^{(A,j)}(t+0,\omega)&=\lim_{s\downarrow t}y^{(A,j)}(s,\omega)\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

注意 X 完全可分，故可分集也可取为 R. 设 M 是 $x(\cdot,\omega)$ 关于 R 不可分的 ω- 集，即例外集，则 $P(M)=0$. 令

$$N=\bigcup_{j\in E}\bigcup_{A\in R\setminus\{0\}}\left\{N^{(A,j)}\cup\bigcup_{r\in R\cap[0,A]}[y^{(A,j)}(r,\omega)\neq p_{x_r(\omega),j}(r,A)]\right\}\cup M\tag{3}$$

显然 $P(N)=0$, 今证对 $\omega\overline{\in}N$, 性质 (A) 中第一结论成立. 如说不然，则必存在 $\omega_0\overline{\in}N$, $t_0>0$, $i,j\in E$, $i\neq j$, $r_n\downarrow t_0,s_n\downarrow t_0$ (或 $r_n\uparrow t_0,s_n\uparrow t_0$), 使

$$\lim_{n\to\infty}x(r_n,\omega_0)=i,\quad\lim_{n\to\infty}x(s_n,\omega_0)=j$$

由 X 的可分性不妨设 $\{r_n\}\subset R$, $\{s_n\}\subset R$. 我们注意，因 i 是孤立点，如 $x(r_n,\omega_0)\to i$, 则当 n 充分大后有 $x(r_n,\omega_0)=i$.

根据 (2) 及 $\omega_0\overline{\in}N$,

$$\lim_{n\to\infty}y^{(A,i)}(r_n,\omega_0)=\lim_{n\to\infty}y^{(A,i)}(s_n,\omega_0)=y^{(A,i)}(t_0+0,\omega_0)$$

(或 $y^{(A,i)}(t_0-0,\omega_0)$). 再利用 $p_{ij}(t)$ 对 t 的连续性及刚才指出的注意知, 对任意 $A\in R\cap(t_0,\infty)$ 有

$$\begin{aligned}p_{ii}(A-t_0)&=\lim_{n\to\infty}p_{x(r_n,\omega_0),i}(A-r_n)=\lim_{n\to\infty}y^{(A,i)}(r_n,\omega_0)=\lim_{n\to\infty}y^{(A,i)}(s_n,\omega_0)\\&=\lim_{n\to\infty}p_{x(s_n,\omega_0),i}(A-s_n)=p_{ji}(A-t_0)\end{aligned}\tag{4}$$

[1] 见 Doob[1] 第七章，定理 11.5.

令 $A \in R, A \downarrow t_0$, 上式两端化为 $1=0$ 而矛盾，此得证第一结论.

由此结论显然知只有 (a),(b),(c) 三种可能性.

设 $x(s,\omega) \to i$, 由 §1 引理 1(ii) 知 i 必稳定. 如 $x(s,\omega)$ 有二极限点 i 及 ∞, 则 $t \in \overline{S_i(\omega)}$, 而且由于 s 是从一侧趋于 t, 可见 $\overline{S_i(\omega)}$ 不含一以 t 为端点的开区间. 故如说 i 稳定，则在 t 的附近有无数多个 i- 区间，由 §1 定理 1 这是不可能的 (a.s.), 故 i 为瞬时状态. 最后, (a)′,(b)′ 由 X 的可分性推出. □

注 1 由证明过程可见，性质 (A) 在 $t=0$ 也正确. 当然此时只考虑 $s \downarrow 0$ 的情形.

系 1 设 X 可分，对几乎一切 ω, 如 $i \neq j$, $i,j \in E$, 则 $\overline{S_i(\omega)} \cap \overline{S_j(\omega)}$ 在每一有限 t- 区间中只有有穷多个点.

证 考虑 (3) 中的 N, 记 $B(\omega) = \overline{S_i(\omega)} \cap \overline{S_j(\omega)}$. 如有 $\omega_0 \overline{\in} N$ 使 $B(\omega_0)$ 在某有限 t- 区间中有无穷多个点，则必存在 $B(\omega_0)$ 的一极限点 t, 并且在 t 的一侧存在无穷多个 $B(\omega_0)$ 中的点，它们收敛于 t. 于是当 s 从此侧趋于 t 时， $x(s,\omega_0)$ 至少有两个有限极限点 i 与 j. 这是不能的，因为 $\omega_0 \overline{\in} N$. □

系 2 设 X 可分、可测，对几乎一切 ω, 如 $i \neq \infty$, 则

$$L[\overline{S_i(\omega)} - S_i(\omega)] = 0 \tag{5}$$

证 我们有

$$\overline{S_i(\omega)} - S_i(\omega) = \bigcup_{j \neq i} [\overline{S_i(\omega)} \cap S_j(\omega)] \cup [\overline{S_i(\omega)} \cap S_\infty(\omega)] \tag{6}$$

由系 1, 前一和集至多是可列集；由 §1 定理 3,

$$L\overline{S_i(\omega)} \cap S_\infty(\omega)] = 0. \ \square$$

定理 2 设 X 可分、可测. 对几乎一切 ω, 如 $q_i = \infty$, 则 $S_i(\omega)$ 在 $[0,\infty)$ 中无处稠密 (即指 $\overline{S_i(\omega)}$ 不含任一开区间).

证 由 §1 引理 1 知 $S_i(\omega)$ 不含任一开区间 (a.s.). 如 $\overline{S_i(\omega)}$ 含一开区间，则此区间必与某集 $S_j(\omega)$ 相交， $j \neq i$. 由可分性并注意 ∞ 非孤立点，不妨设 j 还不是 ∞, 由 §1 定理 2(ii) 知它必含 $S_j(\omega)$ 的具有 L- 测度大于 0 的子集. 这与系 2 矛盾. □

定理 3 设 X 可分， $t>0$ 固定，则对几乎一切 ω, 下列结论成立：

(i) 如 $x(t,\omega)=i$, i 稳定，则 $\lim\limits_{s \to t} x(s,\omega) = i$;

(ii) 如 $x(t,\omega)=i$, i 瞬时，则当 $s \downarrow t$(或 $s \uparrow t$) 时， $x(s,\omega)$ 恰有二极限点 i 及 ∞;

(iii) $x(s,\omega) \neq \infty$.

证 $P(x(t,\omega) \neq \infty) = \sum\limits_{i \neq \infty} p_i(t) = 1$, 故只要考虑 (i),(ii) 两种情形. (i) 中结论由 §1 引理 1(i) 推出. 由 §1(17), 如 $x(t,\omega)=i$, 则当 $s \downarrow t$ 或 $s \uparrow t$ 时， i 是 $x(s,\omega)$ 的一极限点. 由性质 (A) 不能有其它有限极限点. 如 i 瞬时，由 §1 引理 1(ii) 必定还有一极限点，它只能是 ∞. 此得证 (ii). □

引入 t- 集

$$S_i^+(\omega) = \{t : S_i(\omega) \cap (t, t+\varepsilon) \neq 0 \text{ 对每} \varepsilon > 0 \text{ 成立}\}$$

$$S_i^-(\omega) = \{t : S_i(\omega) \cap (t-\varepsilon, t) \neq 0 \text{ 对每} \varepsilon > 0 \text{ 成立}\}$$

因而 $\overline{S_i(\omega)} = S_i(\omega) \cup S_i^+(\omega) \cup S_i^-(\omega)$. 采用记号 $A_1 \doteq A_2$. 它表示此二 ω- 集 A_1, A_2 至多只相差一个 0 测集，即 $P(A_1 \setminus A_2) + P(A_2 \setminus A_1) = 0$.

系 3 如 X 可分， $i \neq \infty$, 则对每固定的 $t \geqslant 0$, 有

$$\{\omega : t \in S_i(\omega)\} \doteq \{\omega : t \in \overline{S_i(\omega)}\} \doteq \{\omega : t \in S_i^+(\omega)\} \doteq \{\omega : t \in S_i^-(\omega)\}$$

此系由定理 3 直接推出.

(二) 为了进一步研究样本函数的性质，需要对 X 加些条件.

设马氏链 $X = \{x_t, t \geqslant 0\}$ 具有标准转移概率矩阵，称它为 **典范链**, 如果它可分， Borel 可测，而且一切样本函数右下半连续，即对任一 $t \geqslant 0$, 有

$$\varliminf_{s \downarrow t} x(s, \omega) = x(t, \omega) \quad (\text{一切 } \omega \in \Omega) \tag{7}$$

我们在后面证明，对任一已给的标准转移矩阵 (p_{ij}), 以它为转移概率的典范链是存在的. 先来讨论典范链的性质.

上述对可分可测链的某些结果在典范条件下可以加强. 例如， (5) 可以加强为 $\overline{S_i(\omega)} - S_i(\omega)$ 至多可列 (a.s.) $(i \neq \infty)$. 实际上，由 (7) 知：当且只当 $\varliminf_{s \downarrow t} x(s, \omega) = \infty$ 时， $t \in S_\infty(\omega)$; 故如 $t \in \overline{S_i(\omega)} \cap S_\infty(\omega)$, 则 t 是 $\overline{S_i(\omega)} \cap S_\infty(\omega)$ 的右孤立点，否则存在一列 $s_n \in \overline{S_i(\omega)} \cap S_\infty(\omega)$, $s_n \downarrow t$, 从而存在 $s'_n \in S_i(\omega)$, $s'_n \downarrow t$. 于是由 (7), $t \in S_i(\omega)$ 而与 $t \in S_\infty(\omega)$ 矛盾. 一个集的点如都是右孤立点，则此集 (从而 $\overline{S_i(\omega)} \cap S_\infty(\omega)$) 至多可列. 于是由系 2 的证明知 $\overline{S_i(\omega)} - S_i(\omega)$ 至多可列 (a.s.).

以 $D(\omega)$ 表 $x(\cdot, \omega)$ 的不连续点集，为方便计

$$S_\infty^* = \left(t : \lim_{s \to t} x(s, \omega) = \infty = x(t, \omega)\right) \tag{8}$$

中的点也都算作不连续点，显然 i- 区间中的点都是连续点. 任一 i- 区间泛称为 **稳定区间**, 由定义它是开的. 下定理叙述了 $x(\cdot, \omega)$ 的连续点集 $C(\omega)$ 及不连续点集 $D(\omega)$ 的结构.

定理 4 设 X 为典范链，对几乎一切 ω, 样本函数的连续点集是全体稳定区间 (如果存在的话) 的和集. 不连续点集是下列五种集的和集，它是一闭集

(a) $\overline{S_i(\omega)}$, i 为瞬时状态， $L[\overline{S_i(\omega)}] > 0$, 每 $\overline{S_i(\omega)}$ 是一完全集 (即是无孤立点的闭集).

(b) $\overline{S_i(\omega)} \cap \overline{S_j(\omega)} = (t :\ t$ 是 i- 区间及 j- 区间的公共端点), $i \neq j$ 都稳定，此集中的点是跳跃点，而且在任一有限区间中它是有穷集.

(c) $\overline{S_i(\omega)} \cap S_\infty(\omega) = (t : t$ 是某 i- 区间的右端点而且

$$\lim_{s \downarrow t} x(s, \omega) = x(t, \omega) = \infty$$

i 稳定，在任一有限区间中此集是有穷集.

(d) $\overline{S_i(\omega)} \cap (t :\ \lim_{s \uparrow t} x(s, \omega) = \infty) = (t :\ t$ 是某 i- 区间的左端点， $x(t, \omega) = i$, 而且 $\lim_{s \uparrow t} x(s, \omega) = \infty)$, 在任一有限区间中此集是有穷集.

(e) $S_\infty^*(\omega)$, $L[S_\infty^*(\omega)] = 0$.

证 设 Ω_0 是使性质 (A) 成立的集，$P(\Omega_0)=1$. 任取 $\omega\in\Omega_0$ 及 $t\geqslant 0$, 如果 t 是 $x(\cdot,\omega)$ 的连续点，则必存在 $i\neq\infty$, 使 $x(s,\omega)\to x(t,\omega)=i$, $(s\to t)$, 由定理 1(a) 知 i 稳定. t 属于某一 i- 区间中，故 $C(\omega)$ 等于稳定区间之和集. 是一开集，从而 $D(\omega)$ 是闭集. 设 $t\in D(\omega)$. 因当 $s\uparrow t$(或 $s\downarrow t$) 时 $x(s,\omega)$ 至多只有一有限极限点，故只有下列可能：s 从某一侧趋于 t 时 $x(s,\omega)$ 有二极限点 i 及 ∞, 此即 (a); 剩下情况是各侧分别只有一极限点；或者一侧极限为 i 而另一侧为 j, $i\neq j$ 均非 ∞, 由定理 1(a) 此为情况 (b); 或者左侧极限是 $i(\neq\infty)$ 而右侧是 ∞, 此即 (c); 或者右侧是 ∞ 而左侧是 i, 此即 (d), 或者两侧都是 ∞, 此即 (e), 定理中其它结论都已在上面陆续证明. □

在实际问题中常见的马氏链是：一切状态都稳定. 即一切 $q_i<\infty, i\in E$. 这时情况 (a) 不发生.

系 4 设 X 是典范链，一切状态稳定. 那么，对几乎一切 ω, $D(\omega)$ 闭，$L[D(\omega)]=0$, $D(\omega)$ 中的点 t 或者是一跳跃点 (情况 (b)), 或者是跳跃点的极限点，这时至少存在一侧，当 s 从此侧趋于 t 时，$x(s,\omega)\to\infty$. 如果密度矩阵 Q 还是保守的，那么 (c) 不发生；这时如再设向前方程组满足，则 (d) 也不发生：反之亦然.

证 只要证明后面三结论，设 Q 保守，如说 (c) 出现的概率大于 0, 那么必存在一有理数 r 及 $i\in E$, 使

$$P(\omega: r\in \text{某 } i\text{- 区间}, \ r \text{ 后的第一个断点不是跳跃点})>0$$

这与 §13.3 定理 1,3° 矛盾.

由 §13.3 定理 2 知：如 Q 保守 (这条件等价于向后方程组成立), 为使向前方程组成立，充要条件是在任一固定的点 $r>0$ 之前，如 $x(\cdot,\omega)$ 在 $[0,r]$ 中有不连续点，那么必有最后一不连续点，它是一跳跃点 (a.s.). 今设向前方程组成立，如说 (d) 出现的概率大于 0, 同样会存在有理数 $r>0$ 及 $i\in E$, 使

$$P(\omega: r\in \text{某 } i \text{ 区间}, \ r \text{ 前有最后断点, 它不是跳跃点})>0$$

这与上述矛盾. 反之，如 (d) 不发生，那么这时只剩下情况 (b),(e), 显然 §13.3 定理 2 的条件满足，故向前方程组成立. □

对于典范链 X, 几乎一切样本函数完全被它们在可分集 R 上的值所决定. 实际上，存在 Ω_1, $P(\Omega_1)=1$, 当 $\omega\in\Omega_1$ 时，$x(\cdot,\omega)$ 关于 R 可分，因而 $X_T(\omega)\subset\overline{X_R(\omega)}$, 故

$$\varliminf_{r\downarrow t} x(r,\omega)=\varliminf_{s\downarrow t} x(s,t)=x(t,\omega) \quad (t\geqslant 0) \tag{9}$$

其中 $r\in R$.

最后，试证典范链的存在性.

定理 5 设已给标准转移矩阵 (p_{ij}), 则必存在以它为转移概率矩阵的典范链 $X=\{x_t, t\geqslant 0\}$.

证 由 §4.2 定理 2, 存在以 (p_{ij}) 为转移概率矩阵的马氏链 $\widetilde{X}=\{\widetilde{x}_t, t\geqslant 0\}$, 不妨设它可分. 由定理 3, 对任意固定的 $t\geqslant 0$, 有

$$P\left(\lim_{s\downarrow t}\widetilde{x}_s(\omega)=\widetilde{x}_t(\omega)\right)=1$$

于是由 §3.3 定理 2, 存在与 $\tilde{X}$ 等价的马氏链 $X = \{x_t(\omega), t \geqslant 0\}$, 而且 X 是典范链. □

§14.3 强马尔科夫性

（一） 在马氏链的研究中，常常要碰到这样的问题：设 α 是一非负随机变数， $X = \{x_t, t \geqslant 0\}$ 是马氏链，试问推移 α 后的过程 $Y = \{x_{\alpha+t}, t \geqslant 0\}$ 是否马氏链？是否具有与 X 相同的转移概率？如已知 X_α, 过去 $\{x_t, t \leqslant \alpha\}$ 是否与将来 $\{x_t, t \geqslant \alpha\}$ 独立？当 α 是一常数(即不依赖 ω) 时，所需的性质化为马氏性，因而答案肯定. 在一特殊情形：当 X 可分而且一切状态稳定. 对 α 加一些条件后也可得到肯定的答案 (见 §13.3 引理 2). 本节的目的就是要放宽这些条件，使得答案仍然肯定. 证明中思想的本质仍与上述引理 2 的相同.

在 §4.2 中已讨论过一般马氏过程的强马氏性，下面的叙述对可列状态情形更适用，定理的证明由 Chung 给出，如已习惯 §4.2 中强马氏性，本节也可不看.

首先，为了应用的广泛性，我们来放宽 “过去” 中的事件.

设已给概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的马氏链 $X = \{x_t, t \geqslant 0\}$, 它有标准转移概率矩阵 (p_{ij}), $i, j \in E$, 又设对每 $t \geqslant 0$, $\mathcal{F}_t$ 是 $\mathcal{F}$ 中的子 σ 代数， $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. 称 σ 代数族 $\{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ 对此过程是 **可取的**, 如果

(a) $\mathcal{F}'\{x_s, s \leqslant t\} \subset \mathcal{F}_t$;

(b) $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, 如 $s \leqslant t$;

(c) 对每 $j \in E, 0 < s \leqslant t$, 有

$$P(x_t = j | \mathcal{F}_s) = p_{x_s, j}(t - s), \quad \text{(a.s.)} \tag{1}$$

由此定义立知，如 $\{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ 可取，则 $\{\mathcal{F}_{t+0}, t \geqslant 0\}$ 也可取，其中 $\mathcal{F}_{t+0} = \bigcap\limits_{u>t} \mathcal{F}_u$. 实际上，对于它 (a),(b) 显然满足. 如 $0 \leqslant r < t$, 在 (1) 中令 s 沿有理数下降到 r. 由 Martingale 的理论 [1] 左方收敛到 $P(x_t = j | \mathcal{F}_{s+0})$,(a.s.); 因而右方也收敛. 由于 $\{x_t, t \geqslant 0\}$ 随机连续，$x_s \to x_r$(依概率收敛), 故必存在有理数子列 $\{s_n\}$, $s_n \downarrow r$, 使 $x_{s_n}(\omega) \to x_r(\omega)$ (a.s.), 由于 E 中点都是孤立的，所以存在 $N(= N(\omega))$, 当 $n \geqslant N$ 时， $x_{s_n}(\omega) = x_r(\omega)$. 再由 $p_{ij}(t)$ 对 t 的连续性，即知右方收敛到 $p_{x_r, j}(t - r)$, 因而

$$P(x_t = j | \mathcal{F}_{r+0}) = p_{x_r, j}(t - r) \quad \text{(a.s.)} \tag{2}$$

即 (c) 对 $\{\mathcal{F}_{t+0}, t \geqslant 0\}$ 成立.

显然，由马氏性知， $\mathcal{F}_t^0 = \mathcal{F}'\{x_s, s \leqslant t\}$ 是一可取族，称为 **最小可取族**.

设 $\alpha = \alpha(\omega)$ 是非负随机变量，可取 ∞ 为值，令 $\Delta = (\alpha < \infty)$, 以后总假定 $P(\Delta) > 0$. 称此 α 为 **关于 $\{x_t, \mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ 的马氏时刻**. 如对任一非负数 t, 有

$$(\omega : \alpha(\omega) < t) \in \mathcal{F}_t \tag{3}$$

关于 $\{x_t, \mathcal{F}_t^0, t \geqslant 0\}$ 的马氏时刻就简称为 **马氏时刻**.

条件 (3) 与下式等价：对 $t \geqslant 0$

$$(\omega : \alpha(\omega) \leqslant t) \in \mathcal{F}_{t+0} \tag{4}$$

---

[1] 见 Doob[1] 第七章，定理 4.3.

实际上，由 (3) 得 $(\alpha < t+\frac{1}{n}) \in \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}}$，令 $n\to\infty$ 即得 (4); 反之，由 (4) 得 $(\alpha \leqslant t-\frac{1}{n}) \in \mathcal{F}_t$，令 $n\to\infty$ 即得 (3).

Δ 中全体满足下列条件的可测子集 Λ:

$$\Lambda \cap (\omega : \alpha < t) \in \mathcal{F}_t \quad (\text{任} t \geqslant 0) \tag{5}$$

构成 Δ 中一 σ 代数，称为 (关于 $\{x_t, \mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ 的)α-**前 σ 代数**, 并记为 $\mathcal{F}_\alpha$. 同上理知 (5) 等价于

$$\Lambda \cap (\omega : \alpha \leqslant t) \in \mathcal{F}_{t+0} \quad (\text{任} t \geqslant 0) \tag{6}$$

关于 $\{x_t, \mathcal{F}_t^0, t \geqslant 0\}$ 的 α- 前 σ 代数记为 $\mathcal{F}\{x_t, t \leqslant \alpha\}$. 特别，常数 α 是马氏时刻，这时 α- 前 σ 代数与随机变量 $\{x_t, t \leqslant \alpha\}$ 所产生的 σ 代数相同.

称 $X = \{x_t, t \geqslant 0\}$ 为**强马氏链**, 如果它 Borel 可测，而且具有下列性质 (**强马氏性**): 对任意可取族 $\{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$, 任意关于 $\{x_t, \mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ 的马氏时刻 α, 任意 $\Lambda \in \mathcal{F}_\alpha$, 以及任意有穷多个 $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_N$, $j_0, j_1, \cdots, j_N \in E$, 有

$$\begin{aligned} &P(\Lambda:\ x(\alpha+t_v) = j_v,\ 0 \leqslant v \leqslant N) \\ &= P(\Lambda, x(\alpha+t_0) = j_0) \prod_{v=0}^{N-1} p_{j_v j_{v+1}}(t_{v+1} - t_v) \end{aligned} \tag{7}$$

过程 X 的 Borel 可测性保证 $x(\alpha+t)$ 是一随机变量. 令

$$\xi(t,\omega) = x(\alpha+t,\omega) \quad (t \geqslant 0) \tag{8}$$

它在 $\Delta = (\alpha < \infty)$ 上有定义. $\{\xi(t,\omega), t \geqslant 0\}$ 是概率空间 $(\Delta, \Delta\mathcal{F}, P(\cdot|\Delta))$ 上的随机过程[1]称为 α-**后链**, 这里 $\Delta\mathcal{F}$ 表 Δ 中全体可测子集所成的 σ 代数，而 $\mathcal{F}'\{\xi_t, t \geqslant 0\}$ 则称为 α-**后 σ 代数**, 它是 Δ 中的 σ 代数，简记它为 $\mathcal{F}'_\alpha$. 利用 α- 后链，并取 $\Lambda = \Delta$, 由 (7) 得

$$\begin{aligned} &P(\xi(t_v,\omega) = j_v,\ 0 \leqslant v \leqslant N|\Delta) \\ &= P(\xi(t_0,\omega) = j_0|\Delta) \prod_{v=0}^{N-1} p_{j_v j_{v+1}}(t_{v+1} - t_v) \end{aligned} \tag{9}$$

我们的主要目标是要证明典范链是强马氏链. 为此要作一些准备.

(二) 对每 $j \in E$, 定义

$$\gamma_j(\omega) = \inf\{t : t > \alpha(\omega);\ x(t,\omega) = j\} \tag{10}$$

如右方括号中是空集，就令 $\gamma_j(\omega) = \infty$. 以后类似的定义中都如此约定，不一一申述.

以下假定 X 关于可列稠集 R 可分. 由可分性

$$(\gamma_j(\omega) < t) = \bigcup_{r<t} (\alpha(\omega) \leqslant r;\ x(r,\omega) = j) \quad (r \in R),$$

---

[1] $\Delta\mathcal{F}$ 表一切如 $\Delta \cap A$ 的集所成的 σ 代数，其中 $A \in \mathcal{F}$.

故 $\gamma_j(\omega)$ 是马氏时刻，它的有限定义域为

$$\Gamma_j \equiv (\gamma_j(\omega) < \infty) = \Delta \cap \{S_j(\omega) \cap (\alpha(\omega), \infty) \neq 0\}$$

设 $\Lambda \in \mathcal{F}_\alpha$ 固定，作为 s 的函数，

$$A(\Lambda, s) = P(\Lambda; \alpha(\omega) \leqslant s)$$

是一广义分布函数，它在 $\mathcal{B}_1$ (全体一维 Borel 集构成的 σ 代数) 上产生的测度记为 $A(\Lambda, \cdot)$.

γ_j 关于 Λ 及 α 的广义条件概率分布定义为满足下列三条件的函数 $C_j(s, B|\Lambda)$, 其中自变量为 $s \in T, B \in \mathcal{B}_1$:

(α) 对每固定的 $s, C_j(s, \cdot|\Lambda)$ 是 $\mathcal{B}_1$ 上的测度；

(β) 对每固定的 $B, C_j(\cdot, B|\Lambda)$ 是 T 上的 $\mathcal{B}_1$ 可测函数；

(γ) 对每固定的 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_1$, 有

$$\int_{B_1} c_j(s, B_2|\Lambda)A(\Lambda, ds) = P(\Lambda : \alpha(\omega) \in B_1;\ \gamma_j(\omega) \in B_2)$$

这样的函数是存在的 [1]. 由条件分布的性质，知对固定的 $B \in \mathcal{B}_1$ 有

$$C_j(s, B|\Lambda) = P(\gamma_j(\omega) \in B|\Lambda, \alpha = s) \quad (A--\text{几乎一切}s)^2 \tag{11}$$

简写 $C_j(s, [0, u]|\Lambda)$ 为 $C_j(s, u|\Lambda)$.

如 $K \in \mathcal{F}, \Lambda \in \mathcal{F}, P(\Lambda) > 0$, 又 $y(\omega)$ 是一随机变量，我们以 $P(K|\Lambda; y)$ 表在 $(\Lambda, \Lambda\mathcal{F}, P(\cdot|\Lambda))$ 上 K 关于 $y(\omega)$ 的条件概率. 当 y 是多个随机变量时定义类似. 因而由条件概率的定义

$$P(K, \Lambda, y(\omega) \leqslant t|\Lambda) = \int_{\Lambda \cap (y \leqslant t)} P(K|\Lambda; y)P(d\omega|\Lambda)$$

两边都消去 $P(\Lambda)^{-1}$ 后，得

$$P(K, \Lambda, y(\omega) \leqslant t) = \int_{\Lambda \cap (y \leqslant t)} P(K|\Lambda; y)P(d\omega) \tag{12}$$

引理 1 对 $j, k \in E$, $t \geqslant 0$ 及 $\Lambda \in \mathcal{F}_\alpha$, $P(\Lambda) > 0$, 在集 $(\omega : \gamma_j(\omega) \leqslant t)$ 上，对几乎一切 ω 有

$$P(x(t, \omega) = k|\Lambda; \alpha, \gamma_j) = p_{jk}(t - \gamma_j) \tag{13}$$

证 对 $[0, t]$ 中的 s 及 s', 令

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \Lambda \cap (\alpha \leqslant s, \gamma_j \leqslant s', \gamma_j < t) \\
\Lambda_2 &= \Lambda \cap (\alpha \leqslant s, \gamma_j \leqslant s', \alpha = \gamma_j = t) \\
\Lambda_3 &= \Lambda \cap (\alpha \leqslant s, \gamma_j \leqslant s', \alpha < \gamma_j = t)
\end{aligned}$$

---

[1] 见 Doob [1], 第一章, 第 9 节.

[2] 关于测度 $A(\Lambda, \cdot)$ 几乎一切 s.

则

$$\Lambda \cap (\alpha \leqslant s, \gamma_j \leqslant s', x_t = k) = \left(\bigcup_{i=1}^{3} \Lambda_i \right) \cap (x_t = k)$$

由于 $(\alpha < \gamma_j = t) \subset\!\!\cdot\, (\omega : t \in \overline{S_j(\omega)}) - (\omega : t \in S_j^-(\omega))$, (这里 $A \subset\!\!\cdot\, B$ 表：除差一 0 测集外，$A \subset B$; 即 $P(A - B) = 0$). 根据 §2 系 3, 得 $P(\alpha < \gamma_j = t) = 0$, 从而 $P(\Lambda_3) = 0$, 再由此系，$\{\omega : \gamma_j = t\} \doteq \{\omega : x_t = j\}$, 故

$$P(\Lambda_2, x_t = k) = \delta_{jk} P(\Lambda_2) = \int_{\Lambda_2} p_{jk}(t - \gamma_j) P(d\omega)$$

剩下要计算 $P(\Lambda_1, x_t = k)$. 为此对每 $n \geqslant 0$, 定义

$$\gamma_j^{(n)}(\omega) = \min \left\{ \frac{m}{2^n} :\ \frac{m}{2^n} > \gamma_j(\omega);\ x\left(\frac{m}{2^n}, \omega\right) = j \right\}$$

它是一随机变量，由 γ_j 的定义及 X 的完全可分性有 $\gamma_j^{(n)}(\omega) \downarrow \gamma_j(\omega)$ (a.s., $\omega \in \Gamma_j$), 故

$$\begin{aligned} P(\Lambda_1, x_t = k) &= \lim_{n\to\infty} P(\Lambda; \alpha \leqslant s, \gamma_j \leqslant s', \gamma_j^{(n)} < t, x_t = k) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{m < t2^n} P\left(\Lambda; \alpha \leqslant s, \gamma_j \leqslant s', \gamma_j^{(n)} = \frac{m}{2^n}, x_t = k\right) \end{aligned}$$

因为 α 及 γ_j 都是马氏时刻，不难看出

$$\Lambda \cap \left(\alpha \leqslant s, \gamma_j \leqslant s', \gamma_j^{(n)} = \frac{m}{2^n}\right) \in \mathcal{F}_{m2^{-n}+0}$$

故由 (2) 得

$$\begin{aligned} P(\Lambda_1, x_t = k) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{m < t2^n} P\left(\Lambda; \alpha \leqslant s, \gamma_j \leqslant s', \gamma_j^{(n)} = \frac{m}{2^n}\right) P_{jk}\left(t - \frac{m}{2^n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\Lambda \cap (\alpha \leqslant s, \gamma_j \leqslant s', \gamma_j^{(n)} < t)} p_{jk}(t - \gamma_j^{(n)}) P(d\omega) \\ &= \int_{\Lambda_1} p_{jk}(t - \gamma_j(\omega)) P(d\omega) \end{aligned}$$

将此与上二结果联合，得

$$\begin{aligned} P(\Lambda, \alpha \leqslant s, \gamma_j \leqslant s'; x_t = k) &= \int_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3} p_{jk}(t - \gamma_j(\omega)) P(d\omega) \\ &= \int_{\Lambda \cap (\alpha \leqslant s, \gamma_j \leqslant s')} p_{jk}(t - \gamma_j(\omega)) P(d\omega) \end{aligned} \tag{14}$$

这对 $[0, t]$ 中任意 s 及 s' 都正确，故得证 (13). □

引理 2 条件概率 $P(x_t = j | \Lambda;\ \alpha = s)$ 的一个代表是

$$r_j(s, t | \Lambda) = \int_{[s,t]} p_{jj}(t - u) C_j(s, du | \Lambda) \quad j \in E,\ 0 \leqslant s \leqslant t \tag{15}$$

对每固定的 $s \geqslant 0$, $r_j(s,\cdot|\Lambda)$ 在 $[s,\infty)$ 中右连续；又 $r_j(\cdot,\cdot|\Lambda)$ 是 (s,t) 的 Borel 可测函数，$0 \leqslant s \leqslant t$.

证 我们有

$$P(x_t = j|\Lambda;\alpha) = E\{P[x_t = j|\Lambda;\ \alpha,\gamma_j]|\Lambda;\alpha\},\quad (a.s.) \tag{16}$$

由 (11) 及 (13)(于其中取 $k=j$), 知 (16) 的右方对 A- 几乎一切 s 等于 (15) 的右方，故后者是 $P(x_t = j|\Lambda;\alpha = s)$ 的一个代表．对每固定 s, 由 $C_j(s,u|\Lambda)$ 的定义知它对 u 右连续．注意 $p_{jj}(t)$ 连续，由 (15) 知 $r_j(s,t|\Lambda)$ 对 t 右连续，再由 $p_{jj}(t)$ 连续知 $r_j(s,t|\Lambda)$ 可表为 (s,t) 的 Borel 可测函数的 Riemann-Stieltjes 和的极限，故它也是 (s,t) 的 Borel 可测函数． □

以下 (a.s.)t 或 (t,t') 系对 $T=[0,\infty)$ 或 $T\times T$ 上的 Lebesgue 测度而言．如某式中涉及多个变量，则依其后书写的次序，使此式成立的 "a.s." 集可依赖于其前的变量，例如 "$t,t' \geqslant 0$,a.s., $s\in[0,t]$" 的详细内容是："对每 $t \geqslant 0$ 及 $t' \geqslant 0$, 以及对每 $s \in [0,t] - Z(t,t')$, 其中集 $Z(t,t')$ 的 A- 测度为 0".

引理 3 对每 $k \in E$, 有

$$r_k(s,t+t'|\Lambda) = \sum_j r_j(s,t|\Lambda)p_{jk}(t') \quad (\text{a.s.})s,t>s,t'\geqslant 0 \tag{17}$$

$$\sum_j r_j(s,t|\Lambda) = 1 \quad (\text{a.s.})s,t>s \tag{18}$$

对每 $j\in E$ 及 (a.s.)s, 函数 $r_j(s,\cdot|\Lambda)$ 在 $[s,\infty)$ 中连续.

证 因 α 为马氏时刻，对 $0\leqslant s\leqslant t$, $t'>0$.

$$P(\Lambda,\alpha\leqslant s,x_{t+t'}=k) = \sum_j P(\Lambda;\alpha\leqslant s,x_t=j)p_{jk}(t')$$

这对每 s 都正确，故由条件概率的定义，以概率 1 有

$$P\{x_{t+t'}=k|\Lambda;\alpha\} = \sum_j P\{x_t=j|\Lambda;\alpha\}p_{jk}(t')$$

因而由引理 2. 对 $t,t'\geqslant 0$, (a.s.)$s\in[0,t]$, 有

$$r_k(s,t+t'|\Lambda) = \sum_j r_j(s,t|\Lambda)p_{jk}(t') \tag{19}$$

(19) 两方都是 (s,t,t') 的 Borel 可测函数，此由引理 2 得出．根据 Fubini 定理，知 (19) 对 (a.s.)s 及 (a.s.)$(t,t')\in[s,\infty)\times[0,\infty)$ 正确．因此，由引理 2 中指出的右连续性及 Fatou 引理

$$r_k(s,t+t'|\Lambda) \geqslant \sum_j r_j(s,t|\Lambda)p_{jk}(t') \quad (\text{a.s.})s,t\geqslant s,t'\geqslant 0 \tag{20}$$

$$\sum_k r_k(s,t+t'|\Lambda) \geqslant \sum_j r_j(s,t|\Lambda) \tag{21}$$

其次，由引理 2

$$\sum_j r_j(s,t|\Lambda) = P(\Lambda|\Lambda;\alpha=s) = 1 \quad t>0,\ (\text{a.s.})s\in[0,t] \tag{22}$$

仍由 Fubini 定理，(22) 对 (a.s.)s 及 (a.s.)$t \geqslant s$ 成立；像由 (19) 推出 (21) 一样，得

$$\sum_j r_j(s,t|\Lambda) \leqslant 1 \quad (\text{a.s.})s, t \geqslant s \tag{23}$$

设 E' 为 (20) 或 (23) 不成立的 s 所成之集，它的 A- 测度为 0, 固定 $s\overline{\in}E'$, 对这样的 s, 如 (22) 对某 t 成立，则由 (21) 及 (23), 它对一切更大的 t 成立. 既然 (22) 对 (a.s.)$t \geqslant s$ 正确，故它实际上对一切 $t > s$ 正确. 此得证 (18). 因此，在 (21) 中从而在 (20) 中等号成立，于是 (17) 正确. 最后，由 (18) 及 (17) 及 p_{jk} 的连续性知对 (a.s.)$s, r_j(s,|\Lambda)$ 在 (s,∞) 连续. 由引理 2, 对每 $s, r_j(s,\cdot|\Lambda)$ 在 s 右连续，故它在 $[s,\infty]$ 连续. □

对每 $\Lambda \in \mathcal{F}_\alpha$, 引进函数 $r_j(\Lambda;t)$:

$$r_j(\Lambda;t) = \int_0^\infty r_j(s,s+t|\Lambda)A(\Lambda;ds) \quad j \in E, t \geqslant 0 \tag{24}$$

由引理 3 知 $r_j(\Lambda;t)$ 对 $t \in T$ 连续，而且对 $j,k \in E$ 及 $t,t' > 0$ 有

$$r_j(\Lambda;t) \geqslant 0; \ \sum_j r_j(\Lambda;t) = P(\Lambda) \tag{25}$$

$$\sum_j r_j(\Lambda;t)p_{jk}(t') = r_k(\Lambda;t+t') \tag{26}$$

由连续性知存在 $\lim\limits_{t\downarrow 0} r_j(\Lambda;t) = r_j(\Lambda;0)$, 故由 Fatou 引理，(25) 及 (26) 中二等号当 $t=0$ 时应换为 "$\leqslant$". 下面说明 $r_j(\Lambda;0)$ 的概率意义.

引理 4 如 X 是典范链，则对 $\Lambda \in \mathcal{F}_\alpha$ 有

$$P(\Lambda;\xi_0(\omega)=j) = r_j(\Lambda;0) \quad j \in E \tag{27}$$

$$P(\Lambda;\xi_0(\omega)=\infty) = P(\Lambda) - \sum_j r_j(\Lambda;0) \tag{28}$$

证 先证

$$(\xi_0(\omega)=j) \doteq (\alpha(\omega)=\gamma_j(\omega)) \tag{29}$$

实际上，如 $\alpha(\omega)=\gamma_j(\omega)$ (a.s.) $\omega \in \Delta$, 则由 §2 定理 1, 当 $t \downarrow \alpha(\omega)$ 时 $x(t,\omega)$ 的唯一的有限极限点是 j, 因而由 X 的右下连续性得 $\xi(0,\omega)=x(\alpha,\omega)=j$ (a.s.) $\omega \in \Delta$; 反之，如 $\xi(0,\omega)=j$, 则由 $\gamma_j(\omega)$ 的定义知 $\alpha(\omega)=\gamma_j(\omega)$, (a.s.) $\omega \in \Delta$.

由 (29) 及 (11)

$$\begin{aligned} P(\Lambda;\xi(0,\omega)=j) &= P(\Lambda;\alpha(\omega)=\gamma_j(\omega)) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^\infty \int_{[\frac{m}{n},\frac{m+1}{n})} C_j\Big(s,\frac{m+1}{n}\Big|\Lambda\Big)A(\Lambda;ds) \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty C_j\Big(s,\frac{[ns+1]}{n}\Big|\Lambda\Big)A(\Lambda;ds) = \int_0^\infty C_j(s,s|\Lambda)A(\Lambda;ds) \end{aligned}$$

由 (15), $C_j(s,s|\Lambda) = r_j[s,s|\Lambda)$, 故得证 (27). 注意，当且只当 $\xi(0,\omega)\overline{\in}E$ 时 $\xi(0,\omega)=\infty$, 因而得 (28). □

(三) 现在来证明主要定理：

定理 1 典范链 $X=\{x_t,t\geqslant 0\}$ 是强马氏链.

证 我们的目的是要证明 (7). 由 (8), 亦即要证明

$$P(\Lambda;\xi(t_v)=j_v,0\leqslant v\leqslant N)=P(\Lambda,\xi(t_0)=j_0)\prod_{v=0}^{n-1}p_{j_vj_{v+1}}(t_{v+1}-t_v) \tag{30}$$

考虑 ω- 集

$$B_n=\Lambda\cap\bigcup_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{m}{n}\leqslant\alpha<\frac{m+1}{n};x\Big(\frac{m+1}{n}+t_v\Big)=j_v,\ 0\leqslant v\leqslant N\right\}$$

由引理 2,

$$\begin{aligned}P(B_n)&=\sum_{m=0}^{\infty}P\Big(\Lambda;\frac{m}{n}\leqslant\alpha<\frac{m+1}{n};x\Big(\frac{m+1}{n}+t_0\Big)=j_0\Big)\\&\quad\times P\Big(x\Big(\frac{m+1}{n}+t_v\Big)=j_v,\ 1\leqslant v\leqslant N\Big|\,x\Big(\frac{m+1}{n}+t_0\Big)=j_0\Big)\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\int_{[\frac{m}{n},\frac{m+1}{n})}r_{j_0}\Big(s,\frac{m+1}{n}+t_0\Big|\Lambda\Big)A(\Lambda;ds)Q\\&=\int_0^{\infty}r_{j_0}\Big(s,\frac{[ns+1]}{n}+t_0\Big|\Lambda\Big)A(\Lambda;ds)Q\end{aligned} \tag{31}$$

其中

$$Q=\prod_{v=0}^{N-1}p_{j_vj_{v+1}}(t_{v+1}-t_v) \tag{32}$$

由引理 3 及有界收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}P(B_n)=\int_0^{\infty}r_{j0}(s,s+t_0|\Lambda)A(\Lambda;ds)Q=r_{j0}(\Lambda;t_0)Q \tag{33}$$

如 $\omega\in\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=m}^{\infty}B_n$, 则存在一列有理数 $\{r_k\}\downarrow\alpha(\omega)$ 而且 $x(r_k+t_v,\omega)=j_v$, $0\leqslant v\leqslant N$, 故由 §2 定理 1, 对几乎一切这样的 ω 有 $\xi(t_v,\omega)=\underline{\lim}\limits_{t\downarrow\alpha(\omega)+t_v}x(t,\omega)=j_v$, 从而

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}B_n\subset\Lambda\cap\{\xi(t_v)=j_v,\ 0\leqslant v\leqslant N\} \tag{34}$$

由此及 (33) 得

$$P(\Lambda;\xi(t_v)=j_v,\ 0\leqslant v\leqslant N)\geqslant\lim_{n\to\infty}P(B_n)=r_{j_0}(\Lambda;t_0)Q \tag{35}$$

将此式两端对一切 $j_v\in E$, $1\leqslant v\leqslant N$ 求和, 由于 $\sum\limits_j p_{ij}(t)=1$, 得

$$P(\Lambda;\xi(t_0)=j_0)\geqslant r_{j_0}(\Lambda;t_0) \tag{36}$$

如 $t_0=0$, 由 (27),(36) 应是等式，从而 (35) 在 $t_0=0$ 时也必是等式 (否则将与 (36) 为等式矛盾). 如 $t_0>0$, 将 (36) 两方对 $j_0\in E$ 求和，由 (25) 得

$$P(\Lambda)\geqslant\sum_{j_0\in E}P(\Lambda;\xi(t_0)=j_0)\geqslant\sum_{j_0\in E}r_{j_0}(\Lambda;t_0)=P(\Lambda)\tag{37}$$

于是同样知 (35) 在 $t_0>0$ 时也取等式，故得证

$$P(\Lambda;\xi(t_v)=j_v,\ 0\leqslant v\leqslant N)=r_{j_0}(\Lambda;t_0)\prod_{v=0}^{N-1}p_{j_vj_{v+1}}(t_{v+1}-t_v)\tag{38}$$

由 (27),(36),(37) 知

$$P(\Lambda;\xi(t_0)=j_0)=r_{j_0}(\Lambda;t_0)\ (t_0\geqslant 0)\tag{39}$$

代入 (38) 后即得 (30). □

(三) 现在对强马氏性作一些讨论. 由强马氏性 (7) 可推出 (9), 然而 (9) 式还不足以说明 α- 后链 $\{\xi(t,\omega),t\geqslant 0\}$ 是以原 (p_{ij}) 为转移概率矩阵的定义在 $(\Delta,\Delta\mathcal{F},P(\cdot|\Delta))$ 上的马氏链，因为我们并没有证明它的最小状态空间含于 E; 也就是说，并没有证明原来的附加状态 ∞ 不属于 α- 后链的最小状态空间. 问题发生在 $t=0$ 这一点上，由于 (25) 中第二等式在 $t=0$ 应换为 $\sum\limits_j r_j(\Lambda;0)\leqslant P(\Lambda)$, 故根据 (28), 并在其中取 $\Lambda=\Delta\in\mathcal{F}_\alpha$ 后，得

$$P(\xi_0(\omega)=\infty|\Delta)\geqslant 0\tag{40}$$

(40) 中严格 “>” 号的确可能成立，例如，设 X 是具有保守密度矩阵而且同时满足向前与向后二方程组的可分链，令 $\alpha(\omega)$ 为第一个飞跃点 $\eta(\omega)$, 由 §2 系 4 知对 η- 后链有 $P(\xi_0(\omega)=\infty|\Delta)=1$, 只要 $P(\Delta)>0$.

虽然如此，由 (39),(37) 并取 $\Lambda=\Delta$ 后，对 $t>0$ 有

$$P(\xi_t\in E|\Delta)=\sum_{j\in E}P(\xi_t=j|\Delta)=1\tag{41}$$

亦即

$$P(\xi_t\neq\infty|\Delta)=1\ \ (t>0)\tag{42}$$

(40),(42) 表明：X 的附加状态 ∞ 虽然可属于 α- 后链 $\{\xi(t,\omega),t\geqslant 0\}$ 的最小状态空间，但对开 α- 后链 $\{\xi(t,\omega),t>0\}$ 而言，它仍是附加状态.

由此推出下列重要的系，令 $B=(\omega:\xi_0(\omega)\neq\infty)$. 以下总假定 $P(B)>0$, 注意 $B\subset\Delta$.

系 1 设 $X=\{x_t,t\geqslant 0\}$ 是典范链，转移概率矩阵为 (p_{ij}), $i,j\in E$. 那么定义在概率空间 $(B,B\mathcal{F},P(\cdot|B))$ 上的 α- 后链 $\{\xi(t,\omega),t\geqslant 0\}$ 也是典范链，它的最小状态空间 E' 含于 E, 转移概率矩阵是 (p_{ij}), $i,j\in E'$. 同样结论对定义在 $(\Delta,\Delta\mathcal{F},P(\cdot|B))$ 上的开 α- 后链 $\{\xi(t,\omega),t>0\}$ 也成立.

证 先证

$$(\xi(0,\omega)=j)\in\mathcal{F}_\alpha\ (j\in E)\tag{43}$$

实际上，对 $t \geqslant 0$, 令 A_{mn} 表 ω 集

$$A_{mn} = \left(\omega : j \text{ 是 } \left\{x_u(\omega), u \in R \cap \left[\tfrac{m}{n}t, \tfrac{m+1}{n}t\right)\right\} \text{ 的有限极限点}\right) \in \mathcal{F}_{\frac{m+1}{n}t}$$

其中 R 表 X 的可分集，则

$$\begin{aligned}(\alpha < t) \cap (\xi(0,\omega) = j) &= (\alpha < t) \cap (x(\alpha,\omega) = j) \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{n-1} \left[\left(\frac{m}{n}t \leqslant \alpha < \frac{m+1}{n}t\right) \cap A_{mn}\right] \in \mathcal{F}_t\end{aligned}$$

此得证 (43), 从而 $B = \bigcup\limits_{j \in E} (\xi(0,\omega) = j) \in \mathcal{F}_\alpha$.

在 (30) 中取 $\Lambda = B \supset (\xi(0,\omega) = j_0)$, 以 $P(B)$ 除两边得

$$P(\xi(t_v) = j_v, 0 \leqslant v \leqslant N|B) = P(\xi(t_0) = j_0|B) \times \prod_{v=0}^{N-1} p_{j_v j_{v+1}}(t_{v+1} - t_v)$$

$(t_0 = 0)$. 根据系 1 前的讨论，在 B 上的 α- 后链的最小状态空间 E' 显然含于 E, 这事实连同上式证明了这链的马氏性以及它的转移概率矩阵是 (p_{ij}) 的子矩阵 $(p_{ij}), i, j \in E'$. 此外，这链的 Borel 可测性和样本函数的右下连续性由 X 的相应的性质直接推出，剩下只要证完全可分性.

设 $\{\widetilde{\xi}_t, t \geqslant 0\}$ 是 $\{\xi_t, t \geqslant 0\}$ 的一完全可分、可测的修正，R 是 $[0,\infty)$ 中任一可列稠集. 对 B 中几乎一切 (关于 P)ω, 有 $\xi(r,\omega) = \widetilde{\xi}(r,\omega)$, 一切 $r \in R$. 其次，因为集 $\{(t,\omega) : \xi(t,\omega) \neq \widetilde{\xi}(t,\omega)\} \in \overline{\mathcal{B}_1 \times \mathcal{F}}$, 而且 $P\{\omega : \xi(t,\omega) \neq \widetilde{\xi}(t,\omega)\} = 0$ 对每固定 t 成立, 故由 Fubini 定理知对几乎一切 ω, 集 $\{t : \xi(t,\omega) \neq \widetilde{\xi}(t,\omega)\}$ 的 L 测度为 0. 最后，因 $\xi(\cdot,\omega)$ 的样本函数是 $x(\cdot,\omega)$ 的样本函数的尾部分，由 §1 定理 2(ii) 知，对几乎一切 ω, 集 $S_i(\omega) = \{t : \xi(t,\omega) = i\}$ 是自稠密集. 联合这三结论后可见: 对几乎一切 ω, 一开区间如与 $S_i(\omega)$ 相交，则也必与 $\widetilde{S}_i(\omega) = \{t : \widetilde{\xi}(t,\omega) = i\}$ 相交，而且又因 $\{\widetilde{\xi}_t, t \geqslant 0\}$ 关于 B 可分，它还与 $R \cap \widetilde{S}_i(\omega) = R \cap S_i(\omega)$ 相交，(任一 $i \in E$). 这说明对几乎一切 ω, 如 $t \in \bigcup\limits_{i \in E} S_i(\omega)$, 则必存在 R 的子列 $\{r_n\}$, 使 $r_n \to t, \xi_{r_n}(\omega) \to \xi_t(\omega)$. 如 $t \in S_\infty(\omega)$, 即如 $\xi_t(\omega) = \infty$, 由右下连续性，仍有 $\lim\limits_{r_n \downarrow t} \xi_{r_n}(\omega) = \infty = \xi_t(\omega)$. 这得证完全可分性.

对 Δ 上的开 α- 后链 $\{\xi(t,\omega), t > 0\}$ 的证明类似. □

下系说明 α- 前 σ 代数 $\mathcal{F}_\alpha$ 与 α- 后 σ 代数的条件独立性，它是强马氏性 (7) 的一个直接推论.

系 2 设 X 是强马氏链，又 $P\{\xi(0) = j\} > 0, j \in E$, 则对任意 $\Lambda \in \mathcal{F}_\alpha, C \in \mathcal{F}'_\alpha$, 有

$$P(\Lambda C|\xi(0) = j) = P(\Lambda|\xi(0) = j) \cdot P(C|\xi(0) = j) \tag{44}$$

特别，如存在某 $j \in E$, 使

$$\xi(0,\omega) = j \text{ (a.s.)} \omega \in \Delta \equiv (\alpha < \infty) \tag{45}$$

则 $\mathcal{F}_\alpha$ 与 $\mathcal{F}'_\alpha$ 关于测度 $P(\cdot|\Delta)$ 独立，即对任 $\Lambda \in \mathcal{F}_\alpha, C \in \mathcal{F}'_\alpha$, 有

$$P(\Lambda C|\Delta) = P(\Lambda|\Delta)P(C|\Delta) \tag{46}$$

证 设 $C=\{\xi(t_v)=j_v,1\leqslant v\leqslant N\}$, 如至少有一 $j_v=\infty$, 又 $t_v>0$, 由 (42) $P(\xi_{t_v}=\infty)=0$, 故 (44) 成立；若 $t_v=0$, 因 $(\xi(0)=\infty)\cap(\xi(0)=j)=\phi$, 故 (44) 也成立. 因而不妨设一切 $j_v\neq\infty, 1\leqslant v\leqslant N$. 在 (7) 中取 $t_0=0, j_0=j$, 并以 $P(\xi(0)=j)$ 除两边后，即知 (44) 对 $C=\{\xi(t_v)=j_v,1\leqslant v\leqslant N\}$ 成立；由 $\mathcal{F}'_\alpha$ 的定义可推知 (44) 对任 $C\in\mathcal{F}'_\alpha$ 都成立.

如 (45) 成立， (44) 化为 (46). □

仿照 §4.2 中的证明，由强马氏性可推得

$$E[f(x(\alpha+\cdot,\omega)|\mathcal{F}_\alpha)=E_{x(\alpha)}f(x(\cdot,\omega))\quad(\text{a.s.}\omega\in\Delta)\tag{47}$$

这里 f 是定义在 $E^{[0,\infty)}$ 上的关于 $\mathcal{B}^{[0,\infty)}$ 可测的有界函数， $\mathcal{B}$ 是 E 中全体子集所成的 σ 代数.

第十五章　马尔科夫链中的几个问题

§15.1　0–1　律

(一)　在过程论的研究中，往往出现概率为 0 或 1 的事件．对于独立随机变量序列 $\{x_n\}$, 这一现象是周知的．例如，事件 $(\omega; \sum_{n=0}^{\infty} x_n(\omega)$ 收敛) 的概率只能是 0 或 1. 近年来对于马氏过程，类似的研究也日益需要．这一节的目的，就是对这种现象，作一系统的讨论．

设 $X=\{x_t(\omega), t\geqslant 0\}$ 是取值于 $E=(i,j,\cdots)$ 中的可列马氏链，有转移概率为 $p_{ij}(s,t)$(不必是齐次的). 考虑下列 σ 代数

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}_t^s &= \mathcal{F}\{x_u, s\leqslant u\leqslant t\};\quad \mathcal{N}_t=\mathcal{N}_t^0\\
\mathcal{N}^s &= \mathcal{F}\{x_u, s\leqslant u\};\quad \mathcal{N}_{t+0}^s=\bigcap_{u>t}\mathcal{N}_u^s
\end{aligned}
$$

0–1 律有无穷近与无穷远的两种，先叙述前一种．

我们说，对 X 无穷近 0–1 律成立, 如果对任意 $s\geqslant 0, i\in E$ 及 $A\in\mathcal{N}_{s+0}^s$, 有 $P_{s,i}(A)=0$ 或 1.

命名的根据是：$\mathcal{N}_{s+0}^s$ 可直观地看成距 s 无穷近将来中的事件所成的 σ 代数．

定理 1　下列二条件中的任何一个都是使对 X 无穷近 0–1 律成立的充要条件：

(A) 对任意 $0\leqslant s<u, j\in E$, 存在一列 $\{t_n\}, t_n\downarrow s$, 使对一切 $i\in E$, 有

$$P_{s,i}\lim_{t_n\downarrow s} p_{x_{t_n},j}(t_n,u)=p_{ij}(s,u) \tag{1}$$

其中 $P_{s,i}\lim$ 表依概率 $P_{s,i}$ 收敛

(B) 对任意 $0\leqslant s\leqslant r\leqslant u,\ j\in E, i\in E$, 有

$$P_{s,i}(x_u=j\mid\mathcal{N}_{r+0}^s)=p_{x_r j}(r,u)\quad (P_{s,i}\ \text{a.s.}) \tag{2}$$

证　对任意 $0\leqslant s\leqslant v_n<u,\ j,i\in E$, 由马氏性有

$$P_{s,i}(x_u=j\mid\mathcal{N}_{v_n}^s)=p_{x_{v_n},j}(v_n,u)\quad (P_{s,i}\ \text{a.s.}) \tag{3}$$

令 $v_n\downarrow r\geqslant s$. 由 Martingale 收敛定理，知存在极限

$$\lim_{v_n\downarrow r} P_{s,i}(x_u=j\mid\mathcal{N}_{v_n}^s)=P_{s,i}(x_u=j\mid\mathcal{N}_{r+0}^s)\quad (P_{s,i}\ \text{a.s.})$$

故由 (3) 知极限 $\lim_{v_n\downarrow r} p_{x_{v_n},j}(v_n,u)$ 存在而且

$$P_{s,i}(x_u=j\mid\mathcal{N}_{r+0}^s)=\lim_{v_n\downarrow r} p_{x_{v_n},j}(v_n,u)\quad (P_{s,i}\ \text{a.s.}) \tag{4}$$

对任意 $\varepsilon > 0$ 及 $0 \leqslant s \leqslant r \leqslant t \leqslant u$, 有

$$\begin{aligned}
&P_{s,i}(|p_{x_tj}(t,u) - P_{x_rj}(r,u)| > \varepsilon) \\
&= \int_\Omega P_{s,i}(|p_{x_tj}(t,u) - p_{x_rj}(r,u)| > \varepsilon \mid \mathcal{N}_r^s) P_{s,i}(d\omega) \\
&= \int_\Omega P_{r,x_r}(|p_{x_tj}(t,u) - p_{x_rj}(r,u)| > \varepsilon) P_{s,i}(d\omega) \\
&= \sum_k P_{r,k}(|p_{x_tj}(t,u) - p_{kj}(r,u)| > \varepsilon) p_{ik}(s,r)
\end{aligned} \tag{5}$$

今设 (A) 成立而欲证 (B). 由 (1), 对任意 $r < u$, $j \in E$, 必存在一列 $r_n \downarrow r$, 使对一切 $k \in E$, 有

$$\lim_{r_n \downarrow r} P_{r,k}(|p_{x_{r_n},j}(r_n,u) - p_{kj}(r,u)| > \varepsilon) = 0$$

取 (5) 中的 t 为 r_n, 并令 $n \to \infty$, 由于 $\sum\limits_k p_{ik}(s,r) = 1$, 可在 $\sum\limits_k$ 号下取极限，故得

$$P_{s,i} \lim_{r_n \downarrow r} p_{x_{r_n},j}(r_n,u) = p_{x_rj}(r,u) \tag{6}$$

由于 (4) 中 $\{v_n\}$ 是任一满足 $v_n \downarrow r$ 的序列，特别可取 $v_n = r_n$; 比较 (4), (6) 并注意依概率收敛极限的唯一性，可见

$$P_{s,i}(x_u = j \mid \mathcal{N}_{r+0}^s) = p_{x_rj}(r,u) \quad (P_{s,i}\ \text{a.s.}) \tag{7}$$

对任意 $0 \leqslant s \leqslant r < u$ 及 $j \in E, i \in E$ 成立. 如果 $r = u$,(7) 式仍成立，因为这时双方都等于 $\chi_{\{j\}}(x_r)$, $(P_{s,i}\ \text{a.s.})$, $\chi_{\{j\}}$ 是 $\{j\}$ 的特征函数， $\chi_{\{j\}}(i) = \delta_{ij}$.

次设 (B) 正确而欲证无穷近 0–1 律成立. 由 (2) 并根据 E 的可列性，知对任 $A \in \mathcal{N}^r$, 有

$$P_{s,i}(A \mid \mathcal{N}_{r+0}^s) = P_{r,x_r}(A) \quad (P_{s,i}\ \text{a.s.}) \tag{8}$$

在 (8) 中取 $r = s$, $A \in \mathcal{N}_{s+0}^s$, 则左方由条件概率的性质应等于 A 的特征函数 $\chi_A(\omega)$, 而右方则显然等于 $P_{s,i}(A)$, $(P_{s,x}\ \text{a.s.})$, 因而

$$P_{s,i}(A) = \chi_A(\omega) \quad (P_{s,i}\ \text{a.s.})$$

这式说明 $P_{s,i}$- 几乎 $\chi_A(\omega)$ 是一常数，这常数是 0 或 1, 从而 $P_{s,i}(A) = 0$ 或 1.

最后设无穷近 0–1 律成立而欲证 (A). 在证 (4) 时已证对任一列 $t_n \downarrow s$, $s < u$, 存在极限 $\lim\limits_{t_n \downarrow s} p_{x_{t_n},j}(t_n,u)$, $(P_{s,i}\ \text{a.s.})$ 在此极限无定义的 ω 上补定义为 0 后，这极限显然为 $\mathcal{N}_{t_n}^s$ 可测，一切 n; 因而必然为 $\mathcal{N}_{s+0}^s = \bigcap\limits_n \mathcal{N}_{t_n}^s$ 可测. 既然由假设 $\mathcal{N}_{s+0}^s$ 只含 $P_{s,x}$ 测度为 0 或 1 的集，故存在与 ω 无关的常数 c, 使

$$\lim_{t_n \downarrow s} p_{x_{t_n},j}(t_n,u) = c \quad (P_{s,x}\ \text{a.s.}) \tag{9}$$

剩下只要证 $c = p_{ij}(s,u)$. 为此，利用马氏性及 (9) 得

$$\begin{aligned} p_{ij}(s,u) &= P_{s,i}(x_u = j) = P_{s,i}(x_s = i, x_u = j) \\ &= \int_{(x_s=i)} p_{x_{t_n},j}(t_n, u) P_{s,i}(d\omega) \\ &\to \int_{(x_s=i)} c P_{s,i}(d\omega) = c. \ \square \end{aligned}$$

为了要得到一些使无穷近 0-1 律成立的充分条件，只需对 $p_{ij}(s,t)$ 加些条件以使 (A) 满足.

称 $(p_{ij}(s,t))$ 为 **右标准的**, 如对任一 $s \geqslant 0$, 有

$$\lim_{t \downarrow s} p_{ii}(s,t) = 1 \quad (\text{一切 } i \in E) \tag{10}$$

特别，如 $(p_{ij}(s,t))$ 是齐次的，则右标准性化为标准性，即化为

$$\lim_{t \to 0+} p_{ii}(s,t) = 1 \quad (\text{一切 } i \in E) \tag{11}$$

定理 2 如 X 的转移概率矩阵 $(p_{ij}(s,t))$ 右标准，则对 X 无穷近 0–1 律成立.

证 先证在条件 (10) 下， $p_{ij}(s,t)$ 是 $s \in [0,t]$ 的右连续函数. 实际上，设 $t > r > s$, 则

$$p_{ij}(r,t) - p_{ij}(s,t) = p_{ij}(r,t)[1 - p_{ii}(s,r)] - \sum_{k \neq i} p_{ik}(s,r) p_{kj}(r,t) \tag{12}$$

右方两项都不超过 $1 - p_{ii}(s,r)$, 故

$$|p_{ij}(r,t) - p_{ij}(s,t)| \leqslant 1 - p_{ii}(s,r) \to 0 \quad (r \downarrow s) \tag{13}$$

其次，对任意 $\varepsilon > 0$, $s \leqslant r < t$ 有

$$\begin{aligned} P_{s,i}(|x_t - x_r| > \varepsilon) &= \sum_j P_{r,j}(|x_t - x_r| > \varepsilon) P_{ij}(s,r) \\ &\leqslant \sum_j [1 - p_{jj}(r,t)] p_{ij}(s,r) \end{aligned}$$

由 (10) 并注意 $\sum_j p_{ij}(s,r) = 1$, 根据控制收敛定理得

$$\lim_{t \downarrow r} P_{s,i}(|x_t - x_r| > \varepsilon) = 0$$

故存在一列 $t_n \downarrow r$, 使

$$\lim_{t_n \downarrow r} x_{t_n} = x_r \quad (P_{s,i} \text{ a.s.})$$

因为 E 中点孤立，故对 $P_{s,i}$ 几乎一切 ω, 存在正整数 $N(\omega)$, 当 $n > N(\omega)$ 时， $x_{t_n}(\omega) = x_r(\omega)$. 于是由 (13) 得

$$\lim_{t_n \downarrow r} p_{x_{t_n},j}(t_n, u) = p_{x_r j}(r,u), \quad (P_{s,i} \text{ a.s.}) \tag{14}$$

点列 $\{t_n\}$ 的选择虽然可能依赖于 i, 但由 E 的可列性，利用对角线方法，总可选取一列 $\{t_n\}$, $t_n \downarrow r$, 使 (14) 对一切测度 $P_{s,i}\ (i \in E)$ 成立. 在 (14) 中取 $r = s$ 即得证 (A). □

系 1 如 X 是齐次马氏链，具有标准转移概率矩阵，则无穷近 0–1 律成立.

例 1 同系 1 中假定，此外还设 X 可分. 对 E 的任一子集 H, 定义 t 集

$$S_H(\omega) = (t: \ x_t(\omega) \in H) \tag{15}$$

令 $A = (\omega: \ S_H(\omega) \cap (s, s+\varepsilon) = \phi$ 对某 $\varepsilon > 0$ 成立), ϕ 表空集；并令 $A_n = (\omega: \ S_H(\omega) \cap (s, s+\frac{1}{n}) = \phi)$. 显然 $A_n \subset A_{n+1}$,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n \tag{16}$$

自 Ω 中清洗可分性中例外的概率为 0 的集后， $A_n \in \mathcal{N}^s_{s+\frac{1}{n}}$, 故 $A \in \mathcal{N}^s_{s+0}$. 由系 1 得

$$P_{s,i}(A) = 0 \ \text{或} \ 1$$

例 2 作为无穷近 0–1 律不成立的例，设 X 只有三状态 0,1,2, 有齐次转移概率为

$$p_{00}(0) = 1, \ \ p_{01}(t) = p_{02}(t) = \frac{1}{2} \ \ (t > 0)$$

$$p_{11}(t) = p_{22}(t) = 1 \ \ (t \geqslant 0)$$

可选 X 的一修正 (仍记为 X) 使它的一切样本函数在 $t > 0$ 连续. 令

$$T(\omega) = \inf(t: \ t > 0, x_t(\omega) = 1)$$

$$A = (\omega: \ T(\omega) = 0)$$

显然此时 $A = (\omega: \ x_\varepsilon(\omega) = 1) \in \mathcal{N}^0_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ 任意，故 $A \in \mathcal{N}^0_{0+0}$, 然而 $P_0(A) = p_{01}(\varepsilon) = \frac{1}{2}$.

(二) 现在来讨论另一种 0–1 律

令 $\Pi = \bigcap_{t>0} \mathcal{N}^t$, 又 Π 关于 $P_{s,i}$ 的完全化 σ 代数记为 $\Pi_{s,i}$. 如对一切 $A \in \Pi_{s,i}$, 有 $P_{s,i}(A) = 0$ 或 1, 就说 $P_{s,i}$**-无穷远 0–1 律** 成立：如对任一 $s \geqslant 0$, $i \in E$, $P_{s,i}$- 无穷远 0–1 律都成立，就说无穷远 0–1 律成立. 直观上可称 $\Pi_{s,i}$ 中的集为尾事件，以后 $A \doteq B(P_{s,i})$ 表 $P_{s,i}(A \Delta B) \equiv P_{s,i}[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] = 0$.

下定理中结论 (i) 刻画了全体尾事件， (ii) ,(iii) 则给出此律成立的充要条件.

定理 3 任意固定 $A \in \pi_{s,i}$

(i) A 可表为

$$A \doteq \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} (x_{t_n} \in E_n) \doteq \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} (x_{t_n} \in E_n), \ \ (P_{s,i}) \tag{17}$$

其中 $\{t_n\}$ 为任一列常数， $t_n \uparrow \infty$, 而 $E_n \subset E(\{E_n\}$ 依赖于 $\{t_n\})$,

(ii) $P_{s,i}(A) = 0$ 或 1 的充要条件是：存在常数列 $\{t_n\}$. $t_n \uparrow \infty$ (因而对任一列如此的 $\{t_n\}$), 有

$$\lim_{n\to\infty} P_{t_n, x_{t_n}}(A) = c \ (\text{常数}), \ \ (P_{s,i} \ \text{a.s.}) \tag{18}$$

此时必然有 $P_{s,i}(A)=c$.

(iii) 如定义在 $(\Omega,\mathcal{N}^s,P_{s,i})$ 上的过程 $\{P_{t,x_t}(A),\ t\geqslant s\}$ 可分，则 $P_{s,i}(A)=0$ 或 1 的充要条件是

$$\lim_{t\to\infty}P_{t,x_t}(A)=c\quad (P_{s,i}\ \text{a.s.})\tag{19}$$

证 只须对 $A\in\Pi$ 证明. 由马氏性

$$P_{s,i}(A\mid\mathcal{N}_t^s)=P_{t,x_t}(A),\quad (P_{s,i}\ \text{a.s.})$$

令 t 沿任一列 $\{t_n\}$ 而趋于 ∞, 并注意 $A\in\Pi\subset\mathcal{N}^s$, 得

$$\chi_A(\omega)=P_{s,i}(A\mid\mathcal{N}^s)=\lim_{n\to\infty}P_{t_n,x_{t_n}}(A),\quad (P_{s,i}\ \text{a.s.})\tag{20}$$

任取常数 α, $0<\alpha<1$, 令

$$E_n=(j:\ P_{t_n,j}(A)>\alpha)\subset E\tag{21}$$

对此 $\{E_n\}$, (17) 成立. 实际上，以 Ω_0 表集

$$(\omega:\ \chi_A(\omega)=\lim_{n\to\infty}P_{t_n,x_{t_n}}(A))$$

由 (20), $P_{s,i}(\Omega_0)=1$. 如 $\omega\in A\Omega_0$, 则 $\chi_A(\omega)=1$, 故对一切充分大的 n, 有 $P_{t_n,x_{t_n}(\omega)}(A)>\alpha$, 亦即 $x_{t_n}(\omega)\in E_n$, 从而

$$\omega\in\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}(x_{t_n}\in E_n)$$

反之，如 $\omega\in\Omega_0-A$, 则 $\chi_A(\omega)=0$. 由 $\omega\in\Omega_0$ 还知，对一切充分大的 n 有 $P_{t_n,x_{t_n}(\omega)}(A)\leqslant\alpha$, 亦即 $x_{t_n}(\omega)\overline{\in}E_n$; 从而

$$\omega\overline{\in}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}(x_{t_n}\in E_n)$$

故得证：除可能差一 $P_{s,i}$ 零测集外，

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}(x_{t_n}\in E_n)\subset A\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}(x_{t_n}\in E_n)$$

但左方集显然包含右方集，故得证 (17).

为证 (ii), 只要证存在一列 $t_n\uparrow\infty$ 使 (18) 成立是 $P_{s,i}(A)=0$ 或 1 的充分条件，而 (18) 对任一列 $t_n\uparrow\infty$ 成立是必要条件.

设 (18) 对某列 $t_n\uparrow\infty$ 成立. 对照 (18) 与 (20), 可见 $\chi_A(\omega)=c$, $(P_{s,i}\ \text{a.s.})$, 故 c 必为 0 或 1 而且 $P_{s,i}(A)=c$. 反之，如 $P_{s,i}(A)=0$ 或 1, 则 $\chi_A=0$ 或 $\chi_A=1$ $(P_{s,i}\ \text{a.s.})$. 由 (20) 知，对任一列 $t_n\uparrow\infty$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}P_{t_n,x_{t_n}}(A)=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}P_{t_n,x_{t_n}}(A)=1$ $(P_{s,i}\ \text{a.s.})$. 在前一情况取 $c=0$, 在后一情况取 $c=1$ 即得证 (18) 对任一列 $t_n\uparrow\infty$ 成立.

最后，如 $\{P_{t,x_t}(A),t\geqslant s\}$ 是可分过程，则 (iii) 由 (ii) 及可分性推出 [1]. □

[1] 见 Doob [1] 第二章，定理 2.3.

注 1 以 $\Pi_{s,i}^{\{t_n\}}$ 表 σ 代数 $\prod\limits_{m=0}^{\infty}\mathcal{F}\{x_{t_n}, n \geqslant m\}$ 关于 $P_{s,i}$ 的完全化 σ 代数，$t_n \uparrow \infty$ 为任一固定序列. (17) 表示 $\Pi_{s,i} = \Pi_{s,i}^{\{t_n\}}$, 因此，对 X 的 $P_{s,i}$- 无穷远 0-1 律的研究，化为对序列 $\{x_{t_n},\ n \geqslant 0\}$ 的相应的研究.

例 3 设 $\{x_t, t \geqslant 0\}$ 是由独立随机变量组成的过程，此时 $P_{s,i} = P$ 与 s 及 i 无关，故 (21) 中的 E_n 为 E 或空集，从而 (17) 化为 $A \doteq \Omega$ 或 $A \doteq \phi$, 于是 $P(A) = 1$ 或 0. 这给出周知的独立随机变数列满足无穷远 0-1 律的另一证明. 注意 (18) 也满足.

(三) 从现在起只考虑齐次马氏链 X. 由于转移概率 (p_{ij}) 的齐次性，这时不宜考虑 $\Pi_i(= \Pi_{0,i})$ 而考虑它的子 σ 代数 $\mathfrak{A}$.

令 $A \in \mathfrak{A}_i$ 如 $A \in \Pi$, 而且对任一 $t \geqslant 0$ 有 $P_i(\theta_t A \Delta A) = 0$, θ_t 为 X 的推移算子[2]. 定义

$$\mathfrak{A} = \bigcap_{i \in E} \mathfrak{A}_i$$

并称 $\mathfrak{A}$ 中的集为 **不变集**. 由于

$$P_i(A \mid \mathcal{N}_t^0) = P_i(\theta A \mid \mathcal{N}_t^0) = P_{x_t}^0(A), \quad (P_i \text{ a.s.})$$

$$\chi_A(\omega) = \lim_{t_n \to \infty} P_i(A|\mathcal{N}_{t_n}^0) = \lim_{t_n \to \infty} P_{x_{t_n}}(A), \quad (P_i \text{ a.s.}) \tag{22}$$

正如由 (20) 可证明定理 3 一样，由 (22) 可证明下定理:

定理 4 任意固定 $A \in \mathfrak{A}$ 及 $i \in E$.

(i) 集 A 可表为

$$A \doteq \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} (x_{t_n} \in e_\alpha) \doteq \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} (x_{t_n} \in e_\alpha) \quad (P_i \text{ a.s.}) \tag{23}$$

其中 $e_\alpha = (j:\ P_j(A) > \alpha) \subset E$, $0 < \alpha < 1$, $t_n \uparrow \infty$ 任意.

(ii) 为使 $P_i(A) = 0$ 或 1, 充要条件是存在一列常数 $\{t_n\}$, $t_n \uparrow \infty$ (因而对任一列如此的 $\{t_n\}$), 有

$$\lim_{n \to \infty} P_{x_{t_n}}(A) = c, \ (\text{常数}), \ (P_i \text{ a.s.}) \tag{24}$$

这时必有 $P_i(A) = c$.

(iii) 如 $(\Omega, \mathcal{N}^0, P_i)$ 上的过程 $\{P_{x_t}(A),\ t \geqslant 0\}$ 可分，则 $P_i(A) = 0$ 或 1 充要条件是

$$\lim_{t \to \infty} P_{x_t}(A) = c, \quad (P_i \text{ a.s.}) \tag{25}$$

(四) 设 X 的转移概率 $p_{ij}(t)$ 是 t 的 L- 可测函数，因而是 $t \in (0, \infty)$ 连续函数. 称状态 $i\ (\in E)$ 是 X 的 **常返状态**, 如果 $\int_0^\infty p_{ii}(t)\, dt = \infty$; 称过程 X 常返，如一切状态常返.

---

[2] 过程 $X_T = \{x_t(\omega),\ t \geqslant 0\}$ 的 $s \geqslant 0$**推移** 为过程 $X_{s+T} = \{x_{s+t}(\omega),\ t \geqslant 0\}$, s 可依赖于 ω; 设 g 为定义在 $E^{[0,\infty)}$ 上的 $\mathcal{B}^{[0,\infty)}$ 可测函数. $\mathcal{B}$ 是 $E = (i)$ 中全体子集所成的 σ 代数，又 $\xi(\omega) = g(X_T)$. 称 $\xi(\omega)$ 的 s 推移为 $\theta_s\xi = g(X_{s+T})$. 直观地说，ξ 如何依赖于 X_T, 则 $\theta_s\xi$ 以同样方式依赖于 X_{s+T}. 如 $B \in \mathcal{F}\{X_T\}$, 则集 $\theta_s B$ 由下式定义: $\chi_{\theta_s B} = \theta_s \chi_B$.

引理 1 i 常返的充要条件是：对某一 (或每一) $h>0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(nh) = \infty$$

证 设 E 已按 §13.1 对 (p_{ij}) 分解为 $F, I, J, \cdots$, 如 $i \in F$, 由 §13.1 知

$$\int_0^{\infty} p_{ii}(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(nh) = 0$$

故只要考虑 $i \overline{\in} F$.

如 $i \overline{\in} F$, $\lim\limits_{t\to 0} p_{ii}(t) = u_i > 0$, 再注意到 $p_{ii}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 的连续性及恒正性，知

$$\delta(h) \equiv \min_{0\leqslant r\leqslant h} p_{ii}(r) > 0$$

易见

$$\lim_{0\leqslant r\leqslant h} p_{ii}(t+r) \geqslant p_{ii}(t) \cdot \min_{0\leqslant r\leqslant h} p_{ii}(r) = p_{ii}(t)\delta(h)$$

$$m_n(h) \equiv \min_{nh\leqslant t\leqslant (n+1)h} p_{ii}(t) \geqslant p_{ii}(nh)\delta(h)$$

类似有

$$M_n(h) \equiv \max_{nh\leqslant t\leqslant (n+1)h} p_{ii}(t) \leqslant p_{ii}([n+1]h)/\delta(h)$$

联合后二等式，得

$$\delta(h)h \sum_{n=0}^{N-1} p_{ii}(nh) \leqslant h \sum_{n=0}^{N-1} m_n(h) \leqslant \int_0^{Nh} p_{ii}(t)\,dt$$

$$h \sum_{n=0}^{N-1} M_n(h) \leqslant \delta(h)^{-1} h \sum_{n=1}^{N} p_{ii}(nh)$$

令 $N\to\infty$ 后即得证引理中的结论. □

对 $h>0$, 考虑过程 $X=\{x_t,\ t\geqslant 0\}$ 的 **离散骨架**

$$X_h = \{x_{nh},\ n=0,1,2,\cdots\} \tag{26}$$

X_h 是一具有离散参数的齐次马氏链， n 步转移概率矩阵为

$$(p_{ij}(nh)),\quad i,j \in E,$$

X_h 与 X 有相同的开始分布，定义在同一概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上.

由引理 1 得知， i 是 X 的常返状态的充要条件是对 X_h 常返 (任意 $h>0$). 取 $h=1$, 由离散参数马氏链的理论知：此时有 [1]

$$P_i(x_n = i \text{ 对无穷多个 } n) = 1 \tag{27}$$

[1] 见 §2.7, 14.

说关于 X, 自 i 可到 j, 并记为 $i \Longrightarrow j$, 如存在 $t>0$, 使 $p_{ij}(t)>0$. 由 §13.1, $p_{ij}(h)>0$, 故关于 X_h 自 i 也可到 j; 反之是显然的. 因而 "$i \Longrightarrow j$" 的概念对 X 与对 X_h 是等价的. 如 $i \Longrightarrow j, j \Longrightarrow i$, 就说 i,j**互通**, 并记为 $i \Longleftrightarrow j$.

定理 5 设 (p_{ij}) 是可测转移矩阵, i 常返, 则对任意 $A \in \mathfrak{A}$, 有 $P_i(A)=0$ 或 1, 再如 $i \Longrightarrow j$, 则 $p_i(A)=p_j(A)$ 或者同为 0, 或者同为 1.

证 由 (22) 知对 P_i 几乎一切 ω, 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{x_n}(A)$; 由 (27) 得

$$\lim_{n\to\infty} P_{x_n}(A)=P_i(A)\ (\text{常数})\ \ (P_i\ \text{a.s.})$$

故 (24) 对 $t_n=n$ 及 $c=P_i(A)$ 满足, 从而 $P_i(A)=0$ 或 1.

其次, 有

$$\begin{aligned} P_i(A) &= E_i[P_i(A \mid \mathcal{N}_t)]=E_i[P_i(\theta_t A \mid \mathcal{N}_t)] \\ &= E_i P_{x_t}(A)=\sum_j p_{ij}(t)P_j(A) \end{aligned} \tag{28}$$

由 $i \Longrightarrow j$ 知存在 $t>0$, 使 $p_{ij}(t)>0$; 取 (28) 中的 t 为此 t, 如 $P_i(A)=0$, 由 (28) 得 $P_j(A)=0$; 如 $P_i(A)=1$, 注意到

$$\sum_j p_{ij}(t)=1$$

即知 $P_j(A)=1$. □

系 2 设 (p_{ij}) 为可测转移矩阵, 一切状态互通、常返, 则对任意 $A \in \mathfrak{A}$, 有

$$P_i(A)\equiv 0\ (\text{一切 } i),\ \text{或} P_i(A)\equiv 1\ (\text{一切 } i) \tag{29}$$

由于系 2 的启发, 引出下列定义:

设 X 为齐次马氏链, 如果对任意 $A\in\mathfrak{A}$,(29) 成立, 就说对 X**强无穷远**0–1 律成立. 此律的进一步研究留待下节.

例 4 设 f 为定义在 E 上的非负函数, 过程 X 可测, (p_{ij}) 也可测. 由

$$\begin{aligned} \left(\omega:\int_0^\infty f(x_t)\,dt=\infty\right) &= \left(\omega:\int_s^\infty f(x_t)\,dt=\infty\right) \\ &= \theta_s\left(\omega:\int_0^\infty f(x_t)\,dt=\infty\right) \end{aligned}$$

知事件 $A=\left(\omega:\int_0^\infty f(x_t)\,dt=\infty\right)\in\mathfrak{A}$. 故如 i 常返, 则 $P_i(A)=0$ 或 1. 特别, 取 f 为集 $H(\subset E)$ 的示性函数, 则 A 化为 $(\omega: L[S_H(\omega)]=\infty)$, 其中 $S_H(\omega)$ 由 (15) 定义, 而 L 表 Lebesgue 测度.

§15.2 常返性与过份函数

(一) 设 (p_{ij}) 为可测转移矩阵, 在 §1 中已经看到: 状态 i 的常返性 "$\int_0^\infty p_{ii}(t)\,dt=\infty$" 等价于 "$\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}(nh)=\infty, h>0$ 任意", 即等价于 i 在离散骨架 X_h 中的常返性; 因而也等价

于：

$$P_i(x_{nh}=i \text{ 对无穷多个 } n=n(\omega) \text{ 成立})=1 \tag{1}$$

在本节前三段中，我们总设 (p_{ij}) 标准．对这种矩阵，常返性有更多的等价性质．任取以 (p_{ij}) 为转移概率矩阵的可分、可测过程 $X=\{x_t,\ t\geqslant 0\}$, 仍令 $S_i(\omega)=\{t:\ x_t(\omega)=i\}$, L 表 Lebesgue 测度．

定理 1 设 $i\neq\infty$, 则下列条件等价：

(i) i 常返；

(ii) $P_i(S_i(\omega)$ 无界 $)=1$;

(iii) $P_i(L[S_i(\omega)]=\infty)=1$.

证 (i) → (ii): 由 (1) 即得． (iii) → (i): 只要注意

$$E_iL[S_i(\omega)]=E_i\int_0^\infty \chi_{\{i\}}(x_t)\,dt=\int_0^\infty E_i\chi_{\{i\}}(x_t)\,dt=\int_0^\infty p_{ii}(t)\,dt \tag{2}$$

剩下只要证 (ii) → (iii). 为此只要证关于概率 P, 有

$$A_1\equiv\{S_i(\omega)\text{ 无界}\}\doteq\{L[S_i(\omega)]=\infty\}\equiv A_2$$

实际上，对 a.s. $\omega\in A_1$, 我们有 $x_r(\omega)=i$ 对 R 中一无界子集中的 r 成立， R 表可分集．由 §14.1 (17), 对任 $\eta>0$, 存在与 r 无关的常数 $\varepsilon=\varepsilon(\eta)>0$, 使

$$P_{r,i}\Big\{L[S_i(\omega)\cap(r,r+\varepsilon)]>\frac{\varepsilon}{2}\Big\}\geqslant 1-\eta \tag{3}$$

故对每 $r\in R$ 有

$$\begin{aligned}
&P\{L[S_i(\omega)\cap(r,\infty)]>\frac{\varepsilon}{2}\Big\}\\
&\geqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}P\Big\{x\Big(r+\frac{v}{2^n}\Big)\neq i,\ 0<v<m;\ x\Big(r+\frac{m}{2^n}\Big)=i\Big\}\\
&\quad\times P_{r+\frac{m}{2^n},i}\Big\{L\Big[S_i\cap\Big(r+\frac{m}{2^n},\infty\Big)\Big]>\frac{\varepsilon}{2}\Big\}\\
&\geqslant P(A_1)(1-\eta)
\end{aligned} \tag{4}$$

令 $r\to\infty$, 得 $P(A_2)\geqslant P(A_1)(1-\eta)$. 由 η 的任意性，得 $P(A_2)\geqslant P(A_1)$; 但 $P(A_2)\leqslant P(A_1)$, 而且 $A_2\subset A_1$, 故 $A_1\doteq A_2$. □

附带指出：如 $\int_0^\infty p_{ii}(t)\,dt<\infty$, 由 (2) 知 $P_i(A_2)=0$. 结合 (iii) 可见： $P_i(A_1)=P_i(A_2)$ 只能为 0 或 1, 视 $\int_0^\infty p_{ii}(t)\,dt<\infty$ 或 $=\infty$ 而定．

常返性的一个更简单的充要条件如下：设 X 是典范链，对任意 $i\in E$, 定义

$$\tau^{(i)}(\omega)=\inf(t:\ t>0,\ x_t(\omega)=i) \tag{5}$$

当右方括号中 t- 集空时，令 $\tau^{(i)}(\omega)=\infty$. 令 $\Omega_i=(\tau^{(i)}(\omega)<\infty)$, 由 X 的右下半连续性，有

$$x(\tau^{(i)},\omega)=i\quad(\omega\in\Omega_i) \tag{6}$$

称 $\tau^{(i)}(\omega)$ 为**首达 i 的时刻**, 它是 §14.3 (10) 中所定义的 $\gamma_j(\omega)$ 的特殊情形 (在那里应取 $j=i$, $\alpha(\omega)\equiv 0$), 因而是马氏时刻.

定理 2 设 X 是典范链，则 X 是互通的常返链的充要条件是：对任意 $i,j\in E$,

$$P_j(\Omega_i)=1 \tag{7}$$

证 定义两列随机变量 $I_n(\omega)$, $K_n(\omega)$, $n=1,2,\cdots$

$$\left.\begin{array}{ll} I=\tau^{(i)}, & K=\tau^{(k)} \\ I_1=I, & K_1=I_1+\theta_{I_1}K \\ I_n=K_{n-1}+\theta_{K_{n-1}}I, & K_n=I_n+\theta_{I_n}K \end{array}\right\} \tag{8}$$

直观上， I_1 为首达 i 的时刻， K_1 为首达 i 后首达 k 的时刻， I_2 为到达 i 再到 k 后首达 i 的时刻， $\cdots\cdots$. 它们都是马氏时刻，而且

$$\left.\begin{array}{ll} x(I_n,\omega)=i, & \text{如}\,\omega\in(I_n<\infty) \\ x(K_n,\omega)=k, & \text{如}\,\omega\in(K_n<\infty) \end{array}\right\} \tag{9}$$

今设 (7) 成立，试证对任 $j\in E$, 任意正整数 n,

$$P_j(I_n<\infty)=1,\quad P_j(K_n<\infty)=1$$

实际上，当 $n=1$ 时此由 (7) 正确. 设上式对 $n=m$ 成立，由强马氏性及 (7) 得

$$\begin{aligned} P_j(I_{m+1}<\infty)&=P_j(K_m<\infty,K_m+\theta_{K_m}I_1<\infty)\\ &=P_j(K_m<\infty,\theta_{K_m}(I_1<\infty))=\int_{(K_m<\infty)}P_{x(K_m)}(I_1<\infty)\,P_j(d\omega)\\ &=P_K(I_1<\infty)P_j(K_m<\infty)=1. \end{aligned}$$

同样可证 $P_j(K_{m+1}<\infty)=1$.

于是由刚才所证及 I_n,K_n 的定义，得

$$I_1<K_1<I_2<K_2<\cdots<\infty,\quad (P_j\ \text{a.s.})$$

因而 $\{I_n\}$, $\{K_n\}$ 有公共的极限 η. 如果 $\eta(\omega)<\infty$, 则当 $t\uparrow\eta(\omega)$ 时，根据 (9), $x(t,\omega)$ 有两个有限的极限 i 及 k, 此与 §14.2 定理 1 矛盾，故

$$\lim_{n\to\infty}I_n(\omega)=\lim_{n\to\infty}K_n(\omega)=\infty,\quad (P_j\ \text{a.s.})$$

此结果当 $j=i$ 时自然也成立，这与 (9) 中第一式联合后，可见定理 1 中条件 (ii) 满足，故得证 i 的常返性 ($i\in E$).

由于 (p_{ij}) 在 $(0,\infty)$ 上或恒为 0, 或恒大于 0, 并注意 (7) 得 $p_{ji}(t)>0$, 故一切状态互通，这得证 (7) 为 X 互通常返的充分条件.

反之，设 X 互通常返，那么 X_h 亦然. 根据具离散参数马氏链的理论，对 $j,i\in E$, 有

$$p_j(x_{nh}=i\ \text{对无穷多个}\ n\ \text{成立})=1$$

由此即推出 (7). □

(二) 联系于马氏链 X, 有一类重要的函数：过份函数和它的特殊情形 —— 调和函数，它们与常返性和无穷远 0-1 律间有着密切的联系.

设 X 的转移概率为 $p_{ij}(t)$, $i,j\in E$. 定义在 E 上的非负函数 (可取 ∞ 为值)f 称为 [关于 X 或 (p_{ij})]**过份的**, 如果对任意 $t\geqslant 0$, 有

$$\sum_j p_{ij}(t)f(j)\leqslant f(i),\quad (i\in E) \tag{10}$$

称有限、非负函数 f 为 (关于 X 或 (p_{ij}))**调和的**, 如果 (10) 式取等号.

如 X 是具有离散时间参数为 $n=0,1,2,\cdots$ 的齐次马氏链，一步转移概率为 p_{ij}, 同样对它可定义过份函数与调和函数，只要把 (10) 中的 t 理解为正整数 n, 其实这时要使 (10)(或其等式) 对一切正整数成立，只需它分别对 $n=1$ 成立就够了.

设 $X=\{x_t,t\geqslant 0\}$ 的离散骨架为 $X_h(h>0)$, f 是 X 的过份 (或调和) 函数，由定义显然可见 f 也是 X_h 的过份 (或调和) 函数.

定理 3 设 X 的转移概率矩阵 (p_{ij}) 标准，一切状态互通，则 X 常返的充要条件是它的任一过份函数等于一常数.

证 由互通性及 §13.1 定理 4, $p_{ij}(t)>0$ $(t>0)$, 设 f 过份，如在某 j_0 有 $f(j_0)=\infty$, 则由

$$f(i)\geqslant\sum_j p_{ij}(t)f(j)\geqslant p_{ij_0}(t)f(j_0)=\infty$$

知 $f(i)\equiv\infty\,(i\in E)$, 故只要考虑有限的过份函数.

设 X 常返，f 是它的有限过份函数，则 X_1 也常返，而且 f 也是 X_1 的过份函数，因而

$$\sum_j p_{ij}(1)f(j)\leqslant f(i),\quad (i\in E) \tag{11}$$

考虑随机序列 $\{f(x_n),n\geqslant 0\}$, 由于马氏性及 (11), 有

$$E_i\{f(x_{n+1})\mid x_0,\cdots,x_n\}=E_i\{f(x_{n+1})\mid x_n\}=\sum_j p_{x_nj}(1)f(j)\leqslant f(x_n),\quad (P_i\text{ a.s.}) \tag{12}$$

这说明 $[f(x_n),\ \mathcal{F}\{x_0,\cdots,x_n\}]$ 关于测度 P_i 是一半鞅. 由后者的收敛定理 [1], 存在有限极限

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\xi,\quad (P_i\text{ a.s.}) \tag{13}$$

由 X_1 的常返性及互通性，对任意 $j\in E$,

$$P_i(x_n=j\text{ 对无穷多个 }n)=1 \tag{14}$$

由 (13),(14) 得 $P_i(\xi=f(j))=1$. 由于 j 任意，又有 $P_i(\xi=f(k))=1$, 从而 $f(j)=f(k)$ $(j,k\in E)$. 这得证必要性.

---

[1] 见 Дынкин [2], 779 页.

今设任一过份函数是常数. 由 (p_{ij}) 的标准性，不妨设 X 是典范链. 对任意 $i \in E$, 定义随机变量

$$\tau_t^{(i)}(\omega) = \inf(s: \ s > 0, \ x_{t+s}(\omega) = i)$$

如括号中 s- 集空，就定义它为 ∞. 再令

$$f(j) = P_j(\tau^{(i)} < \infty) = E_j \chi_{(\tau^{(i)} < \infty)} \tag{15}$$

$\tau^{(i)} = \tau_0^{(i)}$ 是首达 i 的时刻， $\tau_t^{(i)}$ 是 t 以后首达 i 的时刻， $f(j)$ 是自 j 出发，终于要到达 i 的概率. 我们证明， f 是一过份函数，实际上

$$\begin{aligned}\sum_k p_{jk}(t) f(k) &= E_j f(x_t) = E_j E_{x_t} \chi_{(\tau^{(i)} < \infty)} = E_j \theta_t \chi_{(\tau^{(i)} < \infty)} = E_j \chi_{(\tau_t^{(i)} < \infty)} \\ &\leqslant E_j \chi_{(\tau^{(i)} < \infty)} = f(j)\end{aligned}$$

由假定， $f(j) \equiv c$ (常数). 根据 X 的右下半连续性，显然有 $f(i) = 1$, 从而

$$P_j(\tau^{(i)} < \infty) \equiv 1, \quad (j \in E)$$

由定理 2 即知 X 常返. □

(三) 与定理 3 相应，试考虑强无穷远 0–1 律与调和函数间的关系. 为此对 X 加些条件.

称 $X = \{x_t, \ t \geqslant 0\}$ 是右连续链，如果对任一对 (t, ω), $x_t(\omega) \neq \infty$, 而且对每 $\omega \in \Omega$, $x(\cdot, \omega)$ 是 t 的右连续函数.

由于 E 的拓扑离散， E 中每点孤立，故如 $x(t, \omega) = i$, 由右连续性必存在 $h = h(\omega) > 0$, 使在 $[t, t+h]$ 中， $x(\cdot, \omega)$ 恒等于 i. 因此，对右连续链 X, 如 (p_{ij}) 标准，则一切状态 i 是稳定的.

定理 4 设 X 右连续，它的 (p_{ij}) 标准，则强无穷远 0–1 律成立的充要条件是任一有界调和函数是一常数.

证 充分性：任取不变集 A, 有

$$P_i(A) = P_i(\theta_t A) = E_i E_{x_t} \chi_A = E_i P_{x_t}(A) = \sum_j p_{ij}(t) P_j(A) \quad (t \geqslant 0) \tag{16}$$

故 $P_i(A)$ 是有界调和函数，由假定， $P_i(A) \equiv c \ (i \in E)$, c 为常数，于是 §1 定理 4(ii) 中 (24) 式满足，故得知 $P_i(A)$ 或恒等于 0, 或恒等于 1.

必要性：任取有界调和函数 $u(i)$, 考虑过程 $\{u(x_t), t \geqslant 0\}$, 由马氏性及 u 的调和性

$$E_i[u(x_{s+t}) \mid x_u, u \leqslant s] = E_i[u(x_{s+t}) \mid x_s] = \sum_j p_{x_s j}(t) u(j) = u(x_s) \tag{17}$$

这表示 $[u(x_t) \cdot \mathcal{F}\{x_u, \ u \leqslant t\}]$ 关于 P_i 是一鞅；因 x_t 右连续， $u(x_t)$ 也右连续，故它是一可分鞅，根据后者的收敛定理，存在极限

$$\lim_{t \to \infty} u[x_t(\omega)] = \xi(\omega) \quad (P_i \text{ a.s.})$$

由于

$$\theta_s\xi(\omega) = \lim_{t\to\infty} u[x_{t+s}(\omega)] = \xi(\omega)$$

知 ξ 为 $\mathfrak{A}$ 可测. 根据假定, 强无穷远 0-1 律成立, $\mathfrak{A}$ 只含 P_i 测度为 0 或 1 的集, 而且如 $P_i(A)=1$, 则 $P_j(A)=1$ $(i,j\in E)$. 因此, 存在不依赖于 i 的常数 c, 使

$$\xi = c \quad (P_i \text{ a.s.}) \tag{18}$$

因而

$$E_i\xi \equiv c \quad (i \in E) \tag{19}$$

但另方面, 由 u 的有界性及 $u(x_t)$ 的鞅性, 得

$$E_i\xi = E_i \lim_{t\to\infty} u(x_t) = \lim_{t\to\infty} E_i u(x_t) = \lim_{t\to\infty} E_i E_i[u(x_t) \mid x_0] = E_i u(x_0) = u(i)$$

由此及 (19) 即得 $u(i)\equiv c$, $(i\in E)$. □

(四) 在 §13.1 中, 我们已经证明: 对可测转移矩阵 (p_{ij}), 存在极限

$$v_{ij} = \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) \tag{20}$$

现在来进一步讨论 v_{ij}.

设 E 中一切状态互通, 于是对离散骨架 $X_1=\{x_n,\ n\geqslant 0\}$, 一切状态也互通, 而且周期为 1. 根据具离散参数马氏链的理论 [1] 存在与 i 无关的极限 v_j

$$v_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) \tag{21}$$

由 (20),(21) 知 $v_{ij}=v_j$ 不依赖于 i

由 $\sum\limits_j p_{ij}(t)=1$ 显然得

$$0 \leqslant v_j; \qquad \sum_j v_j \leqslant 1 \tag{22}$$

由具离散参数马氏链的理论还知道: 只有两种可能, 或者一切 $v_j>0$ 而且 $\sum\limits_j v_j=1$; 或者一切 $v_j=0$. 前一种情况发生的充要条件是 X_1(因而任一离散骨架 X_h, $h>0$) 为遍历链; 这时 $\{v_j\}$ 构成 E 上一概率分布. 如取此 $\{v_j\}$ 为 X 的开始分布, 则由 $ 13.1 (43) 得

$$v_j = \sum_k v_k p_{kj}(t) = P(x(t)=j)$$

这表示 $P(x(t)=j)$ 与 $t\geqslant 0$ 无关, 一切 $j\in E$. 具有这种性质的分布称为 X 的 (或 (p_{ij}) 的)**平稳分布**. 显然, 它也是 X_1(及任一 X_h) 的平稳分布. 但由离散参数马氏链的结论, 在状态互通情况下, X_1 的平稳分布是唯一的. 故 X 的平稳分布也是唯一的. 故得证

定理 5 设 X 有可测转移矩阵, 每 $p_{ij}(t)>0$, $t>0$. 则 X (或 $(p_{ij}(t))$) 有平稳分布的充分必要条件是 X_1 (或每 X_h, $h>0$) 是遍历链; 这时平稳分布 $\{v_j\}$ 是唯一的; 它由 (21) 给出; $v_j>0$.

---

[1]参看 §2.4; §2.5.

§15.3 积分型随机泛函的分布

(一) 设 $X = \{x_t(\omega), t \geqslant 0\}$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的马氏链，它的转移概率矩阵 (p_{ij}) 标准；我们还假定它的密度矩阵 $Q = (q_{ij})$ 保守，即满足

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} = -q_{ii} \equiv q_i < \infty \quad (i \in E) \tag{1}$$

设 X 可分，由 §13.3, 以概率 1 存在跳跃点列

$$0 \equiv \tau_0(\omega) < \tau_1(\omega) < \tau_2(\omega) < \cdots < \infty \tag{2}$$

第一个飞跃点是

$$\eta(\omega) = \lim_{n \to \infty} \tau_n(\omega) \tag{3}$$

我们知道，在 $[0, \eta(\omega))$ 中， $x(\cdot, \omega)$ 是右连续的跳跃函数，除去一个 ω- 零测集外. 为简单计，设此零测集已自 Ω 中清洗出去，并设 X 是典范链.

定义随机变量列

$$y_n(\omega) = x(\tau_n, \omega), \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{4}$$

由于 X 的强马氏性， $\{y_n(\omega)\}$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的齐次马氏链，一步转移概率矩阵为 (r_{ij}), 其中

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \frac{q_{ij}}{q_i}, \quad \text{如} q_i > 0 \ (i \neq j) \\ &= 0, \quad \text{如} q_i > 0 \ (i = j) \\ &= \delta_{ij}, \quad \text{如} q_i = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

称 $\{y_n\}$ 为 X 的 **嵌入链**.

引理 1 说明 $\eta(\omega)$ 可直观地看成 $x(\cdot, \omega)$ 的 “第一个无穷”:

引理 1 对几乎一切 ω

$$\eta(\omega) = \begin{cases} \inf(t: \ t > 0, \ \lim\limits_{s \uparrow t} x(s, \omega) = \infty), & \text{如括号中 } t \text{ 集非空} \\ \infty & \text{否则} \end{cases}$$

证 如 $\eta(\omega) = \infty$, 则因 $x(\cdot, \omega)$ 在 $(0, \infty)$ 是跳跃函数，故上面括号中的 t 集空. 如 $\eta(\omega) < \infty$, 由于 $x(\cdot, \omega)$ 在 $[0, \eta(\omega))$ 中跳跃. 不可能存在 $t < \eta(\omega)$, 使 t 能满足括号中的条件，故只要证对 (a.s.) $\omega \in (\eta(\omega) < \infty)$, 有 $\lim\limits_{s \uparrow \eta} x(s, \omega) = \infty$, 设若不然，有

$$P(\eta < \infty; \ \text{当 } s \uparrow \eta \text{ 时 } x(s, \omega) \text{ 至少有一有限极限点}) > 0$$

则必存在常数 $T < \infty$ 及 $i \in E$ 使

$$\begin{aligned} 0 &< P(\eta < T, \ x(\cdot, \omega) \text{ 在 } [0, T] \text{ 中有一极限点为 } i) \\ &\leqslant P(x(\cdot, \omega) \text{ 在 } [0, T] \text{ 中有无穷多个 } i\text{- 区间}) \end{aligned}$$

但由 §14.1 定理 1, 最后一概率应为 0, 矛盾. □

$\eta(\omega)$ 的另一种刻画方式如下：任取 E 的一列有穷子集 $\{E_n\}$, 使

$$E_n \subset E_{n+1}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E \tag{6}$$

并定义随机变量列 $\{\eta_n(\omega)\}$:

$$\eta_n(\omega) = \begin{cases} \inf(t : t > 0, x(t,\omega) \overline{\in} E_n), & \text{如括号中 } t \text{ 集非空} \\ \infty & \text{否则} \end{cases} \tag{7}$$

直观上， $\eta_n(\omega)$ 为首出 E_n 的时刻.

引理 2 对几乎一切 ω

$$\eta(\omega) = \lim_{n\to\infty} \eta_n(\omega) \tag{8}$$

证 $\{\eta_n\}$ 对 n 不减 (a.s.), 故右方极限存在. 由于 $x(\tau_m) \in E = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n$, (a.s.), 故对正整数 n, 存在 $N = N(n,\omega)$, 使 $x(\tau_k) \in E_N (0 \leqslant k \leqslant n)$, 从而 $\tau_n \leqslant \eta_N \leqslant \lim\limits_{m\to\infty} \eta_m$, 由 (3) 得

$$\eta(\omega) \leqslant \lim_{n\to\infty} \eta_n(\omega) \quad (a.s.)$$

下证反号不等式成立，我们来证明 $\eta(\omega) \geqslant \eta_n(\omega)$ (a.s.), 为此只要考虑 $\eta(\omega) < \infty$ 的情形. 这时由引理 1, 存在 $s_m = s_m(\omega) \uparrow \eta(\omega)$, 使 $\lim\limits_{m\to\infty} x(s_m,\omega) = \infty$. 由于 E_n 是有穷集，故存在 $N = N(\omega)$, 当 $k \geqslant N$ 时， $x(s_k,\omega) \overline{\in} E_n$. 根据 (7) 得

$$\eta(\omega) \geqslant s_k(\omega) \geqslant \eta_n(\omega) \quad \text{(a.s.)}. \ \square$$

现在来研究 τ_n 及 η_n 的分布. 为简单起见，设

$$E_n = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$$

因而 E 重合于全体非负整数集. 令

$$F_{in}(t) = P_i(\eta_n \leqslant t) \quad (0 \leqslant i < n) \tag{9}$$

$$G_{in}(t) = P_i(\tau_n \leqslant t) \quad (0 \leqslant i < \infty) \tag{10}$$

$$G_i(t) = P_i(\eta \leqslant t) \quad (0 \leqslant i < \infty) \tag{11}$$

利用已给的密度矩阵 $Q = (q_{ij})$, 通过 §13.3(40) 或 (41), 可得 ${}_np_{ij}(t)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. 它们的概率意义见 §13.3(39). 最后令

$$f_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_np_{ij}(t) \tag{12}$$

它是自 i 出发，沿 X 的轨道，经有穷多次跳跃而于 t 时到达 j 的概率.

当 $t < 0$ 时，显然 $G_{in}(t) = G_i(t) = F_{in}(t) = 0$, 故以后只考虑 $t \geqslant 0$.

引理 3

$$G_{in}(t) = \int_0^t \sum_j {}_{n-1}p_{ij}(s) q_j \, ds \tag{13}$$

$$G_i(t) = \lim_{n\to\infty} G_{in}(t) = 1 - \sum_j f_{ij}(t) \tag{14}$$

证 对 $A \subset E$, 引入记号

$$ {}_n p_{iA}(t) = \sum_{j\in A} {}_n p_{ij}(t) \tag{15}$$

我们有

$$G_{in}(t) = 1 - P_i(\tau_n > t) = 1 - \sum_{m=0}^{n-1} {}_m p_{iE}(t) \tag{16}$$

另方面，由 §13.3(41), 对 $n \geqslant 1$ 有

$$\int_0^t {}_n p_{ij}(u) q_j \, du = \int_0^t \int_0^u \sum_{k\neq j} {}_{n-1}p_{ik}(s) q_{kj} e^{-q_j(u-s)} q_j ds du$$

$$= \sum_{k\neq j} \int_0^t {}_{n-1}p_{ik}(s) q_{kj} [1 - e^{-q_j(t-s)}] ds = \sum_{k\neq j} \int_0^t {}_{n-1}p_{ik}(s) q_{kj} ds - {}_n p_{ij}(t)$$

对 $j \in E$ 求和得

$$ {}_n p_{iE}(t) = \int_0^t \sum_j {}_{n-1}p_{ij}(s) q_j \, ds - \int_0^t \sum_j {}_n p_{ij}(s) q_j \, ds$$

故

$$\sum_{m=0}^{n-1} {}_m p_{iE}(t) = e^{-q_i t} + \int_0^t q_i e^{-q_i s} \, ds - \int_0^t \sum_j {}_{n-1}p_{ij}(s) q_j \, ds$$

$$= 1 - \int_0^t \sum_j {}_{n-1}p_{ij}(s) q_j \, ds$$

此式与 (16) 结合即得 (13). (14) 即 §13.3 中 (45) 式. □

为求 $F_{in}(t)$, 把 $\overline{E}_n = \{n, n+1, n+2, \cdots\}$ 合起来看成一个新的状态，仍记为 n, 并引进

$$\overline{x}(t,\omega) = \begin{cases} x(t,\omega), & \text{如} t < \eta_n(\omega) \\ n, & \text{如} t \geqslant \eta_n(\omega) \end{cases} \tag{17}$$

$\{\overline{x}(t,\omega), t \geqslant 0\}$ 是具有限多个状态 $\{0,1,2,\cdots,n\}$ 的右连续强马氏链，一边样本函数是跳跃函数， n 为吸引状态. 它的密度矩阵是 $\overline{Q} = (\overline{q}_{ij})$, $i,j \in \{0,1,\cdots,n\}$,

$$\left.\begin{aligned} &\overline{q}_{ij} = q_{ij} \quad (0 \leqslant i,j < n) \\ &\overline{q}_{in} = \sum_{j\geqslant n} q_{ij} = q_i - \sum_{\substack{j=0\\(j\neq i)}}^{n-1} q_{ij} \\ &\overline{q}_{ni} = 0 \ (0 \leqslant i \leqslant n) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

它的转移概率矩阵为 $(\bar{p}_{ij}(t))$, $\bar{p}_{ij}(t)=\sum_{m=0}^{\infty}{}_m\overline{p_{ij}(t)}$, 而 ${}_m\overline{p_{ij}(t)}$ 可通过 §13.3(40) 或 (41) 求得，只要把那里的 (q_{ik}) 换为 (18) 中的 $(\bar{q}_{ik})$.

引理 4

$$\left.\begin{aligned}&F_{in}(t)=\overline{p_{in}(t)}\quad(0\leqslant i<n)\\&F_{nn}(t)=1\quad(t\geqslant 0)\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

证 因 $P_n(\eta_n=0)=1$, 故

$$1\geqslant F_{nn}(t)=P_n(\eta_n\leqslant t)\geqslant P_n(\eta_n=0)=1\quad(t\geqslant 0)\tag{20}$$

其次，对 $0\leqslant i<n$, 有

$$F_{in}(t)=P_i(\eta_n\leqslant t)=P_i(\bar{x}(t)=n)=\overline{p_{in}(t)}.\ \square$$

(二) 设已给 E 上一非负函数 V, 在许多实际问题中，要求研究下列积分型随机泛函

$$\xi^{(n)}(\omega)=\int_0^{\eta_n(\omega)}V[x(t,\omega)]\,dt\tag{21}$$

$$\xi(\omega)=\int_0^{\eta(\omega)}V[x(t,\omega)]\,dt=\lim_{n\to\infty}\xi^{(n)}(\omega)\tag{22}$$

的分布. 令

$$\mathcal{F}_{in}(t)=P_i(\xi^{(n)}\leqslant t),\quad \varphi_{in}(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}d\mathcal{F}_{in}(t)\quad(i<n)\tag{23}$$

$$\mathcal{F}_i(t)=P_i(\xi\leqslant t),\quad \varphi_i(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}d\mathcal{F}_i(t)\tag{24}$$

为了研究这些函数，我们来引进一个新的过程.

对正的函数 V, 伴随着原有的 Q 过程 X, 考虑典范链 $\widetilde{X}=\{\widetilde{x}(t,\omega),t\geqslant 0\}$, 它具有密度矩阵为

$$\widetilde{Q}=(\widetilde{q}_{ij}),\quad \widetilde{q}_{ij}=\frac{q_{ij}}{V(i)}\tag{25}$$

X,Y 间有下列关系：

1° 自 i 出发，第一个 i- 区间的长不超过 t 的概率，对 X 为 $1-e^{-q_it}$, 对 $\widetilde{X}$ 为 $1-e^{-[q_i/(V(i))]t}$, 如 $V(i)>0$. 这表明将 X 的 i- 区间的长乘以 $V(i)$ 后，此乘积的分布恰为 $\widetilde{X}$ 的 i- 区间长的分布 (在开始分布集中在 i 的条件下).

2° 自 i 出发，经一次跳跃后转移到 j 的概率，对 $X,\widetilde{X}$ 都同为 q_{ij}/q_i $(q_i>0)$. 如 $q_i=0$, 则 i 同为 X 及 $\widetilde{X}$ 的吸引状态.

因此，对 X 在第一个飞跃点以前的轨道，如将每一 i- 区间伸长 (或缩短)$V(i)$ 倍后 $(i\in E)$, 可以看成为 $\widetilde{X}$ 在第一个飞跃点以前的轨道. 根据这个理由，我们称 $\widetilde{X}$ 为 X 的 V-**伸缩链**. 令

$$S_k^{(n)}(\omega)=\{t:\ x(t,\omega)=k,\ t<\eta_n(\omega)\}\tag{26}$$

由于 X 的可测性，对每 ω, $S_k^{(n)}(\omega)$ 是 t 的 L 可测集， L 表 Lebesgue 测度， $L[S_k^{(n)}(\omega)]$ 是随机变数，而且根据上面所述

$$\xi^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1}V(k)L[S_k^{(n)}]=\widetilde{\eta}_n \tag{27}$$

这里 $\widetilde{\eta}_n$ 是 $\widetilde{X}$ 的首出 E_n 的时刻.

这样，当 $V>0$ 时，对 X 的 $\xi^{(n)}$ 的研究，化为对 $\widetilde{X}$ 的 $\widetilde{\eta}_n$ 的研究，于是可运用上一段中的结果. 由引理 4,

$$\left.\begin{aligned}&\mathcal{F}_{in}(t)=\widetilde{p}_{in}(t)\\&\mathcal{F}_{nn}(t)=1\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

这里 $(\widetilde{p}_{ij})$, $i,j=0,1,\cdots,n$, 是转移概率矩阵，有密度矩阵为 $\widetilde{S}=(\widetilde{s}_{ij})$;

$$\left.\begin{aligned}&\widetilde{s}_{ij}=\frac{q_{ij}}{V(i)}\quad(0\leqslant i,j<n)\\&\widetilde{s}_{in}=\frac{q_i}{V(i)}-\sum_{\substack{j=0\\(j\neq i)}}^{n-1}\frac{q_{ij}}{V(i)}\\&\widetilde{s}_{ni}=0\quad(0\leqslant i\leqslant n)\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

定理 1 设 $V(i)>0\ (i\in E)$.

(i) $\mathcal{F}_{in}(t)\ (0\leqslant i<n)$ 满足方程组

$$\left.\begin{aligned}&V(i)\frac{d\mathcal{F}_{in}(t)}{dt}=\sum_{k=0}^{n-1}q_{ik}\mathcal{F}_{kn}(t)+q_i-\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n-1}q_{ij}\\&\qquad\qquad(0\leqslant i<n)\\&\mathcal{F}_{nn}(t)=1\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

(ii) $\mathcal{F}_i(t)=1-\sum\limits_{j=0}^{\infty}g_{ij}(t)$ (31)

其中 (q_{ij}) 是向后方程

$$\left.\begin{aligned}&V(i)g'_{ij}(t)=\sum_{j=0}^{\infty}q_{ik}g_{kj}(t)\quad(0\leqslant i<\infty)\\&g_{ij}(0)=\delta_{ij}\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

的最小解.

证 (i) (30) 中第二式显然正确. 写出 $\widetilde{P}(t)=(\widetilde{p}_{ij}(t))$ 所应满足的向后方程

$$\widetilde{p'}(t)=(\widetilde{s}_{ij})\widetilde{P}(t)$$

由此得

$$\widetilde{p'}_{in}(t)=\sum_{k=0}^{n}\widetilde{s}_{ik}\widetilde{p}_{kn}(t) \tag{33}$$

以 (28) 及 (29) 代入 (33) 即得证 (30) 中前一式.

(ii) 在 (27) 中令 $n \to \infty$, 得 $\xi = \widetilde{\eta}$(a.s.), $\widetilde{\eta}$ 是 $\widetilde{X}$ 的第一个飞跃点；故由 (14) 即得 (31). 因 (g_{ij}) 是最小 $\widetilde{s}$- 过程的广转移概率. 写下对 (g_{ij}) 的向后方程，即知它是 (32) 的最小解. □

由 (28) 可见 $\mathcal{F}_{in}(t)$ 连续，再由 (30) 知它在 $[0,\infty)$ 上有连续导数 $\mathcal{F}'_{in}(t)$, $(i<n)$.

根据定理 1, 不难推出 $\mathcal{F}_{in}(t)$ 及 $\mathcal{F}_i(t)$ 的 Laplace-Stieltjes 变换

$$\varphi_{in}(\lambda) = E_i e^{-\lambda\xi^{(n)}} \tag{34}$$

$$\varphi_i(\lambda) = E_i e^{-\lambda\xi} \tag{35}$$

所应满足的方程.

定理 2 设 $V(i) \geqslant 0$ 但不恒等于 0, 又

$$P_i(\eta_n < \infty) = 1, \quad (0 \leqslant i < n) \tag{35_1}$$

则有

(i)

$$\left.\begin{aligned} \lambda V(i)\varphi_{in}(\lambda) &= \sum_{k=0}^{n-1} q_{ik}\varphi_{kn}(\lambda) + \Bigg(q_i - \sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n-1} q_{ij}\Bigg)\varphi_{nn}(\lambda), \\ & \qquad (0 \leqslant i < n) \\ \varphi_{nn}(\lambda) &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

(ii)

$$\lambda V(i)\varphi_i(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} q_{ik}\varphi_k(\lambda) \quad (0 \leqslant i < \infty,\ \lambda > 0) \tag{37}$$

证 先设 $V(i) > 0$, $0 \leqslant i < n$. 由 (30) 第二式得 $\varphi_{nn}(\lambda) = 1$. 在 (30) 第一式中两方取 Laplace-Stieltjes 变换，并注意 $\varphi_{nn}(\lambda) = 1$, 即得证 (36).

如果对 $i = 0, \cdots, n-1$, $V(i)$ 不全大于 0, 那么在 $[0, 1, \cdots, n]$ 上，引进函数 V_m;

$$\left.\begin{aligned} V_m(i) &= V(i), \quad \text{如 } V(i) > 0 \text{ 或 } i = n \\ &= \frac{1}{m}, \qquad \text{如} V(i) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

由于 (35_1) 及积分有界收敛定理，当 $m \to \infty$ 时

$$\xi_m^{(n)}(\omega) \equiv \int_0^{\eta_n(\omega)} V_m[x(t,\omega)]dt \to \xi^{(n)}(\omega), \quad (P_i \text{ a.s.})$$

因而 $\xi_m^{(n)}$ 的分布函数 $F_{in}^{(m)} \equiv P_i(\xi_m^{(n)} \leqslant t)$ 弱收敛于 $F_{in}(t)$; 又

$$\varphi_{in}^{(m)}(\lambda) = E_i e^{-\lambda\xi_m^{(n)}} \to \varphi_{in}(\lambda), \quad (m \to \infty)$$

由刚才所证知 $\varphi_{in}^{(m)}(\lambda)$ $(0 \leqslant i < n)$ 满足 (36), 即

$$\lambda V_m(i)\varphi_{in}^{(m)}(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} q_{ik}\varphi_{kn}^{(m)}(\lambda) + \Bigg(q_i - \sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n-1} q_{ij}\Bigg)\varphi_n^{(m)}(\lambda) \quad (0 \leqslant i < n)$$

$$\varphi_{nn}^{(m)} = 1$$

令 $m \to \infty$, 即知 $\varphi_{in}(\lambda)$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ 满足 (36), 这完全证明了 (i).

注意 $\sum\limits_j |q_{ij}| = 2q_i < \infty$; 又当 $\lambda > 0$ 时, $\varphi_{in}(\lambda) \leqslant 1$, 故由 $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{in}(\lambda) = \varphi_i(\lambda)$, 并在 (36) 中令 $n \to \infty$, 即得 (37). □

(三) 类似于 (21), 考虑

$$\xi_n(\omega) = \int_0^{\tau_n(\omega)} V[x(t,\omega)]\,dt \tag{39}$$

ξ_n 与 $\xi^{(n)}$ 不同之处在于 (39) 中积分上限 $\tau_n(\omega)$ 是第 n 次跳跃点, $\tau_0(\omega) \equiv 0$. 仍然有

$$\xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \tag{40}$$

因而也可以通过 ξ_n 来研究 ξ. 在对 ξ 的某些问题的研究中, 有时用 ξ_n 更方便. 为了说明这点, 我们来研究什么时候随机积分 $\xi(\omega) \equiv \int_0^{\eta(\omega)} V[x(t,\omega)]\,dt$ 几乎处处发散.

在这一段中, 除 (1) 外对 Q 还假定

$$q_i > 0 \quad (i \in E) \tag{41}$$

仿 (34), 定义

$$\psi_{in}(\lambda) = E_i e^{-\lambda \xi_n(\omega)} \tag{42}$$

引理 5 $\psi_{in}(\lambda)$ 满足下列递推方程

$$(\lambda V(i) + q_i)\psi_{in}(\lambda) = \sum_{j\neq i} q_{ij}\psi_{jn-1}(\lambda) \quad (i \in E) \tag{43}$$

$$\psi_{i0}(\lambda) = 1 \tag{44}$$

证 因 $\xi_0(\omega) \equiv 0$, 故 (44) 显然.

注意 τ_1 是马氏时刻, τ_1- 前 σ 代数是 $\mathcal{F}\{x_t, t \leqslant \tau_1\}$ (见 §14.3), 对 τ_1 用强马氏性, 得

$$\begin{aligned}
\psi_{in}(\lambda) &= E_i\left\{\exp\left[-\lambda\int_0^{\tau_n} V(x_t)\,dt\right]\right\} \\
&= E_i\left(E^i\left\{\exp\left[-\lambda\int_0^{\tau_1} V(x_t)\,dt - \lambda\int_{\tau_1}^{\tau_n} V(x_t)\,dt\right]\middle|\mathcal{F}\{x_t, t \leqslant \tau_1\}\right\}\right) \\
&= E_i\left(\exp\left[-\lambda\int_0^{\tau_1} V(x_t)\,dt\right] E_{x_{\tau_1}}\left\{\exp\left[-\lambda\int_0^{\tau_{n-1}} V(x_t)\,dt\right]\right\}\right) \\
&= \sum_{j\neq i}\frac{q_{ij}}{q_i} E_i\{\exp[-\lambda V(i)\tau_1]\} E_j\left\{\exp\left[-\lambda\int_0^{\tau_{n-1}} V(x_t)\,dt\right]\right\}
\end{aligned}$$

因为 $P_i(\tau_1 \leqslant t) = 1 - e^{-q_i t}$

$$E_i\{\exp[-\lambda V(i)\tau_1]\} = \int_0^\infty e^{-\lambda V(i)t} q_i e^{-q_i t}\,dt = \frac{q_i}{\lambda V(i) + q_i} \tag{45}$$

代入上式得

$$\psi_{in}(\lambda) = \sum_{j\neq i} \frac{q_{ij}}{\lambda V(i) + q_i}\psi_{jn-1}(\lambda) \tag{46}$$

这就是 (43). □

当 $\lambda>0$ 时，在 (43) 中令 $n\to\infty$ 可重新得到 (37).

引理 6 设对某 $\lambda>0$, 实数列 $u_i(i\in E)$ 满足方程组

$$(\lambda V(i)+q_i)u_i=\sum_{j\neq i}q_{ij}u_j \quad (i\in E) \tag{47}$$

$$|u_i|\leqslant 1 \tag{48}$$

则

$$|u_i|\leqslant \psi_i(\lambda)=E_ie^{-\lambda\xi} \tag{49}$$

证 由 (48) 及 (44),$u_i\leqslant 1=\psi_{i0}(\lambda)$. 设对一切 j 有 $u_j\leqslant\psi_{jn-1}(\lambda)$, 则由 (47) 及 (43)

$$\begin{aligned}(\lambda V(i)+q_i)u_i&=\sum_{j\neq i}q_{ij}u_j\leqslant\sum_{j\neq i}q_{ij}\psi_{jn-1}(\lambda)\\&=(\lambda V(i)+q_i)\psi_{in}(\lambda)\end{aligned}$$

故得 $u_i\leqslant\psi_{in}(\lambda)$. 令 $n\to\infty$ 有 $u_i\leqslant\varphi_i(\lambda)$. 类似可证 $-\varphi_i(\lambda)\leqslant u_i$. □

定理 3 对一切 $i\in E$, $P_i(\xi=\infty)=1$ 的充要条件是下列二条件中的任一个：

(i) 对某 (因而一切)$\lambda>0$,(47) 没有非平凡有界解；

(ii) 对某 (因而一切)$\lambda>0$, (47) 没有非平凡非负有界解.

证 充分性：设 (ii) 对某 $\lambda>0$ 成立，既然由 (37), $\varphi_i(\lambda)=E_ie^{-\lambda\xi}$ 是 (47) 的非负有界解，故 $\varphi_i(\lambda)=0$ $(\lambda>0)$, 从而 $P_i(\xi=\infty)=1$.

必要性：设 $P_i(\xi=\infty)=1$, 因而 $\varphi_i(\lambda)=0$ $(\lambda>0)$. 如存在某 $\lambda>0$, 对此 λ, (47) 有一有界解 u_i, 那么，由引理 6, $|u_i|=0$, 故 (i) 对一切 $\lambda>0$ 成立. □

现在用 (4) 中定义的嵌入链 $\{y_n\}$ 来叙述 ξ 几乎处处 (关于 P) 等于 ∞ 的充要条件.

定理 4 $\xi=\infty$ (a.s.) 的充要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{V(y_n)}{q_{y_n}}=\infty \quad \text{(a.s.)} \tag{50}$$

证 令 $\rho_0=\tau_1$, $\rho_n=\tau_{n+1}-\tau_n$. 由强马氏性有

$$\begin{aligned}&P(\rho_n>\lambda\mid\rho_0,y_1,\rho_1,y_2,\cdots,\rho_{n-1},y_n)\\&\quad=P(\rho_n>\lambda\mid y_n)=e^{-\lambda q_{y_n}}, \quad \text{(a.s.)}\end{aligned} \tag{51}$$

由此可证明

$$\begin{aligned}&P(V(y_n)\rho_n>\lambda\mid\rho_0,y_1,\rho_1,y_2,\cdots,\rho_{n-1},y_n)\\&\quad=P(V(y_n)\rho_n>\lambda\mid y_n)=e^{-\lambda q_{y_n}/V(y_n)}, \quad \text{(a.s.)}\end{aligned} \tag{52}$$

其中当 $V(i)=0$ 时，理解 $e^{-\lambda q_i/V(i)}=0$ $(\lambda>0)$. 实际上， $e^{-\lambda q_{y_n}/V(y_n)}$ 是 $\mathcal{F}\{y_n\}$ 可测函数，故更关于 $\mathcal{F}_n\equiv\mathcal{F}\{\rho_0,y_1,\cdots,\rho_{n-1},y_n\}$ 可测；其次，对任一 $\Lambda\in\mathcal{F}_n$ 或 $\mathcal{F}\{y_n\}$, 有

$\Lambda_i \equiv \Lambda \cap (y_n = i) \in \mathcal{F}_n$ 或 $\mathcal{F}\{y_n\}$. 由 (51),

$$P(V(y_n)\rho_n > \lambda, \Lambda_i) = P\Big(\rho_n > \frac{\lambda}{V(i)}, \Lambda_i\Big)$$
$$= \int_{\Lambda_i} e^{-\lambda q_{y_n}/V(i)} P(d\omega) = \int_{\Lambda_i} e^{-\lambda q_{y_n}/V(y_n)} P(d\omega)$$

对 $i \in E$ 求和得

$$P(V(y_n)\rho_n > \lambda, \Lambda) = \int_{\Lambda} e^{-\lambda q_{y_n}/V(y_n)} P(d\omega)$$

这得证 (52). 由 (52) 得

$$P(V(y_n)\rho_n \mid \rho_0, y_1, \cdots, \rho_{n-1}, y_n) = \frac{V(y_n)}{q_{y_n}}; \quad \text{(a.s.)} \tag{53}$$

令 $\zeta_n = V(y_n)\rho_n$, $\zeta_n' = \min(\zeta_n, 1)$. 又令

$$\sigma_n = \sum_{v=0}^{n} \{\zeta_v' - E[\zeta_v' \mid \zeta_0, \cdots, \zeta_{v-1}]\} \tag{54}$$

简记 σ- 代数 $\mathcal{F}\{\zeta_0, \cdots, \zeta_n\}$ 为 Z_n, 则

$$E\{\sigma_{n+1}|Z_n\} = E\Big\{\sum_{v=0}^{n+1}[\zeta_v' - E(\zeta_v' \mid Z_{v-1})] \mid Z_n\Big\}$$
$$= \sum_{v=0}^{n+1} E(\zeta_v' \mid Z_n) - \sum_{v=0}^{n+1} E(\zeta_v' \mid Z_{v-1})$$
$$= \sum_{v=0}^{n} \zeta_v' + E(\zeta_{n+1}' \mid Z_n) - E(\zeta_{n+1}' \mid Z_n) - \sum_{v=0}^{n} E(\zeta_v' \mid Z_{v-1})$$
$$= \sum_{v=0}^{n} \{\zeta_v' - E[\zeta_v' \mid Z_{v-1}]\} = \sigma_n$$

这表示 $\{\sigma_n, Z_n, n \geqslant 0\}$ 是一鞅. (54) 右方的被加项一致有界为 1, 故可用鞅的一定理 [1] 由是知以概率 1 下二级数

$$\sum_n \zeta_n' \text{ 及 } \sum_n E(\zeta_n' \mid Z_{n-1}) \tag{55}$$

同时收敛或发散. 此外, 易见 $\sum\limits_n \zeta_n'$ 与级数 $\xi = \sum\limits_n V(y_n)\rho_n$ 也以概率 1 同时收敛或发散. 另方面, 回忆

$$P_j(V(i)\tau_1 < t) = 1 - e^{-q_i t/V(i)}$$

得

$$E[\zeta_n' \mid y_n = i) = E[\min(V(i)\rho_n, 1) \mid y_n = i] = E_i[\min(V(i)\tau_1, 1)]$$
$$= \frac{q_i}{V(i)} \int_0^1 t e^{-q_i t/V(i)} dt + \frac{q_i}{V(i)} \int_1^\infty e^{-q_i t/V(i)} dt = \frac{V(i)}{q(i)}[1 - e^{-q_i/V(i)}]$$

[1] 见 Doob, [1], 323 页.

如 $V(i)=0$, 上式右方理解为 0. 由上式知

$$E(\zeta_n' \mid Z_{n-1}) = E(\zeta_n' \mid y_n) = \frac{V(y_n)}{q(y_n)}[1 - e^{-q_{y_n}/V(y_n)}]$$

然而对任意正数列 $\{q_n\}$, 二级数 $\sum\limits_n \frac{V(n)}{q_n}[1-e^{-q_n/V(n)}]$ 与 $\sum\limits_n \frac{V(n)}{q_n}$ 同为收敛或发散. 从而 (55) 中第二级数与 $\sum\limits_n \frac{V(y_n)}{q_{y_n}}$ 以概率 1 同时收敛或发散, 这与前一方面的结果相结合即得所欲证. □

系 1 设已给满足 (1) 与 (41) 的矩阵 Q. 下列二条件中的任何一个都是 Q 过程 (或以 Q 为密度矩阵的转移概率矩阵) 唯一的充要条件:

(A) 对某 (或一切) $\lambda > 0$, 方程组

$$(\lambda + q_i)u_i = \sum_{j \neq i} q_{ij} u_j \quad (i \in E) \tag{56}$$

无非平凡 (非负) 有界解:

$$(B) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} q_{y_n}^{-1} = \infty \quad \text{(a.s.)} \tag{57}$$

证 因为由定理 5 与 4, (A) 或 (B) 都等价于任一可分 Q 过程的第一个飞跃点 η 几乎处处等于 ∞, 故系 1 的结论由 §13.3 定理 4(ii) 推出. □

§15.4 嵌入问题

(一) 本节中我们研究下列**嵌入问题**: 设已给随机矩阵 $\mathcal{P} = (p_{ij})$, $i, j \in E = (0, 1, 2, \cdots)$, 就是说, 已给满足下列条件的矩阵 $\mathcal{P} = (p_{ij})$:

$$0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1, \quad \sum_j p_{ij} = 1 \tag{1}$$

试问何时存在具有连续参数的标准转称矩阵 $P(t) = (p_{ij}(t))$, $i, j \in E$, 以及常数 $h > 0$, 使

$$P(h) = \mathcal{P} \tag{2}$$

不妨设 $h = 1$, 因为如 (2) 成立, 则取 $\overline{P}(t) = P(th)$, 就得 $\overline{P}(1) = \mathcal{P}$; 反之, 如 (2) 当 $h = 1$ 正确, 对任意 $h > 0$, 取 $\widetilde{P}(t) = P\left(\frac{t}{h}\right)$, 就得 $\widetilde{P}(h) = \mathcal{P}$. 因此, 以下恒设 $h = 1$, 从而问题化为: 对 $\mathcal{P}$ 应加什么条件, 才能找到标准转移矩阵 $P(t)$, 满足

$$P(1) = \mathcal{P} \tag{3}$$

如果对 $\mathcal{P}$ 嵌入问题有解, 就是说, 满足 (3) 的 $P(t)$ 存在, 就称 $\mathcal{P}$ 为一**离散骨架**. 全体离散骨架的集记为 M.

(3) 并不一定有解, 实际上, 为使 $\mathcal{P} \in M$ 的一个简单的必要条件是 $p_{ii} > 0$, 因为对标准转移矩阵恒有

$$p_{ii}(t) > 0 \quad (t \geqslant 0, \ i \in E)$$

下面会看到，即使 (3) 有解，解也可不唯一.

(二) 称随机矩阵 $\mathcal{P}$ 为无穷可分的，如存在一列随机矩阵 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots$, 使

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1^2,\ \mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n+1}^2 \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{4}$$

称无穷可分的随机矩阵 $\mathcal{P}$ 为连续的，如对任一列正整数 $m_n = o(2^n)$, $n \to \infty$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_n^{m_n} = I = (\delta_{ij}) \tag{5}$$

这里的收敛表逐元收敛.

全体连续的无穷可分随机矩阵构成集 N.

定理 1 $M = N$

证 如 $\mathcal{P} \in M$, 则存在标准转移矩阵 $P(t)$ 使 (3) 成立. 取 $\mathcal{P}_n = P\left(\frac{1}{2^n}\right)$, 并利用 $P(t)$ 的标准性， $\mathcal{P}_n^{m_n} = P\left(\frac{1}{2^n}\right)^{m_n} = P\left(\frac{m_n}{2^n}\right) \to I$, 即知 $\mathcal{P} \in N$.

下证 $N \subset M$. 设存在一列 $\mathcal{P}_n$, 满足 (4),(5). 利用这一列 $\mathcal{P}_n$, 先在二进位有理数 r 上定义 $P(r)$, 然后利用连续性扩大 $P(r)$ 的定义域到全体非负的 t 上而得 $P(t)$, $t \geqslant 0$, 详情如下.

对二进位有理数 $r = \frac{m}{2^n}$, 其中 m, n 都是非负整数，定义

$$P(r) = \mathcal{P}_n^m$$

首先证明这定义是合理的，即如 $r = \frac{m}{2^n} = \frac{m'}{2^{n'}}$, 则 $\mathcal{P}_n^m = \mathcal{P}_{n'}^{m'}$. 不妨设 $n' > n$, $m' = m \cdot 2^{n'-n}$,

$$\mathcal{P}_n^m = (\mathcal{P}_{n+1}^2)^m = (\mathcal{P}_{n+2}^2)^{2m} = \mathcal{P}_{n+2}^{2^2 \cdot m} = \cdots = \mathcal{P}_{n+(n'-n)}^{2^{n'-n}\cdot m} = \mathcal{P}_{n'}^{m'}$$

于是在全体非负二进位有理数集 R 上定义了 $P(r) = (p_{ij}(r))$, $r \in R$, 试讨论它的性质.

(i) $P(r)$ 是随机矩阵；

(ii) $P(r + r') = P(r)P(r')$, $r, r' \in R$.

实际上，设 $r = \frac{m}{2^n}$, $r' = \frac{m'}{2^n}$, 则

$$\begin{aligned} P(r + r') &= P\left(\frac{m + m'}{2^n}\right) = \mathcal{P}_n^{m+m'} = \mathcal{P}_n^m \cdot \mathcal{P}_n^{m'} \\ &= P\left(\frac{m}{2^n}\right) \cdot P\left(\frac{m'}{2^n}\right) = P(r) \cdot P(r') \end{aligned}$$

(iii) $\lim\limits_{r\to 0} P(r) = I$ $(r \in R)$.

实际上，设 $r_n = \frac{m_n}{2^n} \to 0$, 即 $m_n = o(2^n)$, 由 (5)

$$P(r_n) = P\left(\frac{m_n}{2^n}\right) = \mathcal{P}_n^{m_n} \to I$$

(iv) 每 $p_{ij}(r)$ 在 R 上一致连续. □

证 仿 §13.1 引理 3 之证.

由 (iv), 可利用连续性把 $p_{ij}(r)$ $(r \in R)$ 唯一地拓广定义域到 $[0, \infty)$ 而得 $p_{ij}(t)$, $t \geqslant 0$. 我们来证明 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 即所求的解. 实际上，由定义显然 (3) 式成立，剩下只是证 $P(t)$ 是标准转移矩阵.

(a) 由 $p_{ij}(r) > 0$ 得

$$p_{ij}(t) = \lim_{r \to t} p_{ij}(r) \geqslant 0$$

(b) 试证 $\sum_j p_{ij}(t) = 1$. 令 $F_i(t) = \sum_j p_{ij}(t)$. 由 Fatou 引理,

$$F_i(t) = \sum_j \lim_{r \to t} p_{ij}(r) \leqslant \lim_{r \to t} \sum_j p_{ij}(r) = 1 \tag{6}$$

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+r') &= \lim_{r \to t} p_{ij}(r+r') = \lim_{r \to t} \sum_k p_{ik}(r) p_{kj}(r') \\ &\geqslant \sum_k p_{ik}(t) p_{kj}(r'), \quad (r, r' \in R) \end{aligned} \tag{7}$$

将 (7) 两边对 j 求和, 得

$$F_i(t+r') \geqslant F_i(t) \quad (t \geqslant 0)$$

以 t 代 $t+r'$, r 代 r' 后得

$$F_i(t) \geqslant F_i(t-r) \quad (r \leqslant t, r \in R)$$

设对某 $t_0 > 0$, $F_i(t_0) < 1$, 由上式

$$F_i(t_0 - r) \leqslant F_i(t_0) < 1 \quad (r \leqslant t_0, r \in R)$$

注意二集合 $R \cap (0, t_0)$ 及 $(t_0 - r:\ r \in R \cap (0, t_0))$ 都在 $(0, t_0)$ 中稠密, 但在前集上, $F_i(t) = 1$; 在后集上, 由上式它不大于 $F_i(t_0) < 1$, 这说明 $F_i(t)$ 在 $(0, t_0)$ 中无连续点.

但另一方面, $F_i(t)$ 是以非负连续函数为项的级数的和, 故下半连续: 又由 (6) 它有界, 故它的连续点在 $(0, t_0)$ 中稠密, 这与上面结论矛盾, 从而 $F_i(t) = 1$, $(t \geqslant 0)$.

(c) 今证 $p_{ij}(s+t) = \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t)$

仿 (7) 知

$$p_{ij}(s+t) \geqslant \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t) \tag{8}$$

对 j 求和并利用 (b),

$$1 = \sum_j p_{ij}(s+t) \geqslant \sum_k p_{ik}(s) \sum_j p_{kj}(t) = 1$$

故 (8) 必须取等号.

(d) 由 $p_{ij}(t)$ 的连续性得 $\lim_{t \to 0+} p_{ij}(t) = \delta_{ij}$. □

注 1 当 E 是有穷集时, 定理 1 仍成立.

(三) 考虑 $E = (1, \cdots, n)$ 只含有限多个 (n 个) 元的情况, 设 $Q = (q_{ij})$ 为 n 阶矩阵, 满足

$$\left.\begin{aligned} &0 \leqslant q_{ij} < \infty, && (i \neq j) \\ &\sum_{j \neq i} q_{ij} = -q_{ii} < \infty, && (i, j \in E) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

全体这样的矩阵构成集 K.

定理 2 n 阶随机矩阵 $\mathcal{P}$ 是离散骨架的充分与必要条件是：存在 $Q \in K$, 使

$$\mathcal{P} = e^Q \tag{10}$$

$$\left(e^Q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^n}{n!},\ Q^0 = I\right)$$

证 设 $\mathcal{P}$ 是离散骨架，因而存在标准转移矩阵 $P(t)$, 使 $\mathcal{P} = P(1)$.

由于 §13.2 定理 4 对有穷集 E 仍有效，故对此标准转移矩阵 $(p_{ij}(t))$, 存在有穷极限

$$0 < q_{ij} = \lim_{t \to 0+} \frac{p_{ij}(t)}{t} \quad (i \neq j)$$

由于 $\sum\limits_{j=0}^{n} p_{ij}(t) = 1$, 故必存在极限

$$0 \leqslant -q_{ii} = \lim_{t \to 0+} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{\sum\limits_{j \neq i} p_{ij}(t)}{t} = \sum_{j \neq i} q_{ij} < \infty$$

像 E 为可列集时一样，仍称矩阵 $Q = (q_{ij})$ 为 $(p_{ij}(t))$ 的密度矩阵.

在 §13.3 (2) 中令 $h \to 0$, 即得向后方程组

$$P'(t) = QP(t)$$

这里等号成立是因为 E 为有穷集. 在开始条件 $P(0) = I$ 下解这组方程得唯一的标准转移矩阵解为

$$P(t) = e^{Qt} \tag{11}$$

特别

$$\mathcal{P} = P(1) = e^Q$$

反之，设 $\mathcal{P}$ 可表为 (10), 其中 $Q \in K$. 造 $P(t) = e^{Qt}$. 易见它是标准转移矩阵；而且 $\mathcal{P} = P(1)$; 故 $\mathcal{P}$ 是离散骨架. □

我们还附带证明了：任意矩阵 $P(t)$ 是标准转移矩阵的充要条件是它可表为 (11) 的形状，其中 $Q \in K$.

系 1 n 阶随机矩阵 $\mathcal{P}$ 是离散骨架的必要条件是：

1° 对角线上元 $p_{ii} > 0$ $(i \in E)$;

2° 行列式 $|\mathcal{P}| \neq 0$.

证 1° 已在上面证明[1]. 设 $\mathcal{P}$ 是离散骨架，因而存在 $Q \in K$ 使 $\mathcal{P} = e^Q$. 矩阵 Q 的特征根 λ_j 与 $\mathcal{P}$ 的特征根 ξ_j 间有关系 $\xi_j = e^{\lambda_j}$, 故 $\xi_j \neq 0$, 从而 $|\mathcal{P}| \neq 0$. □

(四) 当 $n = 2$ 时，嵌入问题的解答最为完善.

---

[1] 当 E 有穷时，对标准的 $P(t)$, $p_{ii}(t) > 0$ $(t \geqslant 0)$ 仍正确，因由标准性，存在 $\delta > 0$, 使 $p_{ii}(t) > 0$, $(t \leqslant \delta)$. 再由 $p_{ii}(s) \geqslant \left[p_{ii}\left(\frac{s}{n}\right)\right]^n$, 知 $p_{ij}(s) > 0$, 一切 $s \geqslant 0$.

定理 3　二阶随机矩阵 $\mathcal{P}$ 是离散骨架的充分与必要条件是：存在二常数 $p \geqslant 0, q \geqslant 0$，使

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{p}{p+q}[1 - e^{-(p+q)}], & \dfrac{p}{p+q}[1 - e^{-(p+q)}] \\ \dfrac{q}{p+q}[1 - e^{-(p+q)}], & 1 - \dfrac{q}{p+q}[1 - e^{-(p+q)}] \end{pmatrix} \tag{12}$$

(理解 $\frac{0}{0} = 0$).

证　由定理 2, $\mathcal{P}$ 是离散骨架的充分与必要条件是 $\mathcal{P} = e^{Q}$, $(Q \in K)$. 此时 Q 必呈下形

$$Q = \begin{pmatrix} -p & p \\ q & -q \end{pmatrix}, \quad (p \geqslant 0,\ q \geqslant 0) \tag{13}$$

由归纳法知

$$Q^{n} = (-1)^{n-1}(p+q)^{n-1} \cdot Q$$

因而

$$(p_{ij}) = \mathcal{P} = e^{Q} = I + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(p+q)^{n-1}}{n!}Q$$

其中

$$\begin{aligned} p_{11} &= 1 - p - (p+q)(-p)/2! + (p+q)^2(-p)/3! - \cdots \\ &= 1 - \frac{p}{p+q}(1 - e^{-(p+q)}) \end{aligned}$$

类似求出 p_{12}, p_{21}, p_{22} 后即得证 (12). □

系 2　$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1-r & r \\ s & 1-s \end{pmatrix}$ $(0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant s \leqslant 1)$ 是离散骨架的充分与必要条件是

$$r + s < 1, \quad (\text{亦即} |\mathcal{P}| > 0)$$

证　如 $\mathcal{P}$ 是离散骨架，则它可表为 (12), 故

$$r + s = 1 - e^{-(p+q)} < 1$$

反之，设 $r + s < 1$. 如 $r = s = 0$, 显然 $\mathcal{P} = I$ 是离散骨架；如 $r + s > 0$, 由下二方程

$$r = \frac{p}{p+q}(1 - e^{-(p+q)}), \quad s = \frac{q}{p+q}(1 - e^{-(p+q)})$$

可解出

$$\begin{aligned} p &= -\frac{r}{r+s}\log[1 - (r+s)] \geqslant 0 \\ q &= -\frac{s}{r+s}\log[1 - (r+s)] \geqslant 0 \end{aligned}$$

通过此 p, q 可把 $\mathcal{P}$ 表为 (12) 的形式. 故由定理 3 即得所欲证.　□

如果 $P(t)$ 满足 (3), 我们称 $P(t)$ 是 $\mathcal{P}$ 的 **连续扩充**. (10) 中 $\mathcal{P}$ 的连续扩充是 $P(t)=e^{Qt}$; (12) 中 $\mathcal{P}$ 的连续扩充是

$$P(t)=\begin{pmatrix} 1-\dfrac{p}{p+q}[1-e^{-(p+q)t}], & \dfrac{p}{p+q}[1-e^{-(p+q)t}] \\ \dfrac{q}{p+q}[1-e^{-(p+q)t}], & 1-\dfrac{q}{p+q}[1-e^{-(p+q)t}] \end{pmatrix}$$

(五) 现在讨论 $\mathcal{P}$ 的连续扩充的唯一性. 仍设 $E=(1,2,\cdots,n)$ 只含有穷多个状态, 我们知道, 这时每一标准转移矩阵 $P(t)$ 都由它的密度矩阵 $Q(\in K)$ 唯一决定, 而且 $P(t)$ 可通过 Q 来表达, $P(t)=e^{Qt}$. 如果 $\mathcal{P}$ 有二连续扩充, 那么就有 $Q_1\in K, Q_2\in K$, 使 $\mathcal{P}=e^{Q_1}$, $\mathcal{P}=e^{Q_2}$, 故

$$e^{Q_1}=e^{Q_2} \tag{14}$$

这样, $\mathcal{P}$ 的连续扩充是否唯一的问题就等价于 e^Q 是否唯一决定 Q 的问题.

当 $n=2$ 时, 连续扩充是唯一的. 实际上, 如上所述, 这时任意 $Q\in K$ 必可表为 (13), e^Q 必可表为 (12). 设

$$Q_1=\begin{pmatrix} -p & p \\ q & -q \end{pmatrix} \qquad Q_2=\begin{pmatrix} -p' & p' \\ q' & -q' \end{pmatrix} \tag{15}$$

而且 (14) 成立. 于是由 (12) 得

$$\frac{p}{p+q}[1-e^{-(p+q)}]=\frac{p'}{p'+q'}[1-e^{-(p'+q')}] \tag{16}$$

$$\frac{q}{p+q}[1-e^{-(p+q)}]=\frac{q'}{p'+q'}[1-e^{-(p'+q')}] \tag{17}$$

不妨设 $q>0$, 以 (17) 除 (16) 得

$$\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'} \text{ 或 } p=q\frac{p'}{q'} \tag{18}$$

以 (18) 代入 (16) 得 $p+q=p'+q'$. 由此式及 (18) 即得 $p=p', q=q'$, 亦即 $Q_1=Q_2$.

但在一般情况, 连续扩充不唯一, 如下例:

例 1 取

$$Q_1=\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}, \qquad Q_1=\begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ 0 & -\mu & \mu \\ \mu & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda>0, \mu>0$. 又取

$$a(\lambda)=\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\ \ b(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}\lambda}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$$

$$e^{Q_1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}+a(\lambda) & \frac{1}{3}-\frac{a(\lambda)}{2}-b(\lambda) & \frac{1}{3}-\frac{a(\lambda)}{2}+b(\lambda) \\ \frac{1}{3}-\frac{a(\lambda)}{2}+b(\lambda) & \frac{1}{3}+a(\lambda) & \frac{1}{3}-\frac{a(\lambda)}{2}-b(\lambda) \\ \frac{1}{3}-\frac{a(\lambda)}{2}-b(\lambda) & \frac{1}{3}-\frac{a(\lambda)}{2}+b(\lambda) & \frac{1}{3}+a(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$e^{Q_2}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}+a(\mu) & \frac{1}{3}-\frac{a(\mu)}{2}+b(\mu) & \frac{1}{3}-\frac{a(\mu)}{2}-b(\mu) \\ \frac{1}{3}-\frac{a(\mu)}{2}-b(\mu) & \frac{1}{3}+a(\mu) & \frac{1}{3}-\frac{a(\mu)}{2}+b(\mu) \\ \frac{1}{3}-\frac{a(\mu)}{2}+b(\mu) & \frac{1}{3}-\frac{a(\mu)}{2}-b(\mu) & \frac{1}{3}+a(\mu) \end{pmatrix}$$

注意 e^{Q_1} 依赖于 λ, 故宜记为 $e^{Q_1}(\lambda)$. 同样，记 e^{Q_2} 为 $e^{Q_2}(\mu)$. 当 $\lambda=\frac{2k\pi}{\sqrt{3}}$ $(k=1,2,\cdots)$ 时， $b(\lambda)=0$, 故

$$e^{Q_1}\left(\frac{2k\pi}{\sqrt{3}}\right)=e^{Q_2}\left(\frac{2k\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

显然 $\mathcal{P}=e^{Q_1}\left(\frac{2k\pi}{\sqrt{3}}\right)$ 是随机矩阵，它对应于二不同的矩阵 $Q_1\in K$, $Q_2\in K$, 故此 $\mathcal{P}$ 至少有二不同的连续扩充为

$$P_1(t)=e^{Q_1t}=e^{Q_1}(\lambda t);\quad P_2=e^{Q_2t}=e^{Q_2}(\mu t)$$

例 2 取

$$Q_1=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix},\qquad Q_2=\begin{pmatrix}-1&1/2&1/2\\1/2&-1&1/2\\1/2&1/2&-1\end{pmatrix}$$

则对应于 Q_1 的转移矩阵 $P_1(t)$ 中，

$$\begin{aligned}
p_{11}(t)=p_{22}(t)=p_{33}(t)&=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-3t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\\
p_{12}(t)=p_{23}(t)=p_{31}(t)&=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-3t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{2\pi}{3}\right)\\
p_{13}(t)=p_{21}(t)=p_{32}(t)&=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-3t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{2\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

又对应于 Q_2 的转移矩阵 $P_2(t)$ 中，

$$p_{11}(t)=p_{22}(t)=p_{33}(t)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-3t/2}$$

$$p_{ij}(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3t/2}\quad(i\neq j)$$

当 $t=\frac{4k\pi}{\sqrt{3}}$ 时， $P_1(t)=P_2(t)$, k 为任意整数.

第十六章 生灭过程的基本理论

§16.1 数字特征的概率意义

(一) 设 $X=\{x_t(\omega),t\geqslant 0\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},p)$ 上的齐次马氏链，具有标准的转移概率矩阵 $(p_{ij}),i,j\in E=\{0,1,2,\cdots\}$. 称 X 为 **生灭过程**, 如果它的密度矩阵 Q 具有下列形式：

$$Q=\begin{pmatrix} -b_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & -(a_1+b_1) & b_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & -(a_n+b_n) & b_n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{1}$$

也就是说，Q 满足下列条件：

$$\left.\begin{aligned} q_{ii+1}=b_i,\quad q_{ii-1}=a_i \\ q_{ii}=-(a_i+b_i),q_{ij}=0(|i-j|>1) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

这里 $b_i>0(i\geqslant 0), a_i>0\ (i>0)$. a_0 虽无定义，为方便计，补定义 $a_0=0$. 以后令 $c_i=a_i+b_i$.

我们称 (1) 中的矩阵为 **生灭矩阵**.

容易看出，为使 (2) 满足，充要条件是：当 $t\to 0$ 时

$$p_{ij}(t)=\begin{cases} b_it+o(t) & \text{如} j=i+1 \\ a_it+o(t) & \text{如} j=i-1 \\ 1-(a_i+b_i)t+o(t) & \text{如} j=i \end{cases} \tag{3}$$

对于 Q 重要的是下列数字特征：

$$m_i=\frac{1}{b_i}+\sum_{k=0}^{i-1}\frac{a_ia_{i-1}\cdots a_{i-k}}{b_ib_{i-1}\cdots b_{i-k}b_{i-k-1}}\quad\left(m_0=\frac{1}{b_0},\ i\geqslant 0\right) \tag{4}$$

$$e_i=\frac{1}{a_i}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_ib_{i+1}\cdots b_{i+k}}{a_ia_{i+1}\cdots a_{i+k}a_{i+k+1}}\quad(i>0) \tag{5}$$

$$R=\sum_{i=0}^{\infty}m_i,\qquad S=\sum_{i=1}^{\infty}e_i \tag{6}$$

以及

$$Z_0=0,\quad Z_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_1a_2\cdots a_k}{b_1b_2\cdots b_k},\quad Z=\lim_{n\to\infty}Z_n \tag{7}$$

(二) 试分别阐述各数字特征的概率意义. 从现在起，我们假设 X 是典范链，因而它有强马氏性，而且在第一个飞跃点前样本函数是右连续的. 采用 §13.3 中的记号，以 $\eta(\omega)$

表第一个飞跃点. 以 $\eta_n(\omega)$ 表首达状态 n 的时刻, 即

$$\eta_n = \begin{cases} \inf(t : t > 0,\ x(t,\omega) = n), & \text{如右方 } t\text{- 集非空} \\ \infty, & \text{否则} \end{cases} \tag{8}$$

注意生灭过程有下列特点, 它将多次用到而不再明确说明: 自 i 出发经一次跳跃只能到 $i+1$ 或 $i-1$(自 0 出发则只能也必定到 1); 因此, 为使自 i 经有穷多次跳跃到 $l(l \neq i)$, 必须经历 i 与 l 之间的一切状态 $k(i < k < l$ 或 $i > k > l)$. 由此可见, 如 $i < n$, 则以 P_i 概率 1, $\eta_n(\omega)$ 等于首出 $(0,1,\cdots,n-1)$ 的时间, 亦即首达 $(n,n+1,\cdots)$ 的时刻, 因而根据 §15.3 引理 2 得.

$$\eta(\omega) = \lim_{n\to\infty} \eta_n(\omega) \quad (\text{a.s.}) \tag{8'}$$

这里 (a.s.) 对 P 或 $P_i(i \geqslant 0)$ 而言均可.

定理 1 $m_i = E_i\eta_{i+1};\ R = E_0\eta$

证 回忆 $c_i = a_i + b_i$, 令 $d_i = E_i\eta_{i+1}$. 因而 d_i 是自 i 出发首达 $i+1$ 所需的平均时间. 我们证明: d_i 满足差分方程

$$\left.\begin{aligned} d_0 &= \frac{1}{b_0} \\ d_i &= \frac{b_i}{c_i}\cdot\frac{1}{c_i} + \frac{a_i}{c_i}\left(\frac{1}{c_i} + d_{i-1} + d_i\right) \quad (i > 0) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

实际上, 以 τ_1 表第一次跳跃点, 由 $P_0(\tau_1 > t) = e^{-b_0t}$ 及 $E_0\eta_1 = E_0\tau_1$ 得 (9) 中前式; 又由

$$\eta_{i+1} - \tau_1 = \theta_{\tau_1}\eta_{i+1} \quad (P_j \text{ a.s. } j \leqslant i) \tag{10}$$

及强马氏性得

$$\begin{aligned} d_i &= E_i\tau_1 + E_i\theta_{\tau_1}\eta_{i+1} = \frac{1}{c_i} + E_iE_{x(\tau_1)}\eta_{i+1} \\ &= \frac{1}{c_i} + \int_{(x(\tau_1)=i+1)} E_{i+1}\eta_{i+1}P_i(d\omega) + \int_{(x(\tau_1)=i-1)} E_{i-1}\eta_{i+1}P_i(d\omega) \end{aligned} \tag{11}$$

由于 $E_{i+1}\eta_{i+1} = 0$ 及 $P_i(x(\tau_1) = i-1) = \frac{a_i}{c_i}$, 故

$$d_i = \frac{1}{c_i} + \frac{a_i}{c_i}E_{i-1}\eta_{i+1} \tag{12}$$

其次, 对 $j \geqslant 0$ 及 $n > 0$ 有

$$\begin{aligned} E_j\eta_{j+n} &= E_j\left[\sum_{i=0}^{n-1}(\eta_{j+i+1} - \eta_{j+i})\right] = \sum_{i=0}^{n-1} E_j[E_j(\eta_{j+i+1} - \eta_{j+i} \mid \mathcal{N}\eta_{j+i})] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} E_j[E_j(\theta_{\eta_{j+i}}\eta_{j+i+1} \mid \mathcal{N}\eta_{j+i})] = \sum_{i=0}^{n-1} E_j[E_{j+i}\eta_{j+i+1}] = \sum_{i=0}^{n-1} d_{j+i} \end{aligned} \tag{13}$$

由 (12),(13) 得

$$d_i = \frac{1}{c_i} + \frac{a_i}{c_i}(d_{i-1} + d_i) \tag{14}$$

这就是 (9) 中第二式.

解方程 (9) 得

$$d_i = \frac{1}{b_i} + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{a_i a_{i-1} \cdots a_{i-k}}{b_i b_{i-1} \cdots b_{i-k} b_{i-k-1}} = m_i \tag{15}$$

这式说明了 (4) 中数字特征 m_i 的概率意义： $m_i = E_i \eta_{i+1}$; 即 m_i 是自 i 出发，首次到达 $i+1$ 的平均时间. 由 (13),(15)

$$E_0 \eta_n = \sum_{i=0}^{n-1} d_i = \sum_{i=0}^{n-1} m_i$$

根据积分单调收敛定理，

$$E_0 \eta = \lim_{n\to\infty} E_0 \eta_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} m_i = R. \ \Box$$

由定理 1 知： R 是自 0 出发，沿生灭过程的轨道，首次到达 "∞" 的平均时间. 下面证明：相反地，在一定意义下，从 "∞" 到达 0 的平均时间恰好是 S. 所谓在 "一定意义下" 的准确含义应如下理解：

考虑 $N+1$ 级矩阵

$$Q_N = \begin{pmatrix} -b_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -(a_1+b_1) & b_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-1} & -(a_{N-1}+b_{N-1}) & b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_N+b_N & -(a_N+b_N) \end{pmatrix} \tag{16}$$

它由 Q 中前 $N+1$(横) 行与前 $N+1$(直) 列上的元构成，但要将第 $N+1$ 行与第 N 列上的元 a_N 换成 a_N+b_N. 设 $X_N = \{x_N(t,\omega), t \geqslant 0\}$ 是以 Q_N 为密度矩阵的典范马氏链，相空间为 $(0,1,\cdots,N)$. 直观上， X_N 的轨道可如下得到：设质点沿 X 的轨道自 $i \leqslant N$ 出发而运动，每当它到达 N 时，下一步跳跃人为地要它回到 $N-1$, 然后照原运动，这质点运动的轨道就是 X_N 的轨道.

由 (16) 可见 0 与 N 都是 X_N 的反射壁，定义

$$\eta_i^{(N)}(\omega) = \inf(t : t > 0, x_N(t,\omega) = i) \ \ (0 \leqslant i \leqslant N) \tag{17}$$

它是 X_N 首达 i 的时刻. X_N 的转移概率 $P_{ij}^{(N)}(t)$ 及集中在一点 i 上的开始分布所产生的测度记为 $P_i^{(N)}$, 关于 $P_i^{(N)}$ 的数学期望记为 $E_i^{(N)}$.

定理 2 $\lim\limits_{N\to\infty} E_N^{(N)} \eta_0^{(N)} = S$.

证 定义

$$e_i^{(N)} = E_i^{(N)} \eta_{i-1}^{(N)} \tag{18}$$

$e_i^{(N)}$ 是自 i 出发，沿 X_N 的轨道，首达 $i-1$ 的平均时间. 像证明 (9) 一样，可见 $e_i^{(N)}$ 满足

差分方程组：

$$\left.\begin{aligned} e_N^{(N)} &= \frac{1}{c_N} \\ e_i^{(N)} &= \frac{a_i}{c_i}\cdot\frac{1}{c_i}+\frac{b_i}{c_i}\left(\frac{1}{c_i}+e_{i+1}^{(N)}+e_i^{(N)}\right) \\ &\qquad (i=1,\cdots,N-1) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

解 (19) 后得

$$e_i^{(N)} = \frac{1}{a_i}+\sum_{k=0}^{N-2-i}\frac{b_ib_{i+1}\cdots b_{i+k}}{a_ia_{i+1}\cdots a_{i+k}a_{i+k+1}}+\frac{b_ib_{i+1}\cdots b_{N-1}}{a_ia_{i+1}\cdots a_{N-1}a_N} \tag{19'}$$

回忆 e_i 及 S 的定义 (5) 及 (6), 即得

$$\lim_{N\to\infty} e_i^{(N)} = e_i \tag{20}$$

$$\lim_{N\to\infty} E_N^{(N)}\eta_0^{(N)} = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} e_i^{(N)} = S \ \square \tag{21}$$

直观上，$e_i^{(N)}$ 是当 N 为反射壁时，自 i 出发首次到达 $i-1$ 的平均时间，$\sum\limits_{i=1}^{N} e_i^{(N)}$ 是自 N 出发首次到达 0 的平均时间. 因此，由 (20),(21), 可分别理解 e_i, S 为：当 "∞" 是反射壁时，自 i 出发首次到达 $i-1$ 及自 "∞" 出发首次到达 0 的平均时间.

现在来看 Z_n, Z 的概率意义. 定义

$$P_k(m,n) = P_k(\eta_m < \eta_n) \quad (m \leqslant k \leqslant n \text{ 或} m \geqslant k \geqslant n) \tag{22}$$

$$q_k(m) = P_k(\eta_m < \eta) \tag{23}$$

因而 $p_k(m,n)$ 是自 k 出发，沿 X 的轨道，在首达 n 以前先到 m 的概率；$q_k(m)$ 是自 k 出发，沿 X 的轨道，经有穷次跳跃而到达 m 的概率. 显然，$P_k(m,n)$ 及 $q_k(m)$ 也是嵌入马氏链 $\{y_n\}$(见 §15.3(4)) 的同样事件的概率. 至于 $q_k(k)$, 我们理解它为自 k 出发，沿 X 的轨道，离开 k 后，经有穷多次跳跃而回到 k 的概率，通常称为 **回转概率**.

定理 3 (i) 设 $m < k < n$, 则

$$P_k(m,n) = \frac{Z_n - Z_k}{Z_n - Z_m}, \quad P_k(n,m) = \frac{Z_k - Z_m}{Z_n - Z_m} \tag{24}$$

(ii)

$$q_k(m) = \begin{cases} \dfrac{Z - Z_k}{Z - Z_m}, & \text{如} k > m \\ 1, & \text{如} k < m \\ \dfrac{a_k}{c_k}+\dfrac{b_k}{c_k}\cdot\dfrac{Z - Z_{k+1}}{Z - Z_k}, & \text{如} k = m \end{cases} \tag{25}$$

(理解 $\frac{\infty}{\infty}=1$);

(iii) 当且只当 $Z=\infty$ 时，嵌入马氏链的一切状态都是常返的.

证 对固定的 m, n, 简记 $P_k(m,n)$ 及 $P_k(n,m)$ 为 p_k 及 $\widetilde{p}_k$. 对 X(或嵌入链 $\{y_n\}$) 用强马氏性 (或马氏性), 立得

$$p_k = \frac{a_k}{c_k}p_{k-1}+\frac{b_k}{c_k}p_{k+1}$$

或

$$a_k p_{k-1} + b_k p_{k+1} - c_k p_k = 0 \quad (m < k < n) \tag{26}$$

显然，p_k 应满足边值条件

$$p_m = 1, \quad p_n = 0 \tag{27}$$

解 (26),(27) 即得 (24) 中前式.

同样可证 $\{\widetilde{p}_k\}$ 也满足 (26), 但边值条件应换为

$$\widetilde{p}_m = 0, \quad \widetilde{p}_n = 1 \tag{28}$$

解 (26),(28) 即得 (24) 中后式.

对 $m < k < n$, 当 $n \to \infty$ 时，除差一 0 测集外

$$(x(0) = k, \ \eta_m < \eta_n) \uparrow (x(0) = k, \ \eta_m < \eta)$$

对两边集取条件概率 P_k, 并利用 (24), 即得 (25) 中第一式. 为证第二式，在 $(0,1.\cdots,m)$ 上考虑嵌入链，只是把 m 改造为反射壁 $(p_{m\,m-1} = 1)$, 所得的新链不可分，常返，因而对此链自 $k(k < m)$ 出发，经有穷多步到达 m 的概率 $f_{km} = 1$. 但在到达 m 以前，新链与嵌入链有相同的轨道，故 $q_k(m) = f_{km} = 1$. 最后，对嵌入链用马氏性得

$$q_k(k) = \frac{a_k}{c_k} q_{k-1}(k) + \frac{b_k}{c_k} q_{k+1}(k)$$

以 (25) 中前二式代入此式即得 (25) 中第三式. □

在实际应用中，$q_k(0)$ 称为 **灭绝概率**, 即开始时有 k 个个体，终于 (经有穷次转移后) 完全灭绝 (即到达状态 0) 的概率.

(三) 试讨论数字特征间的关系式. 考虑到 (5) 中 e_1 的通项，引进下列数量：

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_n = \frac{b_0 b_1 \cdots b_{n-1}}{a_1 a_2 \cdots a_n} \tag{29}$$

于是

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_0 b_1 \cdots b_{n-1}}{a_1 a_2 \cdots a_n} = 1 + b_0 e_1 \tag{30}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_n \mu_n} = \frac{1}{b_0}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1 \cdots a_k}{b_1 \cdots b_k}\right) = \frac{Z}{b_0} \tag{31}$$

$\{\mu_i\}$ 的概率意义见 §5(43), 那里证明了：在一定条件下，$\left\{\frac{\mu_i}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mu_n}\right\}$ 是过程的极限分布.

由直接验算，容易证明下列等式：

$$m_i = \frac{a_1 \cdots a_i}{b_0 b_1 \cdots b_i}\left(1 + \frac{b_0}{a_1} + \frac{b_0 b_1}{a_1 a_2} + \cdots + \frac{b_0 \cdots b_{i-1}}{a_1 \cdots a_i}\right) = \frac{1}{b_0}(Z_{i+1} - Z_i) \sum_{k=0}^{i} \mu_k \tag{32}$$

$$R=\sum_{i=0}^{\infty}m_i=\frac{1}{b_0}\sum_{i=0}^{\infty}(Z_{i+1}-Z_i)\sum_{k=0}^{i}\mu_k=\frac{1}{b_0}\sum_{i=0}^{\infty}(Z-Z_i)\mu_i \tag{33}$$

把 R 写成三角形求和的形式，并按对角线求和，得

$$\begin{aligned}R&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{b_n}+\frac{a_{n+1}}{b_nb_{n+1}}+\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{b_nb_{n+1}b_{n+2}}+\cdots\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_0b_1\cdots b_{n-1}}{a_1a_2\cdots a_n}\left(\frac{a_1a_2\cdots a_n}{b_0b_1\cdots b_n}+\frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{b_0b_1\cdots b_{n+1}}+\frac{a_1a_2\cdots a_{n+2}}{b_0b_1\cdots b_{n+2}}+\cdots\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{b_i\mu_i}\end{aligned} \tag{34}$$

至于 e_i 与 S, 则有

$$\begin{aligned}e_i&=\frac{1}{a_i}+\frac{b_i}{a_ia_{i+1}}+\frac{b_ib_{i+1}}{a_ia_{i+1}a_{i+2}}+\cdots\\&=\frac{a_0a_1\cdots a_{i-1}}{b_0b_1\cdots b_{i-1}}\sum_{n=i}^{\infty}\mu_n=\frac{Z_i-Z_{i-1}}{b_0}\sum_{n=i}^{\infty}\mu_n\end{aligned} \tag{35}$$

(令 $a_0=1$)

$$S=\sum_{i=1}^{\infty}e_i=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Z_i-Z_{i-1}}{b_0}\sum_{n=i}^{\infty}\mu_n=\frac{1}{b_0}\sum_{i=1}^{\infty}Z_i\mu_i \tag{36}$$

由以上可见，Z_i 与 μ_i 是基本的，因为其它的数字特征可通过它们表示出来. 由定义，显然有

$$R\geqslant\frac{1}{b_0}Z,\quad S\geqslant e_1 \tag{37}$$

引理 1 $R+S=\left(e_1+\dfrac{1}{b_0}\right)Z$ (38)

证

$$\begin{aligned}e_{n+1}=&\frac{a_n}{b_n}\left(e_n-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{a_1\cdots a_n}{b_1\cdots b_n}e_1-\frac{a_2\cdots a_n}{b_1b_2\cdots b_n}\\&-\frac{a_3\cdots a_n}{b_2b_3\cdots b_n}-\cdots-\frac{a_n}{b_{n-1}b_n}-\frac{1}{b_n}\end{aligned} \tag{39}$$

以它代入 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e_n$, 得一二重级数，按对角线求和，并注意

$$Z=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_k}{b_1b_2\cdots b_k}$$

同时利用 (34) 中第一等式，即得

$$S=e_1Z-\left(R-\frac{1}{b_0}Z\right)=\left(e_1+\frac{1}{b_0}\right)Z-R\ \square$$

由 (39) 立得：一切 $e_i(i=1,2,\cdots)$ 或同时有穷，或同时无穷，

系 1 下列三条件等价：

1) $R+S=\infty$;

2) $Z+e_1=\infty$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_1\cdots a_n}{b_1\cdots b_n}+\frac{b_1\cdots b_n}{a_1\cdots a_{n+1}}\right)=\infty$.

证 1),2) 的等价性由 (38) 推出；而 2),3) 的等价性则来自 (30),(31). □

注意，如上所述，$e_i(i=1,2,\cdots)$ 或都为无穷，或都为有穷，故 2) 中的 e_1 可换为任一 e_i.

系 2 设 $R=\infty$, 又 $e_1<\infty$, 则 $Z=\infty$.

系 3 设 $R<\infty$ 则 $S<\infty$ 的充要条件是 $e_1<\infty$.

证 利用 (37),(38). □

注 在系 2 、系 3 中，将 R,S 对调，e_1,Z 对调，所得结论仍正确.

Feller 在 [3] 中曾根据这些数字特征而区分四种情况：

i) 正则：$Z<\infty$, $e_1<\infty$;

ii) 流出：$Z<\infty$, $R<\infty$, $e_1=\infty$;

iii) 流入：$Z=\infty$, $S<\infty$;

iv) 自然：其它情形.

系 4 (i) "正则" 等价于 $R<\infty$, $S<\infty$; (ii) "流出" 等价于 $R<\infty$, $S=\infty$; (iii) "流入" 等价于 $R=\infty$, $S<\infty$; (iv) "自然" 等价于 $R=\infty$, $S=\infty$.

证 (i) 由 (38) 推出. (ii) 由系 3 推出，(iii) 由系 3 及注即得. (iv) 由于上述三种情形分别等价，故各剩下一种情形也应等价. □

§16.2 向上的积分型随机泛函

(一) 设 $X=\{x_t(\omega),t\geqslant 0\}$ 为生灭过程，考虑它的首达状态 n 的时刻 $\eta_n(\omega)$ 及首达 ∞ 的时刻亦即第一个飞跃点 $\eta(\omega)$, 它们的严格数学定义见 §1(8) 及 (8'). 又 $V(i)\geqslant 0$ 是定义在状态空间 E 上的函数 $(i\in E)$, 我们自然假定 V 不恒等于 0. 我们的目的是研究下列二积分型随机泛函的分布：

$$\xi^{(n)}(\omega)=\int_0^{\eta_n(\omega)}V[x(t,\omega)]\,dt \tag{1}$$

$$\xi(\omega)=\int_0^{\eta(\omega)}V[x(t,\omega)]\,dt \tag{2}$$

记 $\xi^{(n)}$ 的分布函数为

$$F_{kn}(x)=P_k(\xi^{(n)}\leqslant x) \tag{3}$$

考虑 $F_{kn}(x)$ 的 Laplace 变换

$$\varphi_{kn}(\lambda)=E_k\exp(-\lambda\xi^{(n)})=\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dF_{kn}(x) \tag{3'}$$

$\varphi_{kn}(\lambda)$ 至少对 $\lambda\geqslant 0$ 有定义，一般地，$F_{kn}(x)$ 可自 $\varphi_{kn}(\lambda)$ 经反 Laplace 变换而得.

注意，如 $V\equiv 1$, 则 $\xi^{(n)}$ 与 ξ 分别化为 η_n 与 η.

本节中只讨论开始状态 $k\leqslant n$ 的情形，这时 $F_{kn}(x)$ 是自 k 出发，上限为首次到达更大的状态 n 的时刻的积分的分布，或者说积分是向上的；下节将研究向下的 (即向状态 0 的) 积分.

基本引理 设 A 为 E 的任一非空子集，$\tau(\omega)$ 为首达 A 的时刻，即

$$\begin{aligned}\tau(\omega) &= \inf(t:\ x(t,\omega)\in A), \text{如右方 } t \text{ 集不空}\\ &=\infty, \qquad\qquad \text{否则}\end{aligned}$$

令

$$f_{k,A}(\lambda)=E_k\exp\left(-\lambda\int_0^{\tau(\omega)}V[x(t,\omega)]\,dt\right)$$

则 $f_k(\lambda)\equiv f_{k,A}(\lambda)$ 满足差分方程：

$$\begin{aligned}a_kf_{k-1}(\lambda)-c_kf_k(\lambda)+b_kf_{k+1}(\lambda)-\lambda V(k)f_k(\lambda)=0,&\quad(k\,\overline{\in}\,A)\\ f_k(\lambda)=1,&\quad(k\in A)\end{aligned}$$

证 以 β 表示过程的第一个跳跃点，它是马氏时刻，β- 前 σ 代数记为 $\mathcal{F}_\beta$. 令

$$F(x)\equiv P_k(\beta\leqslant x)=1-e^{-c_kx}$$

$$E_ke^{-\lambda V(k)\beta}=\int_0^\infty e^{-\lambda V(k)x}dF(x)=\frac{c_k}{\lambda V(k)+c_k}\tag{3''}$$

以下采用记号 $\int_u^v\equiv\int_u^vV(x_t)\,dt$.

设 $k\,\overline{\in}\,A$, 则有

$$\begin{aligned}f_k(\lambda)&\equiv E_ke^{-\lambda\int_0^\tau}=E_kE_k(e^{-\lambda\int_0^\tau}\mid\mathcal{F}_\beta)=E_kE_k(e^{-\lambda\int_0^\beta}\cdot e^{-\lambda\int_0^\tau}\mid\mathcal{F}_\beta)\\ &=E_k\big[e^{-\lambda\int_0^\beta}E_k(e^{-\lambda\int_\beta^\tau}\mid\mathcal{F}_\beta)\big]=E_k\big[e^{-\lambda V(k)\beta}E_{x(\beta)}e^{-\lambda\int_0^\tau}\big]\end{aligned}$$

利用 (3″) 以及

$$P_k(x(\beta)=k+1)=\frac{b_k}{c_k},\quad P_k(x(\beta)=k-1)=\frac{a_k}{c_k}$$

即得

$$\begin{aligned}f_k(\lambda)&=\frac{c_k}{\lambda V(k)+c_k}\cdot\frac{b_k}{c_k}f_{k+1}(\lambda)+\frac{c_k}{\lambda V(k)+c_k}\cdot\frac{a_k}{c_k}f_{k-1}(\lambda)\\ &=\frac{b_k}{\lambda V(k)+c_k}f_{k+1}(\lambda)+\frac{a_k}{\lambda V(k)+c_k}f_{k-1}(\lambda)\end{aligned}$$

最后，如 $k\in A$, 则因 $P_k(\tau=0)=1$, 故 $f_k(\lambda)=E_k1=1$. □

定理 1 存在常数 $h>0$, 使当 $\lambda>-h$ 时，一切 $\varphi_{kn}(\lambda)$ $(k\leqslant n)$ 都有穷；而且满足差分方程组 [1]

$$\left.\begin{aligned}&a_k\varphi_{k-1,n}(\lambda)-c_k\varphi_{kn}(\lambda)+b_k\varphi_{k+1,n}(\lambda)-\lambda V(k)\varphi_{kn}(\lambda)=0\quad(0\leqslant k<n)\\ &\varphi_{nn}(\lambda)=1\end{aligned}\right\}$$

[1]此方程组是 §15.3(36) 的特殊情形.

因而

$$\varphi_{kn}(\lambda)=\frac{\delta_n^{(k+1)}(\lambda)}{\delta_n(\lambda)},\quad (0\leqslant k<n,\ \delta_n^{(n+1)}(\lambda)=\delta_n(\lambda)) \tag{4}$$

这里

$$\delta_n(\lambda)=\begin{vmatrix} D_0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ a_1 & D_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_2 & D_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & D_{n-2} & b_{n-2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & D_{n-1} \end{vmatrix} \tag{5}$$

其中 $D_i=-(\lambda V(i)+c_i),\ i=0,1,\cdots,n-1$; 而 $\delta_n^{(k)}(\lambda)$ 是以列向量 $\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\-b_{n-1}\end{pmatrix}$ 代替 $\delta_n(\lambda)$ 中第 k 列所得的行列式.

为证此定理需要二引理.

首先注意，按最后一行展开 (5), 得

$$\left.\begin{aligned} &\delta_n(\lambda)=-(\lambda V(n-1)+c_{n-1})\delta_{n-1}(\lambda)-a_{n-1}b_{n-2}\delta_{n-2}(\lambda)\\ &\delta_1(\lambda)=-(\lambda V(0)+c_0)\\ &\delta_0(\lambda)=1\ (\text{设}) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

引理 1 存在常数 $\theta>0$, 使当 $\lambda>-\theta$ 时， $\delta_n(\lambda)$ 不等于 0 而与 $(-1)^n$ 同号.

证 对 $\delta_0(\lambda),\delta_1(\lambda)$ 结论明显. 设对一切 $\delta_k(\lambda)$ $(0\leqslant k\leqslant n-1)$ 正确，下证对 $\delta_n(\lambda)$ 也正确. 由于 $\delta_n(\lambda)$ 是 λ 的连续函数，故只要证当 $\lambda\geqslant 0$ 时， $\delta_n(\lambda)$ 与 $(-1)^n$ 同号. 计算

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_n(\lambda)}{d\lambda}=&-V(0)\delta_{11}(\lambda)+V(1)(\lambda V(0)+c_0)\widetilde{\delta}_{22}(\lambda)\\ &-V(2)\delta_{33}(\lambda)-V(3)\delta_{44}(\lambda)-\cdots-V(n-3)\delta_{n-2\,n-2}(\lambda)\\ &+V(n-2)[\lambda V(n-1)+c_{n-1}]\delta_{n-2}(\lambda)-V(n-1)\delta_{n-1}(\lambda) \end{aligned} \tag{7}$$

其中 $\delta_{ii}(\lambda)$ 是自 $\delta_n(\lambda)$ 中删去第 i 行与第 i 列后所得的 $n-1$ 级行列式. $\widetilde{\delta}_{22}(\lambda)$ 是自 $\delta_n(\lambda)$ 中删去前二行与前二列后所得的 $n-2$ 级行列式. 因为 $\delta_k(\lambda)$ $(\lambda\geqslant 0)$ 的符号只依赖于它的元的符号而不依赖于它们的数值，故 $\delta_{11}(\lambda),\widetilde{\delta}_{22}(\lambda),\delta_{33}(\lambda),\delta_{44}(\lambda),\cdots,\delta_{n-2\,n-2}(\lambda)$ 分别与 $\delta_{n-1}(\lambda),\delta_{n-2}(\lambda),\delta_2(\lambda)\delta_{n-3}(\lambda),\delta_3(\lambda)\delta_{n-4}(\lambda),\cdots,\delta_{n-3}(\lambda)\delta_2(\lambda)$ 同号. 由归纳法前提，知 (7) 右方各项都与 $(-1)^n$ 同号，因而 $\frac{d}{d\lambda}\delta_n(\lambda)$ 也与 $(-1)^n$ 同号. 既然 $\frac{d}{d\lambda}\delta_n(\lambda)$ 连续，可见当 $\lambda>0$ 时，

$$\delta_n(\lambda)-\delta_n(0)=\int_0^\lambda\frac{d\delta_n(x)}{dx}\,dx$$

仍然与 $(-1)^n$ 同号. 最后只要注意，由 (6) 及归纳法，易见 $\delta_0(0)=1$,

$$\delta_n(0)=(-1)^n b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1 b_0\ \square$$

引理 2 X 设为任意典范链，$\xi(\omega)$ 为 $\mathcal{F}\{x(t,\omega), t \geqslant 0\}$ 可测函数，又 $\tau(\omega)$ 为 X 的马氏时刻，如果 $V(x_t)\theta_t\xi$ 是 (t,ω) 可积的，则

$$E_i \int_0^\tau V(x_t)\theta_t\xi \, dt = E_i \int_0^\tau V(x_t) E_{x_t}\xi \, dt \tag{8}$$

证 以 $H(t)$ 表 $(0,\infty]$ 的示性函数 $\chi_{(0,\infty]}(t)$. 由于

$$(\tau - t \leqslant 0) \in \mathcal{N}_{t+0} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}(x_u, u \leqslant s)$$

故

$$E_i E_i[V(x_t)H(\tau - t)\theta_t\xi \mid \mathcal{N}_{t+0}] = E_i[V(x_t)H(\tau - t)E_i(\theta_t\xi \mid \mathcal{N}_{t+0})] \tag{9}$$

由此得

$$\begin{aligned}
E_i \int_0^\tau V(x_t)\theta_t\xi \, dt &= E_i \int_0^\infty V(x_t)H(\tau - t)\theta_t\xi \, dt \\
&= \int_0^\infty E_i V(x_t)H(\tau - t)\theta_t\xi \, dt = \int_0^\infty E_i[E_i(V(x_t)H(\tau - t)\theta_t\xi \mid \mathcal{N}_{t+0})] \, dt \\
&= \int_0^\infty E_i[V(x_t)H(\tau - t)E_i(\theta_t\xi \mid \mathcal{N}_{t+0})] \, dt = E_i \int_0^\tau V(x_t)E_{x_t}\xi \, dt \ \square
\end{aligned}$$

定理 1 的证 令 $h = \min\limits_{k \leqslant n-1, \theta} \left(\frac{c_k}{V(k)}; \theta\right) > 0$, 其中应理解 $\frac{c}{0} = \infty \ (c > 0)$. 对 $\lambda > -h$, 考虑线性代数方程组

$$\left.\begin{aligned}
&a_k \psi_{k-1,n}(\lambda) - c_k \psi_{kn}(\lambda) + b_k \psi_{k+1,n}(\lambda) - \lambda V(k)\psi_{kn}(\lambda) = 0 \\
&\psi_{nn}(\lambda) = 1 \quad (0 \leqslant k < n)
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

由引理 1, (10) 的系数行列式不等于 0, 因此它有唯一解

$$\psi_{kn}(\lambda) = \frac{\delta_n^{(k+1)}(\lambda)}{\delta_n(\lambda)} \quad (0 \leqslant k < n, \ \delta_n^{(n+1)}(\lambda) = \delta_n(\lambda)) \tag{11}$$

如果能证明一切 $\varphi_{kn}(\lambda)$ $(k \leqslant n)$ 都有穷，那么根据基本引理知 $\varphi_{kn}(\lambda)$ $(k \leqslant n)$ 是 (10) 的解，因之，$\varphi_{kn}(\lambda) = \psi_{kn}(\lambda)$ 而定理得证.

为证 $\varphi_{kn}(\lambda)$ 有穷，分成两步.

1° 简记 $\psi_{kn}(\lambda)$ 为 $\psi(k)$, 试证

$$\psi(k) = -\lambda E_k \int_0^{\eta_n} \psi(x_t)V(x_t) \, dt + 1 \tag{12}$$

实际上，以 τ_1 表 X 的第一个跳跃点而考虑线性算子 $\mathfrak{A}$, 它把行向量 $(b(0), \cdots, b(n-1))$ 变为 $(\mathfrak{A}b(0), \cdots, \mathfrak{A}b(n-1))$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}b(k) \equiv \frac{E_k b(x_{\tau_1}) - b(k)}{E_k \tau_1} &= \left[\frac{b_k}{c_k} b(k+1) + \frac{a_k}{c_k} b(k-1) - b(k)\right] \Big/ \frac{1}{c_k} \\
&= a_k b(k-1) - c_k b(k) + b_k b(k+1)
\end{aligned} \tag{13}$$

于是 (10) 可改写为

$$\left.\begin{aligned}&\mathfrak{A}\psi(k)-\lambda V(k)\psi(k)=0\\&\psi(n)=1\quad(0\leqslant k<n)\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

以 $\zeta(k)$ 表 (12) 的右方值，显然 $\zeta(n)=1=\psi(n)$ 而 (12) 于 $k=n$ 时正确. 其次

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}\,\zeta(k)&=\frac{E_k\zeta(x_{\tau_1})-\zeta(k)}{E_k\tau_1}\\&=\frac{1}{E_k\tau_1}\left[-\lambda E_kE_{x_{\tau_1}}\int_0^{\eta_n}\psi(x_t)V(x_t)\,dt+\lambda E_k\int_0^{\eta_n}\psi(x_t)V(x_t)\,dt\right]\\&=\lambda E_k\int_0^{\tau_1}\psi(x_t)V(x_t)dt/E_k\tau_1=\lambda V(k)\psi(k)\end{aligned}$$

故由 (14) 及 $\mathfrak{A}$ 的线性得

$$\mathfrak{A}[\psi(k)-\zeta(k)]=0\quad(0\leqslant k<n)$$

这个线性代数方程组的系数行列式 $\delta_n(0)\neq 0$, 它只有零解，从而

$$\psi(k)=\zeta(k)\quad(0\leqslant k<n)$$

2° 如 $\lambda\geqslant 0$, $\varphi_{kn}(\lambda)$ 显然有穷，故只要对 $-h<\lambda<0$ 证有穷性. 定义

$$\left.\begin{aligned}&u_0(k)\equiv 1\\&u_m(k)=-\lambda E_k\int_0^{\eta_n}V(x_t)u_{m-1}(x_t)dt+1\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

根据 (12). 并用归纳法，可见

$$u_m(k)\leqslant\psi(k)\quad(0\leqslant k\leqslant n)\tag{16}$$

由定义，

$$\begin{aligned}&u_0(k)\equiv 1,\quad u_1(k)=1-\lambda E_k\int_0^{\eta_n}V(x_t)\,dt\\&u_2(k)=1-\lambda E_k\int_0^{\eta_n}V(x_t)\,dt+\lambda^2E_k\int_0^{\eta_n}V(x_t)\left[E_{x_t}\int_0^{\eta_n}V(x_s)\,ds\right]dt\end{aligned}$$

但由引理 2

$$\begin{aligned}E_k\int_0^{\eta_n}V(x_t)\left[E_{x_t}\int_0^{\eta_n}V(x_s)\,ds\right]dt&=E_k\int_0^{\eta_n}\left[V(x_t)\theta_t\int_0^{\eta_n}V(x_s)\,ds\right]dt\\&=E_k\int_0^{\eta_n}\int_t^{\eta_n}V(x_t)V(x_t)\,ds\,dt=\frac{1}{2!}E_k\left[\int_0^{\eta_n}V(x_t)\,dt\right]^2\end{aligned}$$

故

$$u_2(k)=1-\lambda E_k\int_0^{\eta_n}V(x_t)\,dt+\frac{\lambda^2}{2!}E_k\left[\int_0^{\eta_n}V(x_t)\,dt\right]^2$$

一般地有

$$u_m(k)=\sum_{s=0}^{m}E_k\frac{\left[-\lambda\int_0^{\eta_n}V(x_t)\,dt\right]^s}{S!}\uparrow E_k\exp\left(-\lambda\int_0^{\eta_n}V(x_t)\,dt\right)=\varphi_{kn}(\lambda)$$

由 (16) 可见

$$\varphi_{kn}(\lambda)\leqslant\psi(k)\quad(0\leqslant k\leqslant n)\ \square$$

(二) 现在来求 $\xi^{(n)}=\int_0^{\eta_n}V(x_t)dt$ 的各级矩. 令

$$m_{kn}^{(l)}=E_k\{[\xi^{(n)}]^l\}\quad(l=1,2,\cdots)\tag{17}$$

定理 2

$$\left.\begin{aligned}&m_{kn}^{(l)}=\sum_{i=k}^{n-1}G_{in}^{(l)},\quad(0\leqslant k\leqslant n-1)\\&m_{nn}^{(l)}=0\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

其中[1]

$$G_{in}^{(l)}=\frac{lV(i)m_{in}^{(l-1)}}{b_i}+\sum_{k=0}^{i-1}\frac{a_ia_{i-1}\cdots a_{i-k}lV(i-k-1)m_{i-k-1\,n}^{(l-1)}}{b_ib_{i-1}\cdots b_{i-k}b_{i-k-1}}\tag{19}$$

证 令 $\varphi_{kn}^{(l)}(0)=\frac{d^l}{d\lambda^l}\varphi_{kn}(\lambda)\,|_{\lambda=0}$, 则

$$m_{kn}^{(l)}=(-1)^l\varphi_{kn}^{(l)}(0)\tag{20}$$

我们已知 $\{\varphi_{kn}(\lambda)\}$ 是 (10) 的唯一解, 以它代入 (10) 中的 $\{\psi_{kn}(\lambda)\}$, 对 λ 求 l 次导数 (由 (11) 知 $\varphi_{kn}(\lambda)$ 可微分任意多次), 并令 $\lambda=0$, 乘以 $(-1)^l$ 后由 (20) 得

$$\left.\begin{aligned}&a_km_{k-1\,n}^{(l)}-c_km_{k\,n}^{(l)}+b_km_{k+1\,n}^{(l)}+lV(k)m_{kn}^{(l-1)}=0\\&m_{nn}^{(l)}=0\quad(0\leqslant k<n)\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

解 (21) 得

$$m_{kn}^{(l)}=\widetilde{\delta}_n^{(k+1)}(0)/\delta_n(0)\quad(0\leqslant k<n)$$

其中 $\widetilde{\delta}_n^{(k+1)}$ 是以 $-l\begin{pmatrix}V(0)m_{0n}^{(l-1)}\\ \vdots\\ V(n-1)m_{n-1\,n}^{(l-1)}\end{pmatrix}$ 代替 $\delta_n(0)$ 中第 $k+1$ 列后所得行列式. 展开此二行列式即得 (18),(19). □

由定理 2 知: 高级矩 $m_{kn}^{(l)}$ 可通过低级矩 $m_{kn}^{(l-1)}$ 表示. 特别, $G_{in}^{(1)}$ 与 n 无关, 简记它为 G_i, 由 (19) 得

$$G_i=\frac{V(i)}{b_i}+\sum_{k=0}^{i-1}\frac{a_ia_{i-1}\cdots a_{i-k}V(i-k-1)}{b_ib_{i-1}\cdots b_{i-k}b_{i-k-1}}\tag{22}$$

---

[1] 自然, $m_{kn}^{(0)}=1$. 由此及 (19),(18) 可求出 $m_{kn}^{(1)}$. 一般地, 已知 $m_{kn}^{(l-1)}$ 由 (19),(18) 即可求出 $m_{kn}^{(l)}$, $(0\leq k\leq n)$.

如 $V \equiv 1$, 则 $\xi^{(n)}(\omega) = \eta_n(\omega)$. 由 (18) 及 (22)

$$m_{kn}^{(1)} = E_k \eta_n = \sum_{i=k}^{n-1} \left(\frac{1}{b_i} + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{a_i a_{i-1} \cdots a_{i-k}}{b_i b_{i-1} \cdots b_{i-k-1}} \right) \tag{23}$$

(三) 现在研究 $\xi(\omega)$. 回忆 (2) 并由积分单调收敛定理, 得

$$m_k^{(l)} = E_k[\xi(\omega)^l] = \lim_{n \to \infty} m_{kn}^{(l)} \tag{24}$$

令

$$G_i^{(l)} = \lim_{n \to \infty} G_{in}^{(l)} = \frac{lV(i) m_i^{(l-1)}}{b_i} + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{a_i a_{i-1} \cdots a_{i-k} lV(i-k-1) m_{i-k-1}^{(l-1)}}{b_i b_{i-1} \cdots b_{i-k} b_{i-k-1}} \tag{25}$$

由 (24),(18) 得下定理中结论 (i):

定理 3 (i) $m_k^{(l)} = \sum\limits_{i=k}^{\infty} G_i^{(l)}$;

(ii) 各级矩 $m_k^{(l)}$ $(k, l = 0, 1, 2, \cdots)$ 有下列集体性质: 或者它们都无穷, 或者它们都有穷.

证 只要证 (ii). 简写 $G_i^{(l)}$ 为 G_i, 由 (i)

$$m_0^{(1)} = E_0 \xi(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} G_i \tag{26}$$

如 $m_0^{(1)} < \infty$, 因为 $m_0^{(1)} \geqslant m_1^{(1)} \geqslant m_2^{(1)} \geqslant \cdots$, 故由 (i) 及 (25)

$$m_k^{(2)} \leqslant 2 m_0^{(1)} \left(\sum_{i=k}^{\infty} G_i \right) \leqslant 2! (m_0^{(1)})^2$$

设 $m_k^{(n-1)} \leqslant (n-1)! (m_0^{(1)})^{n-1}$, 则仍由 (i) 及 (25) 得

$$m_k^{(n)} \leqslant n m_0^{(n-1)} m_k^{(1)} \leqslant n! (m_0^{(1)})^n \quad (0 \leqslant k < \infty) \tag{27}$$

这得证一切 $m_k^{(n)} < \infty$ $(k, n = 0, 1, 2, \cdots)$. 如 $m_0^{(1)} = \infty$, 由 (i) 及 (25) 易见一切 $m_k^{(n)} = \infty$ $(k, n = 0, 1, 2, \cdots)$. □

注 1 如 $V \equiv 1$, 由 (25) 及 (i) 知, G_i 与 $m_0^{(1)}$ 分别化为 §1 中 (4), (6) 中的 m_i 及 R.

$m_0^{(1)} < \infty$ 不仅使一切 $m_k^{(n)} < \infty$ $(n = 1, 2, \cdots; k = 0, 1, 2, \cdots)$ 甚至还使 $\xi(\omega) < \infty$ (P_k -a.s.), $k = 0, 1, 2, \cdots$, 这是下定理的一个结论.

定理 4 对一切整数 $k \geqslant 0$, 只有两种可能:

(a) 或者 $P_k(\xi(\omega) = \infty) = 1$, 充要条件是

$$E_0 \xi = \sum_{i=0}^{\infty} G_i = \infty$$

(b) 或者 $P_k(\xi(\omega) < \infty) = 1$, 充要条件是

$$E_0 \xi = \sum_{i=0}^{\infty} G_i < \infty$$

在情况 (b) 下，对 $\lambda > 0$,

$$\varphi_k(\lambda) \equiv E_k \exp(-\lambda\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{\delta_n^{(k+1)}(\lambda)}{\delta_n(\lambda)} \quad (k \geqslant 0) \tag{28}$$

除差一常数因子外，它是下列方程组的唯一非平凡有界解[1]:

$$a_k\varphi_{k-1}(\lambda) - c_k\varphi_k(\lambda) + b_k\varphi_{k+1}(\lambda) - \lambda V(k)\varphi_k(\lambda) = 0 \quad (k \geqslant 0) \tag{29}$$

先证一引理

引理 3 设 $f_n > 0, g_n > 0$ $(n \geqslant 1)$, 又 $0 \leqslant z_0 < z_1 < z_2 < \cdots$, 而且

$$z_{n+1} - z_n = f_n z_n + g_n(z_n - z_{n-1}) \tag{30}$$

则 $\{z_n\}$ 有界的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f_n + g_n f_{n-1} + \cdots + g_n g_{n-1}\cdots g_2 f_1 + g_n g_{n-1}\cdots g_2 g_1) < \infty \tag{31}$$

证 反复用 (30) 得

$$z_{n+1} - z_n = f_n z_n + g_n f_{n-1} z_{n-1} + \cdots + g_n g_{n-1}\cdots g_2 f_1 z_1 + g_n \cdots g_2 g_1(z_1 - z_0)$$

故如记 $F_n = f_n + g_n f_{n-1} + \cdots + g_n g_{n-1}\cdots g_2 f_1 + g_n\cdots g_2 g_1$, 则

$$z_{n+1} - z_n \leqslant F_n z_n$$

另一方面有 $z_{n+1} - z_n \geqslant F_n(z_1 - z_0)$. 由此二不等式得

$$z_1 + (z_1 - z_0)\sum_{k=1}^{n-1} F_k \leqslant z_n \leqslant z_1 \prod_{k=1}^{n-1}(1 + F_k) \quad (n > 1)$$

这表示当且只当 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} F_k < \infty$ 时 $\{z_n\}$ 有界. □

定理 4 的证 因 $E_k\xi \leqslant E_0\xi$, 故如 $E_0\xi = \sum\limits_{i=0}^{\infty} G_i < \infty$, 则结论 (b) 成立. 由于 $\lambda > 0$, $0 \leqslant \varphi_k(\lambda) \leqslant 1$, 故由积分控制收敛定理及 (ii) 即得 (28).

仿照基本引理的证明，或直接由 §15.3 定理 2, 知 $\{\varphi_k(\lambda)\}$ 满足 (29). 除了平凡解以外，由于 $a_0 = 0$,(29) 只有一个线性独立解，但可能无界. 任取 $\varphi_0(\lambda) \geqslant 0$, 由引理 3, 可见此解有界的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\lambda\Big(\frac{V(n)}{b_n} + \frac{a_n V(n-1)}{b_n b_{n-1}} + \frac{a_n a_{n-1} V(n-2)}{b_n b_{n-1} b_{n-2}} + \cdots + \frac{a_n a_{n-1}\cdots a_2 V(1)}{b_n b_{n-1}\cdots b_2 b_1}\Big) + \frac{a_n a_{n-1}\cdots a_1}{b_n b_{n-1}\cdots b_1}\Big] < \infty$$

[1] 参看 §15.3(37).

后一条件在 $V \neq 0$ 时等价于 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} G_i < \infty$.

如 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} G_i = \infty$, (28) 中的 $\{\varphi_k(\lambda)\}$ 只可能是平凡解, 因为此 $\{\varphi_k(\lambda)\}$ 有界. 这样, $\varphi_k(\lambda) \equiv 0$, $(k \geqslant 0, \lambda > 0)$, 故 $P_k(\xi(\omega) = \infty) = 1$.

如 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} G_i < \infty$,(28) 中的 $\{\varphi_k(\lambda)\}$ 不可能是平凡解, 否则势必 $P_k(\xi(\omega) = \infty) = 1$, 从而 $E_k\xi = \sum\limits_{i=k}^{\infty} G_i = \infty$. 这与假设矛盾. □

定理 4 的一个重要推论如下:

系 1 (Добрушин) 对一切整数 $k \geqslant 0$, 第一个飞跃点 $\eta(\omega)$ 或者以 P_k- 概率 1 无穷, 或者以 P_k- 概率 1 有穷; 这两种可能性分别决定于 $R(= E_0\eta) = \infty$ 或 $R < \infty$. 以 §1(1) 中的 Q 为密度矩阵的生灭过程唯一的充要条件是 $R = \infty$.

证 取 $V \equiv 1$, 则定理 4 中的 ξ, $E_0\xi = \sum\limits_{i=0}^{\infty} G_i$ 分别化为 η, $E_0\eta = R$, 于是由定理 4 得前一结论. 由此及 §13.3 定理 4(ii) 即得后一结论. □

作为定理 3 的推论有

系 2 由 (2) 定义的随机泛函 $\xi(\omega)$ 的分布

$$F_k(x) = P_k(\xi(\omega) \leqslant x) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

由它的矩 $m_k^{(l)}$ $(l = 0, 1, 2, \cdots; m_k^{(0)} = 1)$ 所唯一决定.

证 由 (27), 当 $r < \frac{1}{m_0^{(1)}}$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_k^{(n)}}{n!} r^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} [m_0^{(1)} r]^n < \infty$$

故由矩问题中一熟知定理 [1], 如 $m_k^{(1)} < \infty$ (或等价地, $m_0^{(1)} < \infty$), 所需结论正确. 如 $m_k^{(1)} = \infty$, 由定理 4(a) 得 $P_k(\xi(\omega) = \infty) = 1$, 因而 $F_k(x) \equiv 0$, $x \in (-\infty, \infty)$. □

例 1 设 $V(0) = 1$, $V(k) = 0$ $(k > 0)$. 这时 $\xi^{(n)}$ 是首达 n 以前在 0 的总共逗留时间, ξ 是在第一个飞跃点以前在 0 的总共逗留时间 (如果 $\eta = \infty$, 则 ξ 是在 0 的总共逗留时间), 又 (22) 中的 G_i 化为 g_i:

$$g_0 = \frac{1}{b_0}, \quad g_i = \frac{a_i a_{i-1} \cdots a_1}{b_i b_{i-1} \cdots b_1 b_0} \tag{32}$$

根据 (4), 用归纳法可证

$$\varphi_{0n}(\lambda) = E_0 \exp(-\lambda \xi^{(n)}) = \left[\lambda \sum_{i=0}^{n-1} g_i + 1\right]^{-1} \tag{33}$$

由 Laplace 变换知

$$P_0(\xi^{(n)} \leqslant x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\sum\limits_{i=0}^{n-1} g_i}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{34}$$

[1] 参看 H. Cramer, 统计学数学方法, §15.4.

由定理 2

$$E_0\xi^{(n)}=\sum_{i=0}^{n-1}g_i$$

由定理 4, $P_0(\xi<\infty)=1$ 的充要条件是 $E_0\xi=\sum\limits_{i=0}^{\infty}g_i<\infty$; 在此情况下，我们有

$$\varphi_0(\lambda)=E_0\exp(-\lambda\xi)=\left[\lambda\sum_{i=0}^{\infty}g_i+1\right]^{-1} \tag{35}$$

$$P_0(\xi\leqslant x)=\begin{cases}1-e^{-x\big/\sum\limits_{i=0}^{\infty}g_i}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{36}$$

$$E_0\xi=\sum_{i=0}^{\infty}g_i \tag{37}$$

(四) 至此，我们已对 $\xi^{(n)}$ 及 ξ 的分布和各级矩研究清楚，所用方法是解差分方程 (10) 与 (21), 但在实际应用中会遇到解方程的不便. 因此，我们来叙述另一方法 - 递推法. 令

$$h_k(\lambda)=E_k\exp\left(-\lambda\int_0^{\eta_{k+1}(\omega)}V[x(t,\omega)]\,dt\right) \tag{38}$$

我们有

$$\varphi_{kn}(\lambda)=h_k(\lambda)h_{k+1}(\lambda)\cdots h_{n-1}(\lambda),\quad (n>k) \tag{39}$$

实际上

$$\begin{aligned}\varphi_{kn}(\lambda)&=E_ke^{-\lambda\int_0^{\eta_n}V(x_t)\,dt}=E_ke^{-\lambda\int_0^{\eta_{k+1}}V(x_t)\,dt-\lambda\int_{\eta_{k+1}}^{\eta_n}V(x_t)\,dt}\\&=E_ke^{-\lambda\int_0^{\eta_{k+1}}}V(x_t)\,dt\cdot E_{k+1}e^{-\lambda\int_0^{\eta_n}V(x_t)\,dt}\\&=h_k(\lambda)\cdot\varphi_{k+1\,n}(\lambda)=h_k(\lambda)h_{k+1}(\lambda)\cdots h_{n-1}(\lambda)\end{aligned}$$

因此，要求 $\varphi_{kn}(\lambda)$, 只须求出 $h_i(\lambda)$. 为此，仿照基本引理的证明，我们有

$$h_k(\lambda)=\frac{b_k}{\lambda V(k)+c_k}+\frac{a_k}{\lambda V(k)+c_k}h_{k-1}(\lambda)h_k(\lambda)$$

亦即

$$h_k(\lambda)=b_k\cdot[\lambda V(k)+c_k-a_kh_{k-1}(\lambda)]^{-1} \tag{40}$$

如能求出 $h_0(\lambda)$, 利用上式就可求出一切 $h_k(\lambda)$. 然而

$$h_0(\lambda)=E_0e^{-\lambda\int_0^{\eta_1}V(x_t)\,dt}=E_0e^{-\lambda V(0)\eta_1}=\frac{b_0}{\lambda V(0)+b_0} \tag{41}$$

由 (40),(41) 得 $h_k(\lambda)$ 的连分数表达式

$$h_k(\lambda)=\cfrac{b_k}{D_k-a_k\cfrac{b_{k-1}}{D_{k-1}-a_{k-1}\cfrac{b_{k-2}}{D_{k-2}-a_{k-2}\cfrac{b_{k-3}}{\ddots\, D_1-a_1\cfrac{b_0}{D_0}}}}} \tag{42}$$

其中 $D_i = \lambda V(i) + c_i$. 特别地，有

$$h_0(\lambda) = \frac{b_0}{\lambda V(0) + b_0}$$

$$h_1(\lambda) = \frac{b_1[\lambda V(0) + b_0]}{[\lambda V(0) + c_0][\lambda V(1) + c_1] - a_1 b_0}$$

一般地， $h_k(\lambda) = U_{k+1}(\lambda)/L_{k+1}(\lambda)$, 其中 $U_k(\lambda)$, $L_k(\lambda)$ 分别是不高于 $k-1$ 次及 k 次的 λ 的多项式. 由 (40) 得

$$\frac{U_{k+1}(\lambda)}{L_{k+1}(\lambda)} = h_k(\lambda) = \frac{b_k L_k(\lambda)}{[\lambda V(k) + c_k]L_k(\lambda) - a_k U_k(\lambda)}$$

故除一常数因子外，可取

$$\begin{aligned} U_{k+1}(\lambda) &= b_k L_k(\lambda) \\ L_{k+1}(\lambda) &= [\lambda V(k) + c_k]L_k(\lambda) - a_k U_k(\lambda) \end{aligned} \tag{43}$$

由此可见

$$\begin{aligned} \varphi_{0n}(\lambda) &= h_0(\lambda)h_1(\lambda)\cdots h_{n-1}(\lambda) = \frac{b_0 b_1 \cdots b_{n-1}}{L_n(\lambda)} \\ \varphi_{kn}(\lambda) &= h_k(\lambda)h_{k+1}(\lambda)\cdots h_{n-1}(\lambda) = \frac{\varphi_{0n}(\lambda)}{\varphi_{ok}(\lambda)} \\ &= \frac{b_k b_{k+1}\cdots b_{n-1} L_k(\lambda)}{L_n(\lambda)} \end{aligned} \tag{44}$$

这里 $L_n(\lambda)$ 满足递推关系式:

$$\left.\begin{aligned} &L_0(\lambda) \equiv 1, \quad L_1(\lambda) = \lambda V(0) + b_0 \\ &L_n(\lambda) = [\lambda V(n-1) + c_{n-1}]L_{n-1}(\lambda) - a_{n-1}b_{n-2}L_{n-2}(\lambda) \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

显然， $L_n(\lambda)$ 中最高次项 λ^n 的系数是 $V(0)V(1)\cdots V(n-1)$; 常数项是 $b_0 b_1 \cdots b_{n-1}$.

有时考虑多项式

$$\mathcal{L}_n(\lambda) \equiv \frac{L_n(\lambda)}{b_0 b_1 \cdots b_{n-1}} = \frac{1}{\varphi_{0n}(\lambda)} \tag{46}$$

更方便，由 (45), 显然有

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}_0(\lambda) \equiv 1 \text{ (设)}; \quad \mathcal{L}_1(\lambda) = \frac{\lambda V(0)}{b_0} + 1 \\ &\mathcal{L}_n(\lambda) = \frac{\lambda V(n-1) + c_{n-1}}{b_{n-1}}\mathcal{L}_{n-1}(\lambda) - \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\mathcal{L}_{n-2}(\lambda) \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

例 2 设 $V(0) = V(1) = 1$, $V(i) = 0$, $i > 1$. 则

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_0(\lambda) = 1, \quad \mathcal{L}_1(\lambda) = \frac{\lambda}{b_0} + 1 \\ &\mathcal{L}_2(\lambda) = \frac{g_1}{a_1}\lambda^2 + \left(g_1 + g_0 + \frac{b_0}{a_1}g_1\right)\lambda + 1 \end{aligned} \tag{48}$$

其中 g_i 由 (32) 定义. 因 $\mathcal{L}_2(\lambda)$ 是连续函数, 而且 $\mathcal{L}_2(0)>0$, $\mathcal{L}_2(-b_0)<0$, $\mathcal{L}_2(-\infty)>0$, 故它有两个不相等的负零点, 设为 $-\frac{1}{\alpha_1}$, $-\frac{1}{\alpha_2}$, 即

$$\mathcal{L}_2(\lambda)=(\alpha_1\lambda+1)(\alpha_2\lambda+1)\quad(\alpha_2>\alpha_1>0)$$

由于此时 $\int_0^{\eta_2}V(x_t)\,dt=\eta_2$, 故

$$E_0e^{-\lambda\eta_2}=\frac{1}{(\alpha_1\lambda+1)(\alpha_2\lambda+1)}$$

取反拉普拉斯变换, 可见自 0 出发, 首达状态 2 的时间 η_2 有双指数分布:

$$P_0(\eta_2\leqslant x)=\int_0^x\frac{e^{-t/\alpha_1}-e^{-t/\alpha_2}}{\alpha_1-\alpha_2}\,dt$$

首达时间的一般性研究见下节.

下面讨论停留时间的分布. 利用 (48) 及归纳法, 容易证明

$$\mathcal{L}_n(\lambda)=\left(\frac{1}{a_1}\sum_{i=1}^{n-1}g_i\right)\lambda^2+\left(\sum_{i=0}^{n-1}g_i+\frac{b_0}{a_1}\sum_{i=1}^{n-1}g_i\right)\lambda+1\tag{49}$$

注意, 此时 $\xi^{(n)}\equiv\int_0^{\eta_n}V(x_t)dt$ 由于 V 之特殊性, 而化为在首达状态 n 以前停留在状态 0 与 1 的总时间. 由

$$E_0e^{-\lambda\xi^{(n)}}\equiv\varphi_{0n}(\lambda)=\frac{1}{\mathcal{L}_n(\lambda)}\tag{50}$$

及 (49), 并简记 E_0 为 E 得

$$E\xi^{(n)}=-\varphi'_{on}(0)=\sum_{i=1}^{n-1}g_i+\frac{b_0}{a_1}\sum_{i=1}^{n-1}g_i\tag{51}$$

令

$$G_n=\sum_{i=1}^{n}g_i,\quad g_i=\frac{a_1a_2\cdots a_i}{b_0b_1b_2\cdots b_i},\quad G=\sum_{i=1}^{\infty}g_i$$

考虑随机变量 $\xi^{(n)}/E\xi^{(n)}$, 它的分布的 Laplace 变换为

$$\varphi_{0n}\left(\frac{\lambda}{E\xi^{(n)}}\right)=\frac{1}{\frac{a_1b_0^2G_{n-1}}{(a_1b_0G_{n-1}+a_1+b_0^2G_{n-1})^2}\lambda^2+\lambda+1}\tag{52}$$

分母显然有两个不相等的负零点, 因此, $\xi^{(n)}/E\xi^{(n)}$ 也有双指数分布

$$P_0\left(\frac{\xi^{(m)}}{E\xi^{(n)}}\leqslant x\right)=\int_0^x\frac{e^{-t/\beta_1}-e^{-t/\beta_2}}{\beta_1-\beta_2}dt\tag{52_1}$$

其中 $-\frac{1}{\beta_1}$, $-\frac{1}{\beta_2}$ 是 (52) 右方分母的零点, $\beta_2>\beta_1>0$.

今考虑当 $n\to\infty$ 时的极限分布, 分两种情况:

1) $G_n \uparrow G=\infty$. 由 (52) 得

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{0n}\Big(\frac{\lambda}{E\xi^{(n)}}\Big)=\frac{1}{\lambda+1} \tag{53}$$

也就是

$$\lim_{n\to\infty}P_0\Big(\frac{\xi^{(n)}}{E\xi^{(n)}}\leqslant x\Big)=1-e^{-x} \tag{54}$$

注意 $G=\infty$ 等价于 $Z=\infty$(见 §1(7)), 故由 §1 定理 3, 我们证明了：如嵌入马氏链常返，则 $\frac{\xi^{(n)}}{E\xi^{(n)}}$ 有渐近指数分布 (54).

2) $G_n\uparrow G<\infty$. 由 (52) 立刻看出： $\frac{\xi^{(n)}}{E\xi^{(n)}}$ 有渐近双指数分布，亦即

$$\lim_{n\to\infty}P_0\Big(\frac{\xi^{(n)}}{E\xi^{(n)}}\leqslant x\Big)=\int_0^x\frac{e^{-\frac{t}{\alpha_1}}-e^{-\frac{t}{\alpha_2}}}{\alpha_1-\alpha_2}dt \tag{55}$$

而 $-\frac{1}{\alpha_1}, -\frac{1}{\alpha_2}$ 是二次多项式

$$\frac{a_1b_0^2G}{(a_1b_0G+a_1+b_0^2G)^2}\lambda^2+\lambda+1=0 \tag{56}$$

的二根， $\alpha_2>\alpha_1>0$.

§16.3 最初到达时间与逗留时间

(一) 在本段中，我们来研究 $V(i)\equiv 1$ 的特殊情形，这时 $\xi^{(n)}(\omega)$ 化为 $\eta_n(\omega)$, 即最初到达状态 n 的时刻，而 §2 中 (45) 内的多项式递推关系化为

$$\left.\begin{aligned}&L_0(\lambda)\equiv 1,\quad L_1(\lambda)=\lambda+b_0\\&L_n(\lambda)=(\lambda+c_{n-1})L_{n-1}(\lambda)-a_{n-1}b_{n-2}L_{n-2}(\lambda)\quad(n\geqslant 2).\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

引理 1 设 $A_n(\lambda)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 为如下定义的多项式.

$$\left.\begin{aligned}&A_0(\lambda)\equiv 1,\quad A_1(\lambda)=\lambda+e_0\\&A_n(\lambda)=(\lambda+f_{n-1})A_{n-1}(\lambda)-e_{n-1}A_{n-2}(\lambda)\quad(n\geqslant 2).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中 f_n 为实数， $e_n>0, A_n(0)>0$, 则

$$A_n(\lambda)=0\quad(n\geqslant 1)$$

的根为负数，互不相同，而且被 $A_{n-1}(\lambda)=0$ 的根所隔开，即

$$A_n(\lambda)=\prod_{i=1}^n(\lambda-\lambda_i^{(n)}),$$

$$0>\lambda_1^{(n)}>\lambda_1^{(n-1)}>\lambda_2^{(n)}>\lambda_2^{(n-1)}>\cdots>\lambda_{n-1}^{(n)}>\lambda_{n-1}^{(n-1)}>\lambda_n^{(n)} \tag{3}$$

证 $A_1(\lambda)=0$ 只有一个负根 $-e_0$. 当 $n=2$ 时，由假设 $A_2(0)>0$, 又 $A_2(-e_0)=-e_1<0$, $A_2(-\infty)>0$, 故 (3) 对 $n=1,n=2$ 正确，即有

$$0>\lambda_1^{(2)}>\lambda_1^{(1)}=-e_0>\lambda_2^{(2)}$$

今设对 $n\geqslant 3$ 有

$$0>\lambda_1^{(n-1)}>\lambda_2^{(n-2)}>\cdots>\lambda_{n-2}^{(n-1)}>\lambda_{n-2}^{(n-2)}>\lambda_{n-1}^{(n-1)}$$

则 $A_{n-2}(\lambda_i^{(n-1)})$ 与 $(-1)^{i-1}$ 有相同的符号，即

$$\operatorname{sgn} A_{n-2}(\lambda_i^{(n-1)})=(-1)^{i-1}\quad (i=1,2,\cdots,n-1) \tag{4}$$

由 (2), $A_n(\lambda_i^{(n-1)})=-e_{n-1}A_{n-2}(\lambda_i^{(n-1)})$, 所以由 (4) 得

$$\operatorname{sgn} A_n(\lambda_i^{(n-1)})=(-1)^{i}\quad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

因为 $\operatorname{sgn} A_n(-\infty)=(-1)^n$, 可见下列各区间

$$(-\infty,\lambda_{n-1}^{(n-1)}),\ (\lambda_{n-1}^{(n-1)},\lambda_{n-2}^{(n-1)}),\ \cdots,\ (\lambda_1^{(n-1)},0)$$

中各含 $A_n(\lambda)=0$ 的一根. □

现在来讨论 (1) 中多项式 $L_n(\lambda)$ 的性质:

1. $L_n(\lambda)=0$ 的根是互不相同的负数，而且被 $L_{n-1}(\lambda)=0$ 的根所隔开.

这由引理 1 推出.

2. $L_n(\lambda)$ 中最高次项即 λ^n 次项的系数是 1, 常数项等于 $b_0b_1\cdots b_{n-1}$.

这由 (1) 直接看出.

3. $L_n(\lambda)$ 中， λ^{n-1} 的系数等于 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_i+\sum\limits_{i=0}^{n-1}b_i$. 因此， $L_n(\lambda)=0$ 诸根的和为此和数的负数.

这由性质 2 及归纳法推出.

4. $L_n(\lambda)$ 中， λ 的系数为 $b_0b_1\cdots b_{n-1}E_0\eta$. □

事实上，由 §2(44) 知

$$\varphi_{0n}(\lambda)=\frac{b_0b_1\cdots b_{n-1}}{L_n(\lambda)} \tag{5}$$

但 $\varphi_{0n}(\lambda)=E_0e^{-\lambda\eta_n}$, 故

$$E_0\eta_n=-\varphi_{0n}'(0)=\frac{b_0b_1\cdots b_{n-1}L_n'(0)}{L_n^2(0)} \tag{6}$$

利用性质 2, 可见 λ 的系数 (即 $L_n'(0)$) 为 $b_0b_1\cdots b_{n-1}E_0\eta_n$.

定理 1 自 0 出发，最初到达 n 的时刻 η_n 有分布密度为

$$f_{0n}(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_0b_1\cdots b_{n-1}}{L_n'(-\mu_k^{(n)})}e^{-\mu_k^{(n)}t} \tag{7}$$

这里 $-\mu_k^{(n)}$ 是 $L_n(\lambda)$ 的零点,

$$L_n(\lambda)=\prod_{k=1}^{n}(\lambda+\mu_k^{(n)}) \tag{8}$$

而

$$L_n'(-\mu_k^{(n)}) = \frac{d}{d\lambda}L_n(\lambda)|_{\lambda=-\mu_k^{(n)}} = \prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(\mu_i^{(n)} - \mu_k^{(n)})$$

证 由性质 1, (8) 式成立，故

$$E_0 e^{-\lambda\eta_n} = \frac{b_0 b_1 \cdots b_{n-1}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(\lambda + \mu_k^{(n)})} \tag{9}$$

取反拉普拉斯变换即得 (7). □

对 $m < n$, 由于 §2(44)

$$E_m e^{-\lambda\eta_n} = \varphi_{mn}(\lambda) = \frac{\varphi_{0n}(\lambda)}{\varphi_{0m}(\lambda)} = \frac{b_m b_{m+1}\cdots b_{n-1}L_m(\lambda)}{L_n(\lambda)}$$

故得

定理 1′ 自 m 出发，最初到达 n 的时刻 η_n 有分布密度为

$$f_{mn}(t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{b_m b_{m+1}\cdots b_{n-1}L_m(-\mu_k^{(n)})}{L_n'(-\mu_k^{(n)})}e^{-\mu_k^{(n)}t} \quad (m < n) \tag{7′}$$

(二) 现在来研究当 $n\to\infty$ 时 η_n 的渐近分布，考虑多项式 $\mathcal{L}_n(\lambda) = \frac{L_n(\lambda)}{b_0 b_1\cdots b_{n-1}}$, 设

$$\mathcal{L}_n(\lambda) = 1 + c_{n,1}\lambda + c_{n,2}\lambda^2 + \cdots + c_{n,n}\lambda^n \tag{10}$$

由上述性质 4, 知

$$E_0\eta_n = c_{n,1} \tag{11}$$

由 §2(47), 得

$$\mathcal{L}_0(\lambda) \equiv 1, \quad \mathcal{L}_1(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{b_0}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{n+1}(\lambda) - \mathcal{L}_n(\lambda) &= \frac{a_n}{b_n}[\mathcal{L}_n(\lambda) - \mathcal{L}_{n-1}(\lambda)] + \frac{\lambda}{b_n}\mathcal{L}_n(\lambda)\\ &= \frac{a_n}{b_n}\left\{\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}[\mathcal{L}_{n-1}(\lambda) - \mathcal{L}_{n-2}(\lambda)] + \frac{\lambda}{b_{n-1}}\mathcal{L}_{n-1}(\lambda)\right\} + \frac{\lambda}{b_n}\mathcal{L}_n(\lambda) = \cdots\\ &= \lambda g_n\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i g_i}\mathcal{L}_i(\lambda) + \mathcal{L}_0(\lambda)\right]\end{aligned} \tag{12}$$

这里的 g_n 与 §2 中 (32) 相同，即 $g_n = \frac{a_1 a_2\cdots a_n}{b_0 b_1\cdots b_n}$.

引理 2 诸系数 $c_{n,l}$ 间有下列关系：

1) $c_{n+1,l} - c_{n,l} = g_n\sum\limits_{k=l-1}^{n}\frac{c_{k,l-1}}{b_k g_k}$ $\quad (n \geqslant l-1,\ c_{l-1,l} = 0,\ c_{k,0} = 1)$. (13)

2) 一切 $c_{n,l} > 0$, 而且 $c_{n+l,l} > c_{n,l}$ $(n \geqslant l)$;

3) $c_{n,l} < c_{n,l-1}c_{n,1}$; (14)

4) $c_{n,l} \leqslant (c_{n,1})^l / l!$. (15)

证 1) 以 (10) 代入 (12), 比较 λ^l 的系数即得 (13).

2) 由上段中性质 2

$$c_{ll} = \frac{1}{b_0 b_1 \cdots b_{l-1}} > 0$$

再反复利用 (13), 即得所欲证.

3) (13) 右方诸[illegible]中以 $c_{n,l-1}$ 为最大，故

$$\begin{aligned} c_{n+1,l} - c_{n,l} &\leqslant c_{n,l-1} g_n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{b_k g_k} = c_{n,l-1} g_n \sum_{k=0}^{n} \frac{c_{k,0}}{b_k g_k} \quad (\text{利用 } (13)) \\ &= c_{n,l-1}(c_{n+1,1} - c_{n,1}) \leqslant c_{n+1,l-1} c_{n+1,1} - c_{n,l-1} c_{n,1} \end{aligned} \tag{16}$$

(16) 两方对 n 自 $l-1$ 起至 n 止求和，得

$$c_{n+1,l} \leqslant c_{n+1,l-1} c_{n+1,1} - c_{l-1,l-1} c_{l-1,1} < c_{n+1,l-1} c_{n+1,1}$$

4) 注意

$$a^l (b-a) \leqslant \int_a^b x^l \, dx = \frac{b^{l+1} - a^{l+1}}{l+1} \tag{17}$$

当 $l=1$ 时 (15) 正确；设它对 l 正确，则由 (16) 前半式及 (17)

$$c_{n+1,l+1} - c_{n,l+1} \leqslant c_{n,l}(c_{n+1,1} - c_{n,1}) \leqslant \frac{c_{n,1}^l}{l!}(c_{n+1,1} - c_{n,1}) \leqslant \frac{c_{n+1,1}^{l+1} - c_{n,1}^{l+1}}{(l+1)!} \tag{18}$$

将 (18) 两端对 $n = l, l+1, \cdots, m-1$ 求和，即得

$$c_{m,l+1} \leqslant \frac{c_{m,1}^{l+1}}{(l+1)!} \ \square$$

以下简记 $E_0 \eta_n$ 为 m_{0n}, 它等于 $c_{n,1}$. 考虑多项式

$$\mathcal{L}_n\left(\frac{\lambda}{m_{0n}}\right) = \mathcal{L}_n\left(\frac{\lambda}{c_{n,1}}\right) = 1 + \lambda + d_{n,2}\lambda^2 + \cdots + d_{n,n}\lambda^n \tag{19}$$

显然 $d_{n,l} = \frac{c_{n,l}}{c_{n,1}^l}$. 由 (14),(15) 得

$$d_{n,l} \leqslant d_{n,l-1}; \quad d_{n,l} \leqslant \frac{1}{l!} \tag{20}$$

现在可以叙述所需的渐近分布，我们有

定理 2 为使

$$\lim_{n\to\infty} P_0\left(\frac{\eta_n}{m_{0n}} \leqslant t\right) = 1 - e^{-t} \tag{21}$$

充要条件是下列三条件中任何一个成立：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} d_{n,2} = 0$ (22)

(ii) $\frac{E_0(\eta_n^2)}{m_{on}^2} \to 2 \ (n \to \infty)$ (23)

(iii) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left[\frac{m_{in}}{b_i}+\sum\limits_{k=0}^{i-1}\frac{a_ia_{i-1}\cdots a_{i-k}}{b_ib_{i-1}\cdots b_{i-k-1}}m_{i-k-1,n}\right]}{\left[\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{b_i}+\sum\limits_{k=0}^{i-1}\frac{a_ia_{i-1}\cdots a_{i-k}}{b_ib_{i-1}\cdots b_{i-k-1}}\right)\right]^2}=1 \tag{24}$$

其中

$$m_{kn}=E_k\eta_n=\sum_{i=k}^{n-1}\left(\frac{1}{b_i}+\sum_{k=0}^{i-1}\frac{a_ia_{i-1}\cdots a_{i-k}}{b_ib_{i-1}\cdots b_{i-k-1}}\right)$$

证 (i) 注意 (21) 右方分布的拉普拉斯变换为 $\frac{1}{1+\lambda}$, 而 $E_0e^{-\lambda\eta_n}=1/\mathcal{L}_n(\lambda)$, 故 (21) 等价于：对任意有限区域中的 λ, 均匀地有

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{L}_n\Big(\frac{\lambda}{m_{0n}}\Big)=1+\lambda \tag{25}$$

因而由 (19) 可见 (22) 的必要性是明显的. 反之，设 (22) 成立. 考虑复平面上任一有限区域 Λ, 令 $R=\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}|\lambda|>1$. 对 $\varepsilon>0$, 选 l_0 使 $\sum\limits_{l>l_0}\frac{R^l}{l!}<\frac{\varepsilon}{2}$; 再选 n_0, 使得当 $n>n_0$ 时，$d_{n,2}<\frac{\varepsilon}{2l_0R^{l_0}}$. 由 (20), 当 $n>n_0$ 及 $\lambda\in\Lambda$ 时有

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{L}_n\Big(\frac{\lambda}{m_{on}}\Big)-1-\lambda\right| &\leqslant \sum_{l=2}^{l_0}d_{n,l}R^l+\sum_{l>l_0}^{n}d_{n,l}R^l\\ &\leqslant d_{n,2}l_0R^{l_0}+\sum_{l>l_0}^{\infty}\frac{R^l}{l!}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

这说明对 $\lambda\in\Lambda$,(25) 均匀成立.

(ii) 由于

$$E_0e^{-\lambda\frac{\eta_n}{m_{0n}}}=\varphi_{0n}\Big(\frac{\lambda}{m_{0n}}\Big)=\frac{1}{1+\lambda+d_{n,2}\lambda^2+\cdots+d_{n,n}\lambda^n}$$

$$E_0\Big[\Big(\frac{\eta_n}{m_{0n}}\Big)^2\Big]=\widetilde{\varphi}''_{0n}(\lambda)\Big|_{\lambda=0}=2-2d_{n,2} \tag{26}$$

这里 $\widetilde{\varphi}_{0n}(\lambda)=\varphi_{0n}\Big(\frac{\lambda}{m_{0n}}\Big)$, 故显然可见，(22) 与 (23) 等价 (附带指出：(21) 右方指数分布的二级矩也是 2, 故 (23) 要求 $\frac{\eta_n}{m_{0n}}$ 的二级矩趋向极限分布的二级矩).

(iii) 由 §2(18), (19), (23) 立刻看出：(23) 与 (24) 等价. □

下面给出一个简单的充分条件：

定理 3 [1] 如果 $R=\infty$, $e_1<\infty$, 则 (21) 成立，这里 R,e_1 分别由 §1 (6) 及 (5) 定义.

证 由 e_1 的定义及 §2 (32), 易见

$$e_1=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_0}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{b_ig_i}$$

故 $e_1<\infty$ 等价于 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{1}{b_ig_i}<\infty$. 由 (13) 并注意 $c_{12}=0$, 得

$$c_{n2}=\sum_{k=1}^{n-1}(c_{k+1,2}-c_{k,2})=\sum_{k=1}^{n-1}g_k\sum_{l=1}^{k}\frac{c_{l,1}}{b_lg_l}\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}g_k\sum_{l=1}^{n-1}\frac{c_{l,1}}{b_lg_l}$$

[1] 在此定理的条件下，必有 $Z=\infty$, 见 §1 系 2.

但

$$c_{n,1}=E_0\eta_n=\sum_{k=0}^{n-1}g_k\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{b_lg_l}=\sum_{k=0}^{n-1}g_k\left(1+\frac{1}{b_1g_1}+\cdots\right)>\sum_{k=0}^{n-1}g_k$$

故

$$d_{n,2}=\frac{c_{n,2}}{c_{n,1}^2}<\frac{1}{c_{n,1}}\cdot\sum_{l=1}^{n-1}\frac{c_{l,1}}{b_lg_l}$$

对 $\varepsilon>0$, 选 k_0, 使 $\sum\limits_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{b_kg_k}<\frac{\varepsilon}{2}$. 固定此 k_0, 由于 $c_{n1}=E_0\eta\to R=\infty\ (n\to\infty)$, 故可选 n_0, 使

$$\frac{c_{k_0 1}}{c_{n_0 1}}<\frac{\varepsilon}{2B}$$

其中

$$B=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{b_kg_k}$$

于是当 $n>n_0$ 时,

$$\begin{aligned}d_{n,2}&\leqslant\sum_{k=1}^{k_0}\frac{c_{k1}}{c_{n1}}\cdot\frac{1}{b_kg_k}+\sum_{k=k_0+1}^{n-1}\frac{c_{k1}}{c_{n1}}\cdot\frac{1}{b_kg_k}\\&<\frac{c_{k_01}}{c_{n1}}B+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{b_kg_k}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\ \square\end{aligned}$$

此后会看到 (见 §5 定理 4), 当 $R=\infty$ 时, $e_1<\infty$ 等价于存在平稳分布.

以 η_{kn} 表自 k 出发, 最初到达 $n(>k)$ 的时刻, 而 m_{kn} 是它的平均时刻 $(\eta_n=\eta_{0n})$.

系 1 设 $R=\infty, e_1<\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}P_k\left(\frac{\eta_{kn}}{m_{kn}}\leqslant t\right)=1-e^{-t}\tag{27}$$

证 由于 $R=\infty$, $P_0(\eta_n\to\infty)=1$, 又 $m_{0n}\to R=\infty\ (n\to\infty)$. 注意 $\eta_{kn}=\eta_n-\eta_k$, $m_{kn}=m_{0n}-m_{0k}$, 得

$$P_k\left(\frac{\eta_{kn}}{m_{kn}}\leqslant t\right)=P_0\left(\frac{\eta_{kn}}{m_{kn}}\leqslant t\right)=P_0\left(\frac{\eta_n}{m_{0n}}\cdot\frac{1-\frac{\eta_k}{\eta_n}}{1-\frac{m_{0k}}{m_{0n}}}\leqslant t\right)\to1-e^{-t}\ (n\to\infty)\ \square$$

(三) 现在来研究逗留时间. 设

$$V(i)=1,\ 0\leqslant i<n;\quad V(j)=0,\ j\geqslant n\tag{28}$$

这时 $\xi_k^{(n)}=\int_0^{\eta_{n+k}}V(x_t)\,dt$ 是在首达 $n+k$ 之前. 在 $(0,1,\cdots,n-1)$ 中总共逗留的时间. 显然 $\xi_0^{(n)}=\eta_n$ 化为最初到达 n 的时刻, 回忆 §1 (7) 中 Z 的定义.

定理 4 设 $Z=\infty$, 则

$$\lim_{k\to\infty}P_0\left(\frac{\xi_k^{(n)}}{E_0\xi_k^{(n)}}\leqslant t\right)=1-e^{-t}\tag{29}$$

其中 $E_0\xi_k^{(n)}$ 由 §2 (18), (22) 给出，即

$$E_0\xi_k^{(n)} = \sum_{i=0}^{n+k-1}\left(\frac{V(i)}{b_i} + \sum_{j=0}^{i-1}\frac{a_i a_{i-1}\cdots a_{i-j}V(i-j-1)}{b_i b_{i-1}\cdots b_{i-j}b_{i-j-1}}\right) \tag{30}$$

这里 $V(i)$ 满足 (28).

证 仍然利用 (10) 中的 $\mathcal{L}_n(\lambda)$. 由于 (28) 及 §2 (47), 有

$$\mathcal{L}_{n+1} - \mathcal{L}_n = \frac{a_n}{b_n}(\mathcal{L}_n - \mathcal{L}_{n-1})$$

$$\mathcal{L}_{n+2} - \mathcal{L}_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\frac{a_n}{b_n}(\mathcal{L}_n - \mathcal{L}_{n-1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathcal{L}_{n+k} - \mathcal{L}_{n+k-1} = \frac{a_{n+k-1}}{b_{n+k-1}}\frac{a_{n+k-2}}{b_{n+k-2}}\cdots\frac{a_n}{b_n}(\mathcal{L}_n - \mathcal{L}_{n-1})$$

将这些等式相加，得

$$\mathcal{L}_{n+k} = \mathcal{L}_n + (\mathcal{L}_n - \mathcal{L}_{n-1})A_{nk} \tag{31}$$

其中

$$A_{nk} = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{a_n a_{n+1}\cdots a_{n+j}}{b_n b_{n+1}\cdots b_{n+j}}$$

$\mathcal{L}_{n+k}$ 是 λ 的 n 次多项式，因此，$\xi_k^{(n)}$ 的精确分布也类似于 (7). 以 (10) 代入 (31) 的右方，得

$$\mathcal{L}_{n+k}(\lambda) = 1 + \sum_{i=1}^{n}\left[A_{nk}(c_{n,i} - c_{n-1,i}) + c_{n,i}\right]\lambda^i \quad (c_{n-1,n} = 0)$$

由于 $E_0\exp(-\lambda\xi_k^{(n)}) \equiv \varphi_{0,n+k}(\lambda) = [\mathcal{L}_{n+k}(\lambda)]^{-1}$, 故

$$E_0\xi_k^{(n)} = -\varphi'_{0,n+k}(0) = A_{nk}(c_{n,1} - c_{n-1,1}) + c_{n,1}$$

$$E_0\exp\Big(-\lambda\frac{\xi_k^{(n)}}{E_0\xi_k^{(n)}}\Big) = \Big[\mathcal{L}_{n+k}\Big(\frac{\lambda}{E_0\xi_k^{(n)}}\Big)\Big]^{-1}$$

$$= \Big\{1 + \lambda + \sum_{i=2}^{n}\frac{A_{nk}(c_{n,i} - c_{n-1,i}) + c_{n,i}}{[A_{nk}(c_{n,1} - c_{n-1,1}) + c_{n,1}]^i}\lambda^i\Big\}^{-1} \tag{32}$$

对复平面上任一有限区域 Λ, 令 $R = \sup\limits_{\lambda\in\Lambda}(\lambda)$, 则

$$\Big|\mathcal{L}_{n+k}\Big(\frac{\lambda}{E_0\xi_k^{(n)}}\Big) - 1 - \lambda\Big| \leqslant \sum_{i=2}^{n}\Big|\frac{A_{nk}(c_{n,i} - c_{n-1,i}) + c_{n,i}}{[A_{nk}(c_{n,1} - c_{n-1,1}) + c_{n,1}]^i}R^i\Big|$$

$$\leqslant k\cdot R\cdot\sum_{i=2}^{n}\Big(\frac{R}{A_{nk}}\Big)^{i-1} \quad (k \text{ 为某常数}) \tag{33}$$

但由 (33),§1(7) 及假设 $Z = \infty$, 得

$$\lim_{k\to\infty} A_{nk} = \Big[Z - 1 - \frac{a_1}{b_1} - \cdots - \frac{a_1\cdots a_{n-1}}{b_1\cdots b_{n-1}}\Big]\frac{b_1\cdots b_{n-1}}{a_1\cdots a_{n-1}} = \infty$$

故当 k 充分大以后，(33) 右方小于任意小的正数 ε,, 这得证对 $\lambda\in\Lambda$, 均匀地有

$$\lim_{k\to\infty}E_0\exp\Big(-\lambda\frac{\xi_k^{(n)}}{E_0\xi_k^{(n)}}\Big)=1+\lambda$$

这等价于 (29). □

注 如果 $Z<\infty$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}A_{nk}=A<\infty$. 在 (32) 中令 $k\to\infty$ 后，右方括号中是 λ 的 n 次多项式，如果它有 n 个互异的负根，那么它对应的极限分布密度仍类似于 (7). 注意，§2 例 1 及例 2 均是本定理的特殊情形.

§16.4 向下的积分型随机泛函

(一) 继承上节的记号. 考虑过程 X 的首达状态 0 的时刻 $\eta_0(\omega)$,, 在生灭过程的实际应用中也称 η_0 为 **灭绝时刻**, 我们来研究

$$\xi(\omega)=\int_0^{\eta_0(\omega)}V[x(t,\omega)]\,dt\quad(V(i)\geqslant 0)\tag{1}$$

的分布函数

$$F_k(x)=P_k(\xi\leqslant x)\tag{2}$$

为此，取它的 Laplace 变换 [1]

$$\varphi_k(\lambda)=E_ke^{-\lambda\xi}=\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dF_k(x)\tag{3}$$

像前节一样，研究的方法仍有差分方程法与递推法两种，与上节大同小异，因此我们这里的叙述从简，只着重于不同之处.

注意，如果 $V(i)\equiv 1$, 那么 $\xi(\omega)$ 化为灭绝时刻 $\eta_0(\omega)$, 而 $F_k(x)$ 则化为灭绝时刻的分布函数. 因此，自然称 (1) 中 $\xi(\omega)$ 为 V- 灭绝时间，于是灭绝时间重合于 1- 灭绝时间.

定理 1 $\varphi_k(\lambda)$ 满足差分方程组

$$a_k\varphi_{k-1}(\lambda)-c_k\varphi_k(\lambda)+b_k\varphi_{k+1}(\lambda)-\lambda V(k)\varphi_k(\lambda)=0\quad(k>0)\tag{4}$$

$$\varphi_0(\lambda)=1\tag{5}$$

证 在 §2 基本引理中取 $A=\{0\}$, 即得 (4),(5). □

要求 (4),(5) 的解，还必须预先求出一个 $\varphi_i(\lambda)$ $(i\neq 0)$, 当然，能求出 $\varphi_1(\lambda)$ 更好，但这是比较困难的. 我们在下面两种特殊情况下可以给出完满的解答.

(二) 第一种情况是：设 $V(i)\equiv 1$, 这也是应用中特别重要的情况. 以 τ_k 表第 k 个 0- 区间 (见 §14.1(一)) 的长，以 γ_k 表第 k 次离开 0(因而来到 1) 起，首次回到 0 所需的时间. 令

$$E_1=(\tau_1\geqslant t)$$

[1] 如果要采用上节的记号，下式中的 $\varphi_k(\lambda)$ 应记为 $\varphi_{k0}(\lambda)$ 但因本节中状态 0 始终固定，故简写 $\varphi_{k0}(\lambda)$ 为 $\varphi_k(\lambda)$. 同理，后面的 $m_k^{(l)}$ 也是 $m_{k0}^{(l)}$ 的简写.

$$E_n = \left(\sum_{k=1}^{n}(\tau_k+\gamma_k) \leqslant t < \sum_{k=1}^{n}(\tau_k+\gamma_k)+\tau_{n+1}\right)$$

显然转移概率 $p_{00}(t)$ 满足

$$p_{00}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_0(E_n) \tag{6}$$

$P_0(E_1)=e^{-b_0t}$. 为求 $P_0(E_n)$ $(n\geqslant 1)$, 注意 τ_k, γ_k 独立, $\tau_k(k=1,2,\cdots)$ 独立同分布，又 $\tau_k+\gamma_k$ $(k=1,2,\cdots)$ 也独立同分布，故

$$P_0(E_n)=\int_0^t e^{-b_0(t-x)}dF^{(n)}(x) \tag{7}$$

其中 $F^{(1)}(x)=\int_0^x e^{-b_0(x-s)}dF_{10}(s)$, $F_{10}(s)$ 是自 1 出发，首次回到 0 的时间不大于 s 的概率，而 $F^{(n)}(x)$ 是 $F^{(1)}(x)$ 的 n 次卷积，亦即是 $\sum\limits_{k=1}^{n}(\tau_k+\gamma_k)$ 的分布函数. 于是由 (6),(7) 得

$$p_{00}(t)=e^{-b_0t}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t e^{-b_0(t-x)}dF^{(n)}(x)$$

在此式两边取 Laplace 变换，令 $p_0(\lambda)=\int_0^\infty p_{00}(t)e^{-\lambda t}dt$, 得

$$p_0(\lambda)=\frac{1}{b_0+\lambda}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_0+\lambda}\left(\frac{b_0}{b_0+\lambda}\right)^n\varphi_1^n(\lambda)=\frac{1}{\lambda+b_0[1-\varphi_1(\lambda)]}$$

从而

$$\varphi_1(\lambda)=\frac{b_0+\lambda}{b_0}-\frac{1}{b_0p_0(\lambda)} \tag{8}$$

总结以上所述，得

定理 2 当 $V(i)\equiv 1$ 时， (4),(5),(8) 给出灭绝时间 η_0 的分布的 Laplace 变换 $\varphi_k(\lambda)$ $(k\geqslant 0)$.

注意 (8) 中 $\varphi_1(\lambda)$ 依赖于 $p_{00}(t)$, 当且仅当 $R=\infty$ 时， $p_{00}(t)$ 才由 a_i,b_i 唯一决定，见 §13.3(42),(41) 或 (40), 此时 $p_{00}(t)=f_{00}(t)$ 即最小解.

(三) 另一情况是：将过程 X 稍加改造，使状态 N 成为反射的， $(N>0)$; 即设系统到达 N 后，以概率 1 回到 $N-1$, 而且逗留于 N 的平均时间为 $\frac{1}{c_N}$. 换言之，我们以另一状态数为 $N+1$ 的生灭过程 $X'=\{X'(t,\omega),t\geqslant 0\}$ 代替原过程 X, X' 的密度矩阵 Q_N 由 §1(16) 定义. 当质点在到达 N 以前，二过程的概率法则是相同的，因此 (5) 及 (4) 当 $0<k<N$ 时对 X' 也成立. 于是我们共有 N 个方程，为了要决定 $N+1$ 个未知函数 ${}_N\varphi_k(\lambda)$, $(0\leqslant k\leqslant N)$, (${}_N\varphi_k(\lambda)$ 对 X' 定义，就像 $\varphi_k(\lambda)$ 对 X 定义一样), 还要给出另一方程. 考虑 [1]

$$\begin{aligned}{}_N\varphi_N(\lambda)&=E_Ne^{-\lambda\int_0^{\eta_0'}V(x_t')dt}=E_Ne^{-\lambda\int_0^{\tau_1}V(x_t')dt-\lambda\int_{\tau_1}^{\eta_0'}V(x_t')dt}\\&=E_Ne^{-\lambda V(N)\tau_1}\cdot E_{N-1}e^{-\lambda\int_0^{\eta_0'}V(x_t')dt}=\frac{c_N}{\lambda V(N)+c_N}{}_N\varphi_{N-1}(\lambda)\end{aligned}$$

[1] 下面 η_0' 表 X' 的首达 0 的时刻.

由此得出另一方程

$$c_{NN}\varphi_{N-1}(\lambda)-(c_N+\lambda V(N))\cdot {}_N\varphi_N(\lambda)=0 \tag{9}$$

总之，(9) 连同 (5) 及满足 $0<k<N$ 的 (4)(在其中以 ${}_N\varphi_k(\lambda)$ 代替 $\varphi_k(\lambda)$) 唯一决定 ${}_N\varphi_k(\lambda)$ $(0\leqslant k\leqslant N)$.

我们指出：由于对 X', N 是反射状态，而且所研究的随机积分上限是首达 0 的时刻 η_0; 这种情况恰与 §2(一),(二) 段中的情况相对称，因为那里对 X, 0 是反射状态，而所研究的随机积分上限是首达 n 的时刻 η_n. 因此二者的结果也应该是对称的. 下面便将这一思想具体化.

用解线性代数方程的熟知方法解 (9) 及满足 $0<k<N$ 的 (4), 得

$$ {}_N\varphi_k(\lambda)=\Delta_N^{(k)}(\lambda)/\Delta_N(\lambda)\quad (k=1,2,\cdots,N)$$

其中

$$\Delta_N(\lambda)=\begin{vmatrix} D_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ a_2 & D_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_3 & D_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-1} & D_{N-1} & b_{N-1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_N & D_N \end{vmatrix} \tag{10}$$

$D_i=-(\lambda V(i)+c_i)$, 又 $\Delta_N^{(k)}(\lambda)$ 是以列向量 $\begin{pmatrix}-a_1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$ 代替 $\Delta_N(\lambda)$ 中第 k 列所得的行列式.

试求各级矩. 令 ${}_Nm_k^{(l)}=E_k\left[\int_0^{\eta_0'}V(x_t')\,dt\right]^l$, l 为正整数. 将 (9),(5) $(0<k<N)$ 对 λ 微分 l 次，令 $\lambda=0$, 再乘以 $(-1)^l$, 以 ${}_Nm_k^{(l)}=(-1)^l{}_N\varphi_k^{(l)}(0)$ 代入后，即得

$$\left.\begin{aligned} &a_km_{k-1}^{(l)}-c_km_k^{(l)}+b_km_{k+1}^{(l)}+lV(k)m_{kn}^{(l-1)}=0\quad(0<k<N)\\ &c_Nm_{N-1}^{(l)}-c_Nm_N^{(l)}+lV(N)m_N^{(l-1)}=0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

其中 $m_k^{(l)}={}_Nm_k^{(l)}$. 由于 $m_0^{(l)}=0$, 我们得

$$ {}_Nm_k^{(l)}=\frac{\widetilde{\Delta}_N^{(k)}(0)}{\Delta_N(0)}\quad(0<k\leqslant N) \tag{12}$$

其中 $\widetilde{\Delta}_N^{(k)}(0)$ 是以列向量 $-l\begin{pmatrix}V(1)m_1^{(l-1)}\\V(2)m_2^{(l-1)}\\ \vdots\\V(N)m_N^{(l-1)}\end{pmatrix}$ 代替 $\Delta_N(0)$ 中第 k 列后所得行列式. 展开 (12) 中二行列式，便得

$$ {}_Nm_k^{(l)}=\sum_{i=1}^{k}{}_N\varepsilon_i^{(l)} \tag{13}$$

$$
{}_N\varepsilon_i^{(l)} = \frac{lV(i)_N m_i^{(l-1)}}{a_i} + \sum_{k=0}^{N-2-i} \frac{b_i b_{i+1}\cdots b_{i+k} lV(i+k+1)\cdot {}_N m_{i+k+1}^{(l-1)}}{a_i a_{i+1}\cdots a_{i+k} a_{i+k+1}}
$$

$$
+ \frac{b_i b_{i+1}\cdots b_{N-1} lV(N)\cdot {}_N m_N^{(l-1)}}{a_i a_{i+1}\cdots a_{N-1} c_N} \tag{14}
$$

因此，高级矩可通过低级矩表示：${}_N m_k^{(0)} = 1, (k > 0)$.

特别，如 $V(i) \equiv 1, l = 1$, 则 ${}_N\varepsilon_i^{(1)}$ 化为 §1(19) 中的 $e_i^{(N)}$.

我们最感兴趣的，自然是当反射壁 $N \to \infty$ 时的情况．由 (13)(14) 直接可以看出，存在极限

$$
{}_\infty m_k^{(l)} \equiv \lim_{N\to\infty} {}_N m_k^{(l)} = \sum_{i=1}^{k} {}_\infty\varepsilon_i^{(l)} \tag{15}
$$

$$
{}_\infty\varepsilon_i^{(l)} \equiv \lim_{N\to\infty} {}_N\varepsilon_i^{(l)} = \frac{lV(i)\cdot {}_\infty m_i^{(l-1)}}{a_i}
$$

$$
+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_i b_{i+1}\cdots b_{i+k} lV(i+k+1)\cdot {}_\infty m_{i+k+1}^{(l-1)}}{a_i a_{i+1}\cdots a_{i+k} a_{i+k+1}} \tag{16}
$$

直观上，可把 ${}_\infty m_k^{(l)}$ 解释为：自 k 出发而且当虚状态 ∞ 为“反射壁”时，$\int_0^{\eta_0} V[x(t,\omega)]\,dt$ 的 l 级矩．当然，(16) 中的级数可能发散．特别，当 $V(i) \equiv 1$ 时，${}_\infty\varepsilon_i^{(1)}$ 重合于 §1(5) 中的 e_i, 又 $\lim\limits_{k\to\infty} {}_\infty m_k^{(1)}$ 重合于 §1(6) 中的 S.

令 $m_k^{(l)} = E_k\left(\int_0^{\eta_0} V[x(t,\omega)]\,dt\right)^l$. 注意，一般地 $m_k^{(l)}$ 并不等于 ${}_\infty m_k^{(l)}$, 因为前者的定义中不需要“∞ 为反射壁”的假定．直观地猜想，如果自 k 出发的质点无需到达 ∞(因而不管 ∞ 是否“反射壁”) 就来到 0, 那么 $m_k^{(l)}$ 会等于 ${}_\infty m_k^{(l)}$. 这一想法的精确化是下定理：

定理 3 设 $Z = \infty$, 则

$$
\varphi_k(\lambda) = \lim_{N\to\infty} {}_N\varphi_k(\lambda); \quad m_k^{(l)} = {}_\infty m_k^{(l)} \tag{17}
$$

这里 $\varphi_k(\lambda)$ 由 (3) 定义，又 Z 的定义见 §5.1(7).

证 如 $Z = \infty$, 则由 §1 (25), $q_k(0) = 1$, 即对过程 $X = \{x(t,\omega), t \geqslant 0\}$, 自 k 出发，经有限多次跳跃来到 0 的概率为 1. 因此，如以 $M(= M(\omega))$ 表自 k 出发，在来到 0 以前所历经的状态中的最大者，则 $P_k(M < \infty) = 1$. 其次，注意过程 $X' = \{X'(t,\omega), t \geqslant 0\}$ 依赖于 N, 而且在到达 N 以前，X' 与 X 的样本函数重合，即 $x(t,\omega) = x'(t,\omega)$, $t \leqslant \eta_N(\omega)$, 现在任取 $\omega \in (M < \infty)$, 并设 $M(\omega) = n$, $n < N$, 则对此 ω, $\eta_0 < \eta_N(\omega)$, 从而

$$
\int_0^{\eta_0(\omega)} V[x_t'(\omega)]\,dt = \int_0^{\eta_0(\omega)} V[x_t(\omega)]\,dt, \quad \text{一切 } N > n
$$

因此，当 $N \uparrow \infty$ 时

$$
P\left(\int_0^{\eta_0} V[x_t']dt \uparrow \int_0^{\eta_0} V[x_t]dt\right) = P(M < \infty) = 1
$$

于是

$$
{}_N\varphi_k(\lambda) \uparrow \varphi_k(\lambda); \quad {}_N m_k^{(l)} \downarrow m_k^{(l)} \ \square
$$

简写 $m^{(l)}=\lim\limits_{k\to\infty}{}_\infty m_k^{(l)}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}{}_\infty\varepsilon_i^{(l)}$. 完全仿照 §2 定理 3 的证明，我们有

$$m^{(l)}\leqslant l!(m^{(1)})^l$$

因此，一切 $m^{(l)}$ $(l=1,2,\cdots)$, 或者同时都有穷，或者同时都无穷.

(四) 现在用递推法以求 $\varphi_k(\lambda)$. 令

$$g_k(\lambda)=E_k\exp\left[-\lambda\int_0^{\eta_{k-1}}V(x_t)dt\right] \tag{18}$$

与推导 §2 中 (39) 式类似，我们有

$$\varphi_k(\lambda)=g_1(\lambda)g_2(\lambda)\cdots g_k(\lambda) \tag{19}$$

注意，在推导 (19) 式时，需要利用下列事实：自 k 到达 0 必须以概率 1 顺次经过 $k-1,k-2,\cdots,1$, 这在 $R=\infty$ 的条件下是成立的 [1] (如果 $R<\infty$, 则每个飞跃点以概率 1 有穷，因而自 k 出发，可以以正的概率，不通过上列方式而经过首次飞跃直接到达 0, 例如 Doob 过程就可以如此). 仿照 §2 (40), 得

$$g_k(\lambda)=\frac{a_k}{\lambda V(\lambda)+c_k}+\frac{b_k}{\lambda V(\lambda)+c_k}g_{k+1}(\lambda)g_k(\lambda)$$

亦即

$$g_{k+1}(\lambda)=\frac{\lambda V(\lambda)+c_k}{b_k}-\frac{a_k}{b_kg_k(\lambda)}\quad(k>0) \tag{20}$$

因此，如能求出 $g_1(\lambda)$, 则 (19),(20) 给出在 $R=\infty$ 时问题的完全解. 特别，当 $V(i)\equiv1$ 时，$g_1(\lambda)=\varphi_1(\lambda)$ 由 (8) 给定.

(五) 以上结果可以用来研究与回转时间有关的问题. 以 $\delta_k(\equiv\delta_k(\omega))$ 表自来到 k 的时刻算起，离开 k 后，首次回到 k 的时间，并称 δ_k 为 k 的 **回转时间**. 令 [2]

$$\psi_k(\lambda)=E_k\exp\left(-\lambda\int_0^{\delta_k}V(x_t)dt\right) \tag{21}$$

并称 $\int_0^{\delta_k}V(x_t)dt$ 为 V- 回转时间. 仿照 §2 基本引理的证明，易见

$$\psi_k(\lambda)=\frac{a_k}{\lambda V(k)+c_k}h_{k-1}(\lambda)+\frac{b_k}{\lambda V(k)+c_k}g_{k+1}(\lambda) \tag{22}$$

其中 $h_{k-1}(\lambda)$, $g_k(\lambda)$ 的定义分别见 §2(38) 及本节 (18).

记 $n_k^{(l)}=E_k\Big(\int_0^{\delta_k}V(x_t)\,dt\Big)^l$, 它可由微分 $\psi_k(\lambda)$ l 次而求得，也可用下法. 设 $m_{k+1\,k}^{(l)}<\infty$,

[1] 如果 $R<\infty$, 那么当 $X=\{x_t(\omega)\}$ 为最小过程时，(19) 仍成立.

[2] $\psi_k(\lambda)$ 不等于以上定义的 $\varphi_{kk}(\lambda)$, 后者由定义等于 1. 同理，下面的 $n_k^{(l)}$ 也不等于 $m_{kk}^{(l)}$, 后者按定义等于 0.

简记 $\beta = \tau_1$, 则 [1]

$$\begin{aligned} n_k^{(l)} &= E_k\left(\int_0^\beta V(x_t)dt + \int_\beta^{\delta_k} V(x_t)dt\right)^l \\ &= E_k\left[\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}(V(k)\beta)^i\left(\int_\beta^{\delta_k} V(x_t)dt\right)^{l-i}\right] \\ &= \sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}E_k(V(k)\beta)^i \cdot E_k\left(\int_\beta^{\delta_k} V(x_t)dt\right)^{l-i} \end{aligned}$$

由于

$$E_k(\beta)^i = \int_0^\infty t^i c_k e^{-c_k t}dt = \frac{i!}{c_k^i}$$

$$E_k\left(\int_\beta^{\delta_k} V(x_t)dt\right)^l = \frac{a_k}{c_k}\cdot E_{k-1}\left(\int_0^{\eta_k} V(x_t)dt\right)^l + \frac{b_k}{c_k}\cdot E_{k+1}\left(\int_0^{\eta_k} V(x_t)dt\right)^l$$

故 [2]

$$n_k^{(l)} = \sum_{i=0}^{l}\frac{l![V(k)]^i}{(l-i)!c_k^i}\left[\frac{a_k}{c_k}m_{k-1\,k}^{(l-i)} + \frac{b_k}{c_k}m_{k+1\,k}^{(l-i)}\right] \tag{23}$$

特别, 当 $l = 1$ 时 (我们略去上标 1) 有

$$n_k = \frac{a_k}{c_k}m_{k-1\,k} + \frac{b_k}{c_k}m_{k+1\,k} + \frac{V(k)}{c_k} \tag{23'}$$

根据 §2(25)

$$m_{k-1\,k} = G_{k-1} = \frac{V(k-1)}{b_{k-1}} + \sum_{j=0}^{k-2}\frac{a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_{k-1-j}V(k-2-j)}{b_{k-1}b_{k-2}\cdots b_{k-1-j}b_{k-2-j}} \tag{24}$$

如果 $Z = \infty$, 则由定理 3 及 (15),(16); 得

$$m_{k+1\,k} = {}_\infty\varepsilon_{k+1} = \frac{V(k+1)}{a_{k+1}} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{b_{k+1}b_{k+2}\cdots b_{k+1+j}V(k+2+j)}{a_{k+1}a_{k+2}\cdots a_{k+1+j}a_{k+2+j}} \tag{25}$$

例 1 取 $V(i) \equiv 1$, 于是 $\int_0^{\delta_k} V(x_t)\,dt = \delta_k$, 而 $\psi_k(\lambda)$ 化为 k 的回转时间 δ_k 的分布的 Laplace 变换. 由 (22)

$$\psi_k(\lambda) = \frac{a_k}{\lambda + c_k}h_{k-1}(\lambda) + \frac{b_k}{\lambda + c_k}g_{k+1}(\lambda) \tag{26}$$

根据 §2(40),(41) 及本节 (20),(8), 得

$$\left.\begin{aligned} h_{k-1}(\lambda) &= b_{k-1}[\lambda + c_{k-1} - a_{k-1}b_{k-2}(\lambda)]^{-1} \\ h_0(\lambda) &= b_0[\lambda + b_0]^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

[1] β 与 $\int_\beta^{\delta_k} V(x_t)dt$ 关于 P_k 相互独立, 这由 Chung, K. L., [1] II §15 定理 2 推出.

[2] 下式中如 $V(k) = 0$, 应理解 $0^0 = 1$. 又 $a_0 = 0$.

$$\left.\begin{aligned} g_{k+1}(\lambda) &= \frac{\lambda + c_k}{b_k} - \frac{a_k}{b_k g_k(\lambda)} \\ g_1(\lambda) &= \frac{\lambda + b_0}{b_0} - \frac{1}{b_0 p_0(\lambda)} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

特别，

$$\psi_0(\lambda) = 1 - \frac{1}{(\lambda + b_0)p_0(\lambda)} \tag{29}$$

$$\psi_1(\lambda) = \frac{a_1 b_0}{(\lambda + c_1)(\lambda + b_0)} + 1 - \frac{a_1}{(\lambda + c_1) g_1(\lambda)} \tag{30}$$

设 $Z = \infty$, 现在来求 k 的平均回转时间 $n_k = E_k(\delta_k)$. 我们来证明

$$n_k = \begin{cases} \dfrac{a_1 a_2 \cdots a_k}{b_0 b_1 \cdots b_{k-1} c_k}(1 + b_0 e_1) & k > 0 \\ \dfrac{1}{b_0} + e_1, & k = 0 \end{cases} \tag{31}$$

e_1 的定义见 §1(5).

实际上，在 (23') 中取 $V(k) \equiv 1$, 得

$$n_k = \frac{a_k}{c_k} m_{k-1\,k} + \frac{b_k}{c_k} m_{k+1\,k} + \frac{1}{c_k} \tag{32}$$

以 (24),(25) 代入后有

$$c_k n_k = 1 + a_k \left[\frac{1}{b_{k-1}} + \sum_{l=0}^{k-2} \frac{a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_{k-1-l}}{b_{k-1} b_{k-2} \cdots b_{k-1-l} b_{k-2-l}} \right] + b_k e_{k+1} \tag{33}$$

另方面，由 e_i 的定义 (§1(5)). 可见

$$e_i = \frac{1}{a_i} + \frac{b_i}{a_i} e_{i+1} \quad (i > 0) \tag{34}$$

反复利用此式，

$$\frac{a_1 a_2 \cdots a_k}{b_0 b_1 \cdots b_{k-1}}(1 + b_0 e_1) = \frac{a_1 a_2 \cdots a_k}{b_0 b_1 \cdots b_{k-1}} \left[1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{b_0 b_1 \cdots b_{j-1}}{a_1 a_2 \cdots a_j} + \frac{b_0 b_1 \cdots b_k}{a_1 a_2 \cdots a_k} e_{k+1} \right] \quad (k > 0)$$

此式右方与 (33) 右方一致，故二者左方也相等而得证 (31) 对 $k > 0$ 正确. 设 $k = 0$, 则因 $a_0 = 0$, $b_0 = c_1$ 而 (32) 化为 (31) 中第二个等式.

例 2 设 $Z = \infty$. 试求自 k 出发在首次回到 k 以前在状态 0 的平均时间 n_k. 如 $k = 0$, 显然 $n_0 = \frac{1}{b_0}$. 下设 $k > 0$. 取 $V(0) = 1$, $V(k) = 0$ $(k > 0)$. 由 (23'),(24),(25)

$$n_k = \frac{a_k}{c_k} m_{k-1\,k} + \frac{b_k}{c_k} m_{k+1\,k}$$

$$m_{k-1\,k} = \frac{a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_1}{b_{k-1} b_{k-2} \cdots b_0}, \quad m_{k+1\,k} = 0$$

故

$$n_k = \frac{a_k a_{k-1}\cdots a_1}{c_k b_{k-1}\cdots b_0} \quad (k>0)$$

§16.5　几类 Колмогоров 方程的解与平稳分布

(一)　设已给矩阵 Q, 满足 §1 中 (1),(2). 对此 Q 写出向后方程组

$$\left.\begin{aligned} p'_{ij}(t) &= -(a_i+b_i)p_{ij}(t)+b_i p_{i+1,j}(t)+a_i p_{i-1,j}(t) \quad (i>0)\\ p'_{0j}(t) &= -b_0 p_{0j}(t)+b_0 p_{ij}(t) \qquad (t\geqslant 0,\ j=0,1,2,\cdots) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

及向前方程组

$$\left.\begin{aligned} p'_{ij}(t) &= -(a_i+b_j)p_{ij}(t)+b_{j-1}p_{i,j-1}(t)+a_{j+1}p_{i,j+1}(t) \quad (j>0)\\ p'_{i0}(t) &= -b_0 p_{i0}(t)+a_1 p_{i1}(t) \qquad (t\geqslant 0,\ i=0,1,2,\cdots) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

我们希望在开始条件:

$$p_{ij}(0)=\delta_{ij} \tag{3}$$

下解此二方程组. 在 §13.3 中已知, 一般地有无穷多组解, 但如

$$R=\infty \tag{4}$$

(R 的定义见 §1(6)), 则由 §2 系 1, 方程组 (1) 或 (2) 各只有唯一的转移函数解, 而且 (1),(2) 的解相同.

在本节前三段中, 我们总设 (4) 满足, 因而只要在 (3) 下解此二组方程中的任何一组.

理论上, 这个问题已在 §13.3 中完全解决, 因为所求的唯一转移函数解就是最小解 $f_{ij}(t)$:

$$f_{ij}(t)=\sum_{n=0}^{\infty} {}_n p_{ij}(t) \tag{5}$$

这里 ${}_n p_{ij}(t)$ 由 §13.3(40) 或 (41) 以及 §1(2) 定义.

这个解答不十分使人满意的是 ${}_n p_{ij}(t)$ 必须通过递推方程定出, 实际的计算量是很大的. 因此我们希望找到 $f_{ij}(t)$ 的明显表式, 在一些特殊情形, 这愿望可以实现.

为确定计, 只考虑向前方程组 (2), 并对固定的 i 简写 $p_{ij}(t)$ 为 $p_j(t)$.

(二) **情形甲**　设 $a_j=a>0$, $b_j=b>0$. 这时 (4) 满足, 因为

$$R\geqslant \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{b_j}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{b}=\infty$$

方程组 (2) 化为

$$\left.\begin{aligned} p'_j(t) &= -(a+b)p_j(t)+bp_{j-1}(t)+ap_{j+1}(t)\\ p'_0(t) &= -bp_0(t)+ap_1(t) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

定义 $p_j(t)$ 的母函数

$$p(z,t)=\sum_{j=0}^{\infty} p_j(t)z^j \tag{7}$$

它在 $|z|<1$ 中收敛. 以 z^{j+1} 乘 (6) 中方程两边并对 j 求和，集项后得

$$z\frac{\partial P(z,t)}{\partial t}=(1-z)[(a-bz)P(z,t)-ap_0(t)] \tag{8}$$

由 (3) 得开始条件为

$$P(z,0)=z^i \tag{9}$$

以 $f^*(s)$ 表 $f(t)$ 的 Laplace 变换，即

$$f^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

由 (9) 得

$$\int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial P(z,t)}{\partial t}dt=e^{-st}P(z,t)\Big|_0^\infty+s\int_0^\infty e^{-st}P(z,t)dt=-z^i+sP^*(z,s) \tag{10}$$

现在对一级线性偏微分方程 (8) 两边取 Laplace 变换，并利用 (10) 即得

$$-z^{i+1}+szP^*(z,s)=(1-z)[(a-bz)P^*(z,s)-ap_0^*(s)]$$

故

$$P^*(z,s)=\frac{z^{i+1}-a(1-z)P_0^*(s)}{sz-(1-z)(a-bz)} \tag{11}$$

下面把 $P^*(z,s)$ 表为 z 的幂级数， z^n 的系数 $p_n^*(s)$ 是 $p_n(t)$ 的变换，因而取反 Laplace 变换后就求得 $p_n(t)(=p_{in}(t))$.

由于 $P^*(z,s)$ 在单位圆内及其上对 $\mathrm{Re}(s)>0$ 收敛，所以 (11) 中分母在那里的零点必须与分子的零点重合；但前者为

$$\alpha_k(s)=\frac{b+a+s\pm[(b+a+s)^2-4ab]^{1/2}}{2b},\ k=1,2 \tag{12}$$

$\alpha_k(s)$ 中的 s 有正实部 $\mathrm{Re}(s)>0$, $\alpha_1(s)$ 表示 (12) 中根号前取正号的根.

现在要用到复变函数论中的

Rouché 定理 [1] 设 $f(z)$ 及 $g(z)$ 都是在闭路 C 内及其上的解析函数，而且在 C 上 $|g(z)|<|f(z)|$, 则 $f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 在 C 内的零点个数相同.

今应用此定理于 (11) 右方的分母，令

$$f(z)=(a+b+s)z,\quad g(z)=-bz^2-a,\quad C=(z:\ |z|=1)$$

则定理条件满足，因而 $f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$(即分母) 有同样多个零点，即只有一个零点于 $|z|=1$ 内. 由于 $|\alpha_2(s)|<|\alpha_1(s)|$ 而且在 $|z|=1$ 上无零点，故分母在 $|z|=1$ 内的零点必为 $z=\alpha_2(s)$.

如上所述， (11) 中分子也以 $\alpha_2(s)$ 为零点，从而

$$p_0^*(s)=\frac{\alpha_2^{i+1}}{a(1-\alpha_2)}\quad(\alpha_k=\alpha_k(s),\ k=1,2) \tag{13}$$

---

[1]见 А. И. Маркушевич: Теория аналитических функции, 1950, 第四章， §3.5, 317 页.

以 (13) 代入 (11) 得

$$P^*(z,s)=\frac{z^{i+1}-[(1-z)\alpha_2^{i+1}/(1-\alpha_2)]}{-b(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}=\frac{(1-\alpha_2)z^{i+1}-(1-z)\alpha_2^{i+1}}{b\alpha_1(z-\alpha_2)(1-z/\alpha_1)(1-\alpha_2)}$$

$$=\frac{(z^{i+1}-\alpha_2^{i+1})-(\alpha_2 z^{i+1}-z\alpha_2^{i+1})}{b\alpha_1(z-\alpha_2)(1-z/\alpha_1)(1-\alpha_2)}$$

$$=\frac{(z-\alpha_2)(z^i+\alpha_2 z^{i-1}+\cdots+\alpha_2^i)-z\alpha_2(z-\alpha_2)(z^{i-1}+\alpha_2 z^{i-2}+\cdots+\alpha_2^{i-1})}{b\alpha_1(z-\alpha_2)(1-z/\alpha_1)(1-\alpha_2)} \tag{14}$$

消去公因子 $(z-\alpha_2)$, 减去并加上 α_2^{i+1}, 在分子中提出公因子 $1-\alpha_2$, 并注意 $(1-z/\alpha_1)^{-1}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(z/\alpha_1)^k$, 得

$$P^*(z,s)=\frac{(z^i+\alpha_2 z^{i-1}+\cdots+\alpha_2^i)-z\alpha_2(z^{i-1}+\alpha_2 z^{i-2}+\cdots+\alpha_2^{i-1})-\alpha_2^{i+1}+\alpha_2^{i+1}}{b\alpha_1(1-z/\alpha_1)(1-\alpha_2)}$$

$$=\frac{(z^i+\alpha_2 z^{i-1}+\cdots+\alpha_2^i)-\alpha_2(z^i+\alpha_2 z^{i-1}+\cdots+z\alpha_2^{i-1}+\alpha_2^i)+\alpha_2^{i+1}}{b\alpha_1(1-z/\alpha_1)(1-\alpha_2)}$$

$$=\frac{z^i+\alpha_2 z^{i-1}+\cdots+\alpha_2^i}{b\alpha_1(1-z/\alpha_1)}+\frac{\alpha_2^{i+1}}{b\alpha_1(1-z/\alpha_1)(1-\alpha_2)}$$

$$=\frac{1}{b\alpha_1}(z^i+\alpha_2 z^{i-1}+\cdots+\alpha_2^i)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\alpha_1}\right)^k+\frac{\alpha_2^{i+1}}{b\alpha_1(1-\alpha_2)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\alpha_1}\right)^k \tag{15}$$

其中用到 $\left|\frac{z}{\alpha_1}\right|<1$.

(15) 右方第二个 Σ 中， z^n 的系数为

$$\frac{\alpha_2^{i+1}}{b\alpha_1^{n+1}(1-\alpha_2)}=\frac{\alpha_2^{i+1}}{b\alpha_1^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_2^k\right)=\frac{\alpha_2^{i+1}}{b}\left(\frac{b\alpha_2}{a}\right)^{n+1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_2^k\right)$$

$$=\frac{1}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\cdot\sum_{k=n+i+2}^{\infty}\alpha_2^k=\frac{1}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\cdot\sum_{k=n+i+2}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^k\frac{1}{\alpha_1^k} \tag{16}$$

其中用到 $|\alpha_2|<1$ 及根与系数的关系 $\alpha_1\alpha_2=\frac{a}{b}$.

另方面，由 (7) 得 $P^*(z,s)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_n^*(s)z^n$. 与 (15) 比较 z^n 的系数，并利用 (16), 得知当 $n\geqslant i$ 时

$$P_n^*(s)=\frac{1}{b}\left[\frac{1}{\alpha_1^{n-i+1}}+\frac{a/b}{\alpha_1^{n-i+3}}+\frac{(a/b)^2}{\alpha_1^{n-i+5}}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{(a/b)^i}{\alpha_1^{n+i+1}}+\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\sum_{k=n+i+2}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^k\frac{1}{\alpha_1^k}\right] \tag{17}$$

今求 $p_n^*(s)$ 的反 Laplace 变换 $p_n(t)$

$$p_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{st}p_n^*(s)ds$$

为此，利用 Laplace 变换中下列三事实：

1° 如 $f(t)$ 的变换是 $f^*(s)$, 则 $e^{-at}f(t)$ 的变换为 $f^*(s+a)$;

2° 可在 (17) 右方逐项取反变换;

3° 回忆 $\alpha_1(s)$ 的表达式 (12), 并注意 $[(s+\sqrt{s^2-4ab}/2b]^{-v}$ 是 $v\left(\sqrt{b/a}\right)^v t^{-1}I_v(2\sqrt{ab}t)$ 的 Laplace 变换, 其中 $I_v(z)$ 是修正后的第一类 Bessel 函数:

$$I_v(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{v+2k}}{k!(v+k)!} \tag{18}$$

它满足关系式

$$2vI_v(z)=z[I_{v-1}(z)-I_{v+1}(z)] \tag{19}$$

$$I_{-v}(z)=I_v(z) \tag{20}$$

于是

$$\begin{aligned}p_n(t)=\frac{e^{-(a+b)t}}{b}\Bigg[&\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{n-i+1}(n-i+1)t^{-1}I_{n-i+1}(2\sqrt{ab}t)\\&+\frac{a}{b}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{n-i+3}(n-i+3)t^{-1}I_{n-i+3}(2\sqrt{ab}t)+\cdots\\&+\left(\frac{a}{b}\right)^{i}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{n+i+1}(n+i+1)t^{-1}I_{n+i+1}(2\sqrt{ab}t)\\&+\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}\sum_{k=n+i+2}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{k}kt^{-1}I_k(2\sqrt{ab}t)\Bigg]\end{aligned}$$

利用公式 (19) 后, 得

$$\begin{aligned}p_n(t)=\frac{e^{-(a+b)t}}{b}\Bigg\{&\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{n-i+1}\sqrt{ab}[I_{n-i}(2\sqrt{ab}t)-I_{n-i+2}(2\sqrt{ab}t)]\\&+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{n-i+1}\sqrt{ab}[I_{n-i+2}(2\sqrt{ab}t)-I_{n-i+4}(2\sqrt{ab}t)]+\cdots\\&+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{n-i+1}\sqrt{ab}[I_{n+i}(2\sqrt{ab}t)-I_{n+i+2}(2\sqrt{ab}t)]\\&+\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\sum_{k=n+i+2}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{k}\sqrt{ab}[I_{k-1}(2\sqrt{ab}t)-I_{k+1}(2\sqrt{ab}t)]\Bigg\}\end{aligned} \tag{21}$$

然而

$$\begin{aligned}&\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\sum_{k=n+i+2}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{k}[I_{k-1}(2\sqrt{ab}t)-I_{k+1}(2\sqrt{ab}t)]\\&=\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\Bigg[\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{n+i+2}[I_{n+i+1}(2\sqrt{ab}t)+\sqrt{\frac{a}{b}}\sum_{k=n+i+2}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{k}I_k(2\sqrt{ab}t)\\&\quad+\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{n+i+1}I_{n+i+2}(2\sqrt{ab}t)-\sqrt{\frac{a}{b}}\sum_{k=n+i+2}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{k}I_k(2\sqrt{ab}t)]\end{aligned}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{n-i} I_{n+i+1}(2\sqrt{ab}t) + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{n-i+1} I_{n+i+2}(2\sqrt{ab}t)$$
$$+ \left(1-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^n \sqrt{\frac{b}{a}} \sum_{k=n+i+2}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^k I_k(2\sqrt{ab}t)$$

因此，(21) 中第一项中第二式与第二项中第一式相消，……，故对 $n \geqslant i$，最后得

$$p_n(t) = e^{-(a+b)t}\left[\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{i-n} I_{n-i}(2\sqrt{ab}t) + \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{i-n+1} I_{n+i+1}(2\sqrt{ab}t) + \cdots \right.$$
$$\left. + \left(1-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^n \sum_{k=n+i+2}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^k I_k(2\sqrt{ab}t)\right] \tag{22}$$

剩下要证明：对 $n < i$,(22) 仍正确．为此仍旧仿照上面的推理而用比较系数法，不过 (17) 式要换为

$$p_n^*(s) = \frac{1}{b\alpha_1}\left[\left(\frac{a}{b\alpha_1}\right)^{i-n} + \left(\frac{a}{b\alpha_1}\right)^{i-n+1}\frac{1}{\alpha_1} + \cdots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{a}{b\alpha_1}\right)^i \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^n\right] + \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} \sum_{k=n+i+2}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^k \frac{1}{\alpha_1^k}\Bigg] \tag{23}$$

以下的计算与上面相同，前后项仍然消去，因此，只要证在 $n < i$ 时，剩下的首项与 (22) 中首项重合．(23) 中首项 $\frac{1}{b\alpha_1}\left(\frac{b}{a\alpha_1}\right)^{i-n}$ 的反变换是

$$\frac{e^{-(a+b)t}}{b}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{i-n}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{i-n+1}(i-n+1)t^{-1} I_{i-n+1}(2\sqrt{ab}t)\right]$$
$$= \frac{e^{-(a+b)t}}{b}\left\{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{n-i+1}\sqrt{ab}[I_{i-n}(2\sqrt{ab}t) - I_{i-n+2}(2\sqrt{ab}t)]\right\}$$

利用 (20)，并回忆上面所说的第二项消去，可见首项与 (22) 的首项相同．这样便证明了

定理 1 当 $a_j = a > 0\ (j > 0)$; $b_j = b > 0\ (j \geqslant 0)$ 时，方程组 (2) (或 (1)) 在开始条件 (3) 下有唯一转移函数解 (p_{ij}), $p_{in}(t)$ 由 (22) 右方给出．

(三) 情形乙 设 $a_j = ja > 0$, $b_j = b > 0$. 这时 $R = \infty$, 向前方程组化为

$$\left.\begin{aligned} p_j'(t) &= -(ja+b)p_j(t) + bp_{j-1}(t) + (j+1)ap_{j+1}(t) \\ p_0'(t) &= -bp_0(t) + ap_1(t) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

考虑母函数 (7)，有

$$\frac{\partial P(z,t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^{\infty} p_j'(t) z^j$$
$$= -bp_0(t)(1-z) + ap_1(t)(1-z) - bp_1(t)(1-z)z + 2ap_2(t)z(1-z) + \cdots$$
$$= -b(1-z)\sum_{j=0}^{\infty} p_j(t) z^j + a(1-z)\sum_{j=1}^{\infty} jp_j(t) z^{j-1}$$
$$= -b(1-z)P(z,t) + a(1-z)\frac{\partial P(z,t)}{\partial z}$$

因而得证母函数满足偏微分方程

$$\frac{\partial P}{\partial t}-(1-z)a\frac{\partial P}{\partial z}=-b(1-z)P \qquad (P=P(z,t))$$

现在用通常的方法来解此一级线性偏微分方程. 考虑联系于上方程的拉格朗日方程

$$\frac{dt}{1}=\frac{dz}{-(1-z)a}=\frac{dP}{-b(1-z)P}$$

由第一、第二项所成的方程解得

$$(1-z)e^{-at}=c_1$$

由第二、第三项所成的方程解得

$$Pe^{-(b/a)z}=c_2$$

因而通解是

$$P=e^{(b/a)z}g[(1-z)e^{-at}] \tag{25}$$

现在利用开始条件 $P(z,0)=z^i$ 来定函数 g.. 在上式中令 $t=0$ 得

$$z^i=e^{(b/a)z}g(1-z)$$

令 $y=1-z$ 得

$$g(y)=e^{-(b/a)(1-y)}(1-y)^i$$

以此式代入 (25), 化简后得

$$P(z,t)=[1-(1-z)e^{-at}]^i\exp\left[-\frac{b}{a}(1-z)(1-e^{-at})\right] \tag{26}$$

现在来求 $p_n(t)=p_{in}(t)$. 为此注意下列三点:

i. 设 ξ 是具有二项分布的随机变量,

$$P(\xi=k)=\binom{i}{k}p^k(1-p)^{i-k}, \quad (k=0,1,\cdots,i),$$

p 为参数, 则 ξ 的母函数为

$$\begin{aligned}f(z)&=\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}(pz)^k(1-p)^{i-k}\\&=(pz+q)^i, \quad (q=1-p)\end{aligned}$$

ii. 设 η 是具有 Poisson 分布的随机变量, $P(\eta=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ $(k=0,1,2,\cdots)$, λ 为参数, 则 η 的母函数为

$$h(z)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{(\lambda z)^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda z}=e^{-\lambda(1-z)}$$

iii. 如 ξ,η 独立, 则 $\xi+\eta$ 的母函数是 $f(z)h(z)$.

由此可见，(26) 右方第一因子是参数为 e^{-at} 的二项分布随机变量 ξ 的母函数，第二因子是参数为 $\frac{b}{a}(1-e^{-at})$ 的 Poisson 分布随机变量 η 的母函数，故 $P(z,t)$ 可视为独立随机变量 ξ 与 η 的和 $\xi+\eta$ 的母函数，从而

$$\begin{aligned}p_n(t) &= P(\xi+\eta=n)\\ &= \exp\Big[-\frac{b}{a}(1-e^{-at})\Big]\sum_{k=0}^{\min(i,n)}\binom{i}{k}\Big(\frac{b}{a}\Big)^{n-k}\cdot\frac{e^{-atk}(1-e^{-at})^{i+n-2k}}{(n-k)!}\end{aligned}\tag{27}$$

特别，当 $i=0$ 时，

$$p_{0n}(t)=\exp\Big[-\frac{b}{a}(1-e^{-at})\Big]\Big[\frac{b}{a}(1-e^{-at})\Big]^n\Big/n!\tag{28}$$

于是得证

定理 2 设 $a_j=ja>0,\ b_j=b>0\ (j\geqslant 0)$，则方程组 (2)(或 (1)) 在开始条件 (3) 下有唯一转移函数解 (p_{ij})，$p_{in}(t)$ 由 (27) 右方给出.

(四) 情形丙 (线性生长) $a_j=ja>0,\ b_j=jb>0$. 这时 $R=\infty$. 象上面同样计算，可见母函数

$$P(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(t)z^n,\quad P(z,0)=z^i\qquad (p_n(t)=p_{in}(t))$$

满足 $\frac{\partial P}{\partial t}=(z-1)(bz-a)\frac{\partial P}{\partial z}$; 解之得

$$P(z,t)=\left\{\frac{a[1-e^{(b-a)t}]-z[b-ae^{(b-a)t}]}{a-be^{(b-a)t}-bz[1-e^{(b-a)t}]}\right\}^i$$

特别，当 $i=1$ 时，有

$$p_n(t)=[1-p_0(t)]\Big[1-\frac{b-be^{(b-a)t}}{a-be^{(b-a)t}}\Big]\cdot\Big[\frac{b-be^{(b-a)t}}{a-be^{(b-a)t}}\Big]^{n-1}\quad n\geqslant 1$$

$$p_0(t)=\frac{ae^{(b-a)t}}{be^{(b-a)t}-a}$$

(五) 现在来研究一类与生灭过程关系紧密的过程 - 纯生过程. 称齐次、具有标准转移矩阵 (p_{ij}) 的马氏过程 $\{x_t,t\geqslant 0\}$ 为 **纯生过程**, 如果 $E=(0,1,2,\cdots)$ 而且密度矩阵 Q 为

$$\begin{pmatrix}-b_0 & b_0 & & & 0\\ & -b_1 & b_1 & & \\ & & -b_2 & b_2 & \\ 0 & & & \ddots & \ddots\end{pmatrix}\tag{29}$$

$b_i>0$. 也就是说，$Q=(q_{ij})$ 中，

$$-q_{ii}=q_{ii+1}=b_i>0,\quad q_{ij}=0,\quad (j\neq i,\ j\neq i+1)\tag{30}$$

可以把这种过程看成为当 $a_i=0$ 时的生灭过程. 然而它不属于生灭过程，因为对后者我们总假设 $a_i>0$.

在 (1),(2) 中令 $a_i=0$, 就得到对纯生过程的向后与向前方程. 例如, 固定 i 并简记 $p_{ij}(t)$ 为 $p_j(t)$, 得向前方程为

$$\left.\begin{aligned} p_j'(t) &= -b_j p_j(t) + b_{j-1}p_{j-1}(t) \quad (j>0) \\ p_0'(t) &= -b_0 p_0(t) \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

此时 R 化为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{b_n}$. 受 §2 系 1 的启发, 我们有

定理 3 最小解 $(f_{ij}(t))$ 满足 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} f_{ij}(t)=1$, $(i\geqslant 0, t\geqslant 0)$, (亦即 Q 过程唯一) 的充要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{b_n}=\infty \tag{32}$$

证 以 $\{y_n\}$ 表任意可分 Q 过程的嵌入链, 则 $P_0(y_n=n)=1$, $P_0(q_{y_n}=b_n)=1$, 故结论由 §15.3 系 1 推出. □

(32) 中级数的概率意义是: 以 η 表可分 Q 过程的第一个飞跃点, 仿 §1 定理 1 的证, 得

$$E_0\eta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{b_n} \tag{33}$$

在开始条件 (3) 下 [1], (31) 的解可以如下求出:

$$\left.\begin{aligned} p_0(t) &= p_1(t)=\cdots=p_{i-1}(t)=0 \\ p_i(t) &= e^{-b_i t} \\ p_j(t) &= e^{-b_j t}\int_0^t e^{b_j s} b_{j-1}p_{j-1}(s)\,ds \quad (j>i) \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

两种特殊的纯生过程如下:

A. Furry-Yule 过程: 此时

$$b_j=jb \quad (j\geqslant 1,\ b>0 \text{ 为常数}) \tag{35}$$

而且 $E=(1,2,\cdots)$. 这时 (32) 成立, 又 (31) 成为

$$p_j'(t)=-jbp_j(t)+(j-1)bp_{j-1}(t) \quad (j>0) \tag{36}$$

在开始条件 (3) 下, 由 (34) 它的解是

$$\left.\begin{aligned} p_1(t) &= \cdots = p_{i-1}(t)=0 \\ p_j(t) &= \binom{j-1}{j-i} e^{-ibt}(1-e^{-bt})^{j-i} \quad (j\geqslant i) \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

B. Poisson 过程:

$$b_j=b \quad (j\geqslant 0,\ b>0 \text{ 常数})$$

[1] 这时 (3) 化为 $p_i(0)=1$, $p_j(0)=0$, $j\neq i$.

这时 (32) 仍成立， (31) 化为

$$p_j'(t) = -bp_j(t) + bp_{j-1}(t) \quad (j \geqslant 1)$$
$$p_0'(t) = -bp_0(t)$$

在开始条件 (3) 下，它的解是

$$\left.\begin{aligned} &p_0(t) = \cdots = p_{i-1}(t) = 0 \\ &p_j(t) = e^{-bt}\frac{(bt)^{j-i}}{(j-i)!} \quad (j \geqslant i) \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

(六) 对生灭过程，一切状态都互通，故由 §15.2 (四), 极限

$$v_j = \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) \tag{39}$$

与 i 无关. 下设 $R = \infty$. 为求 $v_j(j \geqslant 0)$, 在 (2) 中令 $t \to \infty$, 注意 §13.2 系 2 后，得到代数方程组

$$\left.\begin{aligned} &a_{j+1}v_{j+1} = (a_j + b_j)v_j - b_{j-1}v_{j-1} \\ &a_1 v_1 = b_0 v_0 \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

由此容易解得

$$v_j = \frac{b_0 b_1 \cdots b_{j-1}}{a_1 a_2 \cdots a_j} v_0 \quad (j > 0) \tag{41}$$

剩下要决定 v_0, 由上式

$$1 \geqslant \sum_{j=0}^{\infty} v_j = v_0\left\{1 + \frac{b_0}{a_1} + \frac{b_0 b_1}{a_1 a_2} + \cdots\right\} = v_0(1 + b_0 e_1) \tag{42}$$

其中 $e_1 = \frac{1}{a_1} + \frac{b_1}{a_1 a_2} + \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2 a_3} + \cdots$ (参看 §1(5)).

由 (42) 可见： (i) 如果 $e_1 < \infty$, 取 $v_0 = (1 + b_0 e_1)^{-1}$, 由 (41) 得 (40) 的唯一解为

$$\left.\begin{aligned} &v_0 = (1 + b_0 e_1)^{-1} \\ &v_j = \frac{b_0 b_1 \cdots b_{j-1}}{a_1 a_2 \cdots a_j (1 + b_0 e_1)} \quad (j > 0) \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

显然，由 (43) 定义的 $\{v_j\}$ $(j \geqslant 0)$ 是 (p_{ij}) 的平稳分布. 注意，由 §1 系 2, 此时 $Z = \infty$.

(ii) 如果 $e_1 = \infty$,(42) 式表示一切 $v_j = 0$ $(j \geqslant 0)$.

现在再来考虑上述二特殊情形.

在情形甲：

$$1 + b_0 e_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

如 $b \geqslant a$, 得 $v_j = 0$ $(j \geqslant 0)$. 如 $b < a$, 这时由 (43)

$$v_j = \left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^j \quad (j \geqslant 0) \tag{44}$$

这结果也可在 (22) 中 (把 n 换为 j 后) 令 $t\to\infty$ 而得到.

在情形乙:

$$1+b_0e_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{b}{a}\right)^n=e^{b/a}$$

$$v_j=e^{-(b/a)}\left(\frac{b}{a}\right)^j\Big/j!\quad(j\geqslant 0)\tag{45}$$

如果在 (28) 中令 $t\to\infty$, 也同样得到 (45).

总之, 得

定理 4 (i) 设 $R=\infty$, 则平稳分布唯一存在的充分与必要条件是 $e_1<\infty$, 它由 (43) 给出[1] (ii) 在情形甲, 如 $b\geqslant a$, 则 $v_j=0\ (j\geqslant 0)$, 如 $b<a$, 则 $v_j>0$ 由 (44) 给出, (iii) 在情形乙, $v_j>0$ 由 (45) 给出.

§16.6 生灭过程的若干应用

(一) 产生生灭过程的现实模型如下: 一质点在 $E=(0,1,2,\cdots)$ 上作随机运动, 它从任一状态 i 出发, 下一步只能到达相邻的状态 $i+1$ 或 $i-1$, 但从 0 出发则只能到 1; 如果于时刻 t 它在 i, 那么在时间 $(t,t+h)$ 内转移到 $i+1$ 的概率为 $b_ih+o(h)$, 转移到 $i-1$ (如 $i\geqslant 1$) 的概率为 $a_ih+o(h)$, 在 $(t,t+h)$ 内发生一次以上的转移的概率为 $o(h)$.

以 x_t 表于时刻 t 质点所在的状态, $\{x_t,t\geqslant 0\}$ 构成一直观意义下的随机过程, 以 $p_{ij}(t)$ 表它的转移概率, 那么上一段话的数学表达是: 当 $h\to 0$ 时,

$$p_{ij}(h)=\begin{cases}b_jh+o(h), & j=i+1\\ a_jh+o(h), & j=i-1\\ 1-(a_j+b_j)h+o(h), & j=i\end{cases}\tag{1}$$

以下设 $R=\infty$, 这条件在实际中容易满足.

在许多问题中, 常常需要考虑无条件概率 $p_j(t)$:

$$p_j(t)=P(x_t=j)\tag{2}$$

我们来推导 $\{p_j(t)\}$ 所应满足的方程. 为了计算 $p_j(t+h)$, 注意只有出现下列四种情况之一时, 才能使质点于 $t+h$ 时位于 j: (i) 于 t 时位于 j 且在 $(t,t+h)$ 中不发生转移; (ii) 于 t 时位于 $j-1$, 然后转移到 j; (iii) 于 t 时位于 $j+1$, 然后转移到 j;(iv) 于 $(t,t+h)$ 中发生一次以上转移并到 j, 这种情况的概率为 $o(h)$. 因此, 由假定得

$$p_j(t+h)=p_j(t)\{1-a_jh-b_jh\}+b_{j-1}hp_{j-1}(t)+a_{j+1}hp_{j+1}(t)+o(h)\quad(j\geqslant 1)$$

把 $p_j(t)$ 移至左方, 除以 h, 再令 $h\to 0$, 得

$$p_j'(t)=-(a_j+b_j)p_j(t)+b_{j-1}p_{j-1}(t)+a_{j+1}p_{j+1}(t)\tag{3}$$

[1] 由 §1 系 2, 此时 $Z=\infty$; 又由 §17.8 定理 1, 此时过程为遍历的.

类似得

$$p'_0(t) = -b_0p_0(t) + a_1p_1(t) \tag{4}$$

如果 $P(x_0 = i) = 1$, 那么开始条件为

$$p_i(0) = 1, \quad p_j(0) = 0 \quad (j \neq i) \tag{5}$$

反之，解方程 (3),(4),(5), 就可求出无条件概率.

注意，方程 (3),(4) 在形式上与 §5 中向前方程组 (2) 完全一样 (如果把那里的 $p_{ij}(t)$ 看成 $p_j(t)$ 的话), 因此，解向前方程组的理论也适用于解 (3),(4). 特别，我们来求 (3),(4) 的一组常数解：

$$p_j(t) = d_j \quad (j = 0, 1, \cdots, \ d_j \text{ 为常数})$$

这也就是要求过程的平稳分布 (参看 §15.2, 四), 由 (3),(4) 得

$$\left.\begin{aligned} &a_{j+1}d_{j+1} = (a_j + b_j)d_j - b_{j-1}d_{j-1} \\ &a_1d_1 = b_0d_0 \end{aligned}\right\}$$

这与 §5 方程 (40) 重合. 因此，如 $R = \infty$, 则当且只当 $e_1 < \infty$ 时，存在唯一的平稳分布 $\{d_j\}$, $d_j = v_i$ 由 §5 (43) 给出.

生灭过程在许多领域如排队论、生物学、物理学、传染病学等中有重要应用，这里只举一些例以见一般，详见 Bharucha-Reid [1].

(二) **例 1** 在实际中大量出现排队问题. 顾客源源不断地来到某商店. 他们来到的时刻是随机的，以 τ_m 表第 m 个顾客来到的时刻. 设商店共有 n 个售货员. 顾客来到以后，如果 n 个售货员都不空，他便需要排队等候. 以 β_m 表第 m 个顾客等候的时间，β_m 也是随机的，显然，等候时间依赖于下列因素：

1) 顾客来到的时刻 $\tau_1, \tau_2, \cdots$ (例如，如果 $\tau_m - \tau_{m-1}$ 都很大，$\tau_0 = 0$, 那么等候时间便短);

2) 为第 m 个顾客服务的时间 α_m(如果 α_m 都很小，那么等候时间短);

3) 售货员的个数 n.

以 x_t 表于时刻 t 时顾客总数 (包括正在被服务的和正在等候的), 以 ξ_t 表 t 时正在等候的顾客总数，$\{x_t, t \geqslant 0\}$, $\{\xi_t, t \geqslant 0\}$ 是二随机过程. 排队论中主要研究的问题是：x_t, ξ_t, β_m 的分布或极限分布等等.

排队问题不仅出现在商店中，也出现在汽车站、飞机场、港口、电话局、机器修理站等等场所.

先考虑第一个因素. 以 N_t 表在时间 $(0, t]$ 中来到的顾客总数，我们假定：

(A) $\{N_t, t \geqslant 0\}$ 是简单型的；也就是说，它满足下列三条件：

(A.1) 在任意 k 个不相交的区间 $(a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \cdots, k$, 中，各自来到的顾客个数 $N(a_i, b_i]$ 是相互独立的随机变量；

(A.2) $N(a, a+t]$ $(t > 0)$ 的分布与 a 无关；

(A.3) 令 $\varphi_i(t) = P(N(a, a+t) = i)$, 则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\varphi_1(t)}{t} = b \quad (b>0) \tag{6}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\varphi_0(t)-\varphi_1(t)}{t} = 0 \tag{7}$$

对第二个因素，我们假定：

(B) $\{\alpha_m\}$ 是独立同分布的随机变量，

$$P(\alpha_m > t) = e^{-\alpha t} \quad (a>0) \tag{8}$$

在假设 (A),(B) 下，分别考虑三种情形.

甲. 售货员个数 $n=1$.

令 $p_j(t) = P(x_t = j)$. 这时的排队问题可以化归上述模型. 只要把“顾客总数”看成“质点”. 如果 $x_t = i$, 为了在 $(t, t+h)$ 中转移到 $i+1$, 需要来到一个顾客，根据假设 (A), 它对应的概率是 $\varphi_1(h) = bh + o(h)$; 为了转移到 $i-1$, 需要有一个顾客被服务完毕，由假设 (B), 对应的概率为 $\frac{1-e^{-ah}}{h} = ah + o(h)$, $(h\to 0)$; 由 (7),(8), 在 $(t, t+h)$ 中发生一次以上转移的概率为 $o(h)$. 因此，由 (3),(4), 得 $p_j(t)$ 所应满足的方程组为

$$\left.\begin{aligned} &p_j'(t) = -(a+b)p_j(t) + bp_{j-1}(t) + ap_{j+1}(t) \quad (j\geqslant 1) \\ &p_0'(t) = -bp_0(t) + ap_1(t) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

这恰好是 §5 情形甲中的方程组 (6), 于是完全可以应用上节与本节的结果. 特别，$p_{in}(t)$ 由 §5(22) 给出，v_j, d_j 由 §5 (44) 给出.

乙. $n=\infty$.

这是理想情形，它可看成 n 很大时的近似. 这时仍可化归为上述模型，理由是类似的，唯一的差别在于，如果 $x_t = i$, 为了在 $(t, t+h)$ 中转移到 $i-1$, 需要有一个顾客被服务完，由于 $n=\infty$, 在 t 时的 i 个顾客都被服务. 因此，对应的概率为 ia. 换句话说，这时

$$a_i = ia, \quad b_i = b$$

恰好是 §5 的情形乙，于是 $p_{in}(t)$ 及 v_j, d_j 分别由 §5(27) 及 (45) 给出.

丙. $n = m < \infty$.

同样的想法，可见这时

$$a_i = ia\ (1\leqslant i < m), \quad a_i = ma\ (m\leqslant i), \quad b_i = b\ (i\geqslant 0)$$

故 $p_i(t) = P(x_t = j)$ 满足微分方程组

$$\left.\begin{aligned} &p_0'(t) = -bp_0(t) + ap_1(t) \\ &p_j'(t) = -(b+ja)p_j(t) + bp_{j-1}(t) + a(j+1)p_{j+1}(t)\ (1\leqslant j < m) \\ &p_j'(t) = -(b+ma)p_j(t) + bp_{j-1}(t) + map_{j+1}(t)\ (j\geqslant m) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

在开始条件 $p_j(0) = \delta_{ij}$ 下，这方程可以解出，方法与 §5(二) 中的相同 (参看 Saaty [1], 第四章， 110 页).

例 2 试讨论纯生过程在迁移理论中的应用. 设有二不相交的区域 R_1 与 R_2, 在 R_1 中有许多质点要随机地迁移到 R_2 中. 以 x_t 表于 t 时已迁移到 R_2 中的质点数, 如果 $x_t=i$, 那么在 $(t,t+h)$ 中, 有一质点迁移到 R_2 中的概率为 $b_ih+o(h)$, $(h\to 0)$. 以 $p_j(t)$ 表 $P(x_t=j)$, $\{p_j(t)\}$ 满足 §5 的方程组 (31), 即

$$\left.\begin{aligned} p_j'(t)&=-b_jp_j(t)+b_{j-1}p_{j-1}(t),\quad (j>0)\\ p_0'(t)&=-b_0p_0(t)\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

如果质点还可以自 R_2 中回到 R_1 中来, 那么类似地可以得到生灭过程的向前方程组.

例 3 宇宙射线主要有两种: 硬射线与软射线. 前者能穿过一米厚的铅板, 而后者经过 10 厘米厚的铅板已全部被吸收. 软射线由电子和光子构成. 一个重要的问题是: 以 x_t 表能到达厚度为 t 的铅板层的电子数, 试求 x_t 的分布, 这里厚度 t 起随机过程中的时间参数的作用.

原来, 有两种放射蜕变: 1) 一个光子穿过某种媒介质中长为 t 的路程后, 按一定概率放出两个电子而消失; 2) 一个电子按一定的概率在失去能量后放出一个光子.

一个电子 (或光子) 作为第一代, 第二代由一个光子组成, 这光子再产生第三代的两个电子, $\cdots$, 从而构成一电子－光子流.

上述问题的初步解答由 BhaBha 及 Heilter 给出, 他们认为, 作为一个电子的后代, 通过厚度 t 而且能量大于 E 的电子数 x_t 等于 n 的概率 $p_n(E,t)$ 为

$$p_n(E,t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},\quad \lambda=\lambda(E)$$

于是 $Ex_t=\lambda t$.

Furry 改进了上述解答. 他略去了光子代, 并假定一个电子经过长为 h 的路后变成两个电子的概率为 $bh+o(h)$, 而且每个电子蜕变情况与其它电子无关, 于是他得到了纯生过程. 如果 $x_t=i$, 那么在 $(t,t+h)$ 得到 $i+1$ 个电子, 必须这 i 个电子中恰有一个蜕变为两个, 它的概率是 $ibh+o(h)$, 这样便得到 Furry–Yule 过程 $b_i=ib$, 从而 $p_j(t)=P(x_t=j)$, 应该满足 §5(36), 解也由那里的 (37) 给出, 即

$$p_j(t)=e^{-bt}(1-e^{-bt})^{j-1}\quad (j=1,2,\cdots,t>0)\tag{12}$$

(注意这里开始条件是 $p_1(0)=1,\ p_j(0)=0,\ j\neq 1$).

然而 Furry 的解答也有缺点, 因为他没有考虑能量, 更完满的理论后来由 Uhlenbeck, Arley 等人建立.

第十七章 生灭过程的构造理论

§17.1 Doob 过程的变换

(一) 设 $X=\{x(t,\omega),t\geqslant 0\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的生灭过程，取值于 $E=(0,1,2,\cdots)$, 密度矩阵为 Q, Q 具有 §16.1 中 (1) 式的形式，也就是说，Q 是生灭矩阵，考虑 §16.1(6) 中的 R 与 S, 由 §16.2 系 1, 当而且只当 $R=\infty$ 时，以 Q 为密度矩阵的生灭过程唯一；亦即 Q 过程唯一 (采用 §13.3(二) 中的术语).

当 $R<\infty$ 时，情况就复杂化了，这时 Q 过程不唯一，实际上这时存在无穷多个 Q 过程，于是出现正反两方面的问题.

正问题 既然这时 Q 不足以唯一决定 Q 过程，那么两个 Q 过程还在哪些方面不一样？或者说，还需要补加什么特征数才能唯一决定它？

以后会看到，这些补加的特征数紧密地联系于样本函数在第一个飞跃点后的行为.

反问题 设已给生灭矩阵 Q, 满足条件 $R<\infty$, 试求出一切 Q 过程.

反问题已在 §13.3(二) 中叙述过，我们这里只重复一点，以说明研究反问题的意义：求出一切 Q 过程，等价于求出向后微分方程组

$$P'(t)=QP(t),\quad P(0)=I$$

的全体 Q 转移矩阵解 $P(t)$. 这里，如同 §13.3(二) 中所述，我们把 Q 转移矩阵 $P(t)$ 与 Q 过程 X 看成是一一对应的.

在本章中，我们将彻底解决正、反问题，最后的结果见 §6 中的基本定理. 所用的方法是概率分析方法，它建立于对样本函数的深刻研究的基础上. 这种方法的基本思想类似于函数构造论：根据样本函数的性质，可以看出 Doob 过程的结构较为简单，然后用这种较简单的过程来逼近任一 Q 过程.

因此，我们的讨论从 Doob 过程开始.

我们知道，密度矩阵 Q 只决定在第一次飞跃 τ_1 以前质点运动的概率法则. 如果 $R<\infty$, 因而 τ_1 以概率 1 有穷时，质点在有限时间内到达附加状态 ∞, 至于如何从 ∞ 回到有限状态的概率法则则不是由 Q 给出，那么，它到底决定于什么呢？在 §5 中，我们找到了一列特征数 $p,q,r_n,n\geqslant 0$, 它们完满地解决了这个问题，给出了质点到达 ∞ 后如何继续运动的法则. 直观地说，q 可看成为自 ∞"连续流入"(§2) 的概率，所谓"连续流入"可想象为遍历一切充分大的状态 $(\cdots,n+2,n+1,n)$ 而回到有限状态，$p=1-q$ 是非连续流入的概率，而 r_n 则是非连续流入而且立即自 ∞ 到达状态 n 的可能性的一种测度 (§5 定理 2) 任一 Q 过程被它的特征数列唯一决定. 读者不妨先看一遍.

§5 (三) 及 §6 可作为本章的内容提要，其中的结论可不依赖于前几节而直接阅读.

本章中恒作下列假定而不一一声明：1) Q 为生灭矩阵而且 $R<\infty$; 2) Q 过程都是典范的，即可分、Borel 可测、右下半连续；3) 我们知道，转移概率 $p_{ij}(t)$ 不能唯一地决定 Q 过程的样本函数 (例如，在一 0 测集上任意改变样本函数的值并不影响转移概率), 虽然

如此，为理论的完整起见，二 Q 过程，只要它们的转移概率相同，我们就不加以区别而看成是同一 Q 过程.

由于 Doob 过程是构造论中的基石，我们的叙述就从 Doob 过程开始.

(二) 先改述一下 Doob 过程的定义，使它便于应用. 考虑生灭矩阵 $Q, R<\infty$ 在某概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上考虑一列相互独立的 Q 过程 $x^{(n)}(t,\omega), t\geqslant 0, (n=1,2,\cdots)$, 它们可分，在跳跃点上右连续，又 $x^{(n)}(t,\omega), n\geqslant 2$ 有共同的开始分布为 $\pi=(\pi_0,\pi_1,\cdots)$ .Q 过程 $x^{(n)}(t,\omega)$ 的第一个飞跃点记为 $\tau^{(n)}(\omega)$, $P(\tau^{(n)}<\infty)=1$. 令 $\tau_0=0, \tau_n=\sum\limits_{v=0}^{n}\tau^{(v)}$, 定义

$$x(t,\omega)=x^{(n)}(t-\tau_{n-1}(\omega),\omega), \text{如}\tau_{n-1}(\omega)\leqslant t<\tau_n(\omega)$$

并称 $\{x(t,\omega),t\geqslant 0\}$ 为 Doob 过程. 由于此过程的转移概率完全由 Q 及 π 决定，故也称它为 (Q,π) 过程. 称

$$\{x^{(1)}(t,\omega), t<\tau^{(1)}(\omega)\}.$$

为 **最小链**, 它是 Q 过程在第一个飞跃点前的那一段，它的转移概率就是 §13.3(42) 所定义的向后方程的最小解.

设 $y(t), t\geqslant 0$ 为取值于 $\overline{E}=(0,1,2,\cdots,\infty)$ 的普通 (非随机的) 函数，称点 τ 为它的 **飞跃点**, 如对任意 $\varepsilon>0$, 在 $[\tau-\varepsilon,\tau]$ 中，它有无穷多个跳跃点.

对生灭矩阵 Q,Doob 过程的样本函数是所谓 T 跳跃函数. 值域为 E 的函数 $y(t), t\geqslant 0$ 称为 **T跳跃的**, 如果：1) 在任一有穷区间中，只有有穷多个飞跃点 $\tau_i(\tau_0=0,\tau_i<\tau_{i+1})$; 2) 在任一飞跃区间 $[\tau_i,\tau_{i+1})$ 中，一切不连续点都是跳跃点 τ_{ij}, 其数可列 $(\tau_i=\tau_{i0}<\tau_{i1}<\tau_{i2}<\cdots)$, $i=0,1,2,\cdots$; 3) 在任二相邻的不连续点上，有

$$|y(\tau_{ij})-y(\tau_{ij+1})|=1 \quad (i,j=0,1,2,\cdots)$$

T 跳跃函数称为 T_n 跳跃的，如在任一飞跃点 $\tau_i(i>0)$ 上， $y(\tau_i)\leqslant n$.

注意， T 跳跃函数右连续，不以 ∞ 为值.

对于上述 Doob 过程 $x(t,\omega), t\geqslant 0$, 由于 $R<\infty$, 一切随机变量 $\tau_{ij}(\omega)$ 均以概率 1 有穷，又 $\pi_j=P(x(\tau_i,\omega)=j), (i=1,2,\cdots)$.

以后常要用到过程的一种变换.

称函数 $y(t), t\geqslant 0$ 自 $x(t), t\geqslant 0$**经$C(a_k,b_k)$变换** 得来，如果存在二列正数 $(a_k),(b_k)$, 使

$$0(=b_0)<a_1\leqslant b_1<a_2\leqslant b_2<\cdots, \quad \sum_{k=0}(a_{k+1}-b_k)=\infty$$

而且 $y(t)$ 如下定义：

$$\begin{aligned} y(t)=&x(t), \qquad \text{当}0\leqslant t<d_1\text{时} \\ y(d_k+t)=&x(b_k+t), \qquad \text{当}0\leqslant t<a_{k+1}-b_k\text{时} \end{aligned}$$

其中

$$d_1=a_1,\ d_{k+1}=d_k+(a_{k+1}-b_k)$$

直观地说，抛去 $x(t)$ 对应于 $[\alpha_i,\beta_i)$ 的那些段，剩下的第一段 $[0,\alpha_1)$ 保留不动，其余的段向左移动，使 $[0,\alpha_1),[\beta_i;\alpha_{i+1})(i=1,2,\cdots)$ 按原序联结而不相交，所得函数即 $y(t)$.

今以 $x_n(t)$ 表某 T_n 跳跃函数，用下列方法定义二列正数，这种迭代定义方法将多次引用. 以

$$\tau_1 \text{表 } x_n(t) \text{ 的第一个飞跃点} \tag{1}$$

$$\tau_{k_1} = \inf(\tau : \tau \geqslant \tau_1, \tau \text{是飞跃点，而且} x_n(\tau) < n) \tag{2}$$

如果已定义 $\tau_{k_{i-1}+1}, \tau_{k_i}$, 则令

$$\tau_{k_i+1} = \inf(\tau : \tau > \tau_{k_i}, \tau \text{是飞跃点}) \tag{3}$$

$$\tau_{k_i+1} = \inf(\tau : \tau \geqslant \tau_{k_i+1}, \tau \text{是飞跃点，} x_n(\tau) < n) \tag{4}$$

于是

$$0 < \tau_1 \leqslant \tau_{k_1} < \tau_{k_1+1} \leqslant \tau_{k_2} < \cdots < \tau_{k_i+1} \leqslant \tau_{k_{i+1}} < \cdots$$

设以上诸数均有穷，而且

$$\sum_{i=0}(\tau_{k_i+1} - \tau_{k_i}) = \infty \quad (k_0 = 0, \tau_0 = 0) \tag{5}$$

对 $x_n(t)$ 施行 $C(\tau_{k_i+1}, \tau_{k_{i+1}})$ 变换后，得一 T_{n-1} 跳跃函数 $x_{n-1}(t)$, 记此关系为

$$f_{nn-1}(x_n(t)) = x_{n-1}(t) \tag{6}$$

故 f_{nn-1} 表 T_n 跳跃函数到 T_{n-1} 跳跃函数的变换. 注意 (6) 并不表示对固定的 t 双方相等.

现在考虑 $(Q, \Phi^{(n)})$ 过程 $x_n(t,\omega), t \geqslant 0 (\omega \in \Omega)$. 这里 $\Phi^{(n)} = (\varphi_0^{(n)}, \varphi_1^{(n)}, \cdots, \varphi_n^{(n)})$ 是集中在前 $n+1$ 个状态 $(0, 1, \cdots, n)$ 上的分布，使 $P(x_n(\tau_i, \omega) = j) = \varphi_j^{(n)}$. 为简单计，设 $\varphi_0^{(n)} > 0$. 利用 (1),(2) 定义随机变量列 $\tau_{k_i+1}(\omega)$, $\tau_{k_{i+1}}(\omega) (i \geqslant 0)$, 则由于 $R < \infty$ 及 $\varphi_0^{(n)} > 0$, 它们均以概率 1 有穷而且 (5) 成立. 对过程 $x_n(t,\omega), t \geqslant 0$ 施行 $C(\tau_{k_i+1}(\omega), \tau_{k_{i+1}}(\omega))$ 变换后，得一二元函数 $x_{n-1}(t,\omega), t \geqslant 0 (\omega \in \Omega)$, 即

$$f_{nn-1}(x_n(t,\omega)) = x_{n-1}(t,\omega) \tag{7}$$

引理 1 $x_{n-1}(t,\omega), t \geqslant 0$ 是 $(Q, \varphi^{(n-1)})$ 过程，这里

$$\varphi_i^{(n-1)} = \varphi_i^{(n)} \Big/ \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_j^{(n)} \quad (0 \leqslant i < n) \tag{8}$$

证 对固定的 ω, 由定义知 $x_{n-1}(t,\omega)$ 是 T_{n-1} 跳跃函数. 今证对每固定的 $t, x_{n-1}(t,\omega)$ 是随机变量. 以 $\sigma_\ell(\omega)$ 表 $x_{n-1}(t,\omega)$ 的第 ℓ 个飞跃点 $(\sigma_0 = 0)$, 并令

$$\eta_\ell(\omega) = \sum_{i=1}^{\ell}(\tau_{k_i}(\omega) - \tau_{k_{i-1}+1}(\omega)), \quad (k_0 = 0) \tag{9}$$

(换言之，$\eta_\ell(\omega)$ 是在 $\tau_{k\ell}(\omega)$ 以前，自 $x_n(t,\omega)$ 所抛去的区间的总长). 注意 $x_n(t,\omega)$ 是右连续过程，故是 Borel 可测的，因而

$$\begin{aligned}&(x_{n-1}(t,\omega) = i, \sigma_\ell(\omega) < t \leqslant \sigma_{\ell+1}(\omega)) \\ &\quad = (x_n(t+\eta_\ell, \omega) = i, \tau_{k_\ell}(\omega) < t + \eta_\ell(\omega) < \tau_{k_{\ell+1}}(\omega))\end{aligned}$$

是可测集，故 $(x_{n-1}(t,\omega)=i)=\sum\limits_{\ell=0}(x_{n-1}(t,\omega)=i,\ \sigma_\ell(\omega)<t\leqslant\sigma_{\ell+1}(\omega))$ 也可测，再留意 $x_{n-1}(0,\omega)=x_n(0,\omega)$，即得证 $x_{n-1}(t,\omega),\ t\geqslant 0$ 是一随机过程．它还是 $(Q,\Phi^{(n-1)})$ 过程．因为对任意 $\ell\geqslant 1$，令 τ_m 为 $x_n(t,\omega)$ 的第 m 个飞跃点．由 (8) 得

$$
\begin{aligned}
P(x_{n-1}(\sigma_\ell)=j)=P(x_n(\tau_{k_\ell})=j)&=\sum_{m=\ell}^{\infty}P(x_n(\tau_{k_\ell})=j|\,\tau_{k_\ell}=\tau_m)\cdot P(\tau_{k_\ell}=\tau_m)\\
&=\sum_{m=\ell}^{\infty}\frac{(1-\varphi_n^{(n)})^{\ell-1}\cdot\varphi_j^{(n)}\cdot[\varphi_n^{(n)}]^{m-\ell}}{(1-\varphi_n^{(n)})^{\ell}\cdot[\varphi_n^{(n)}]^{m-\ell}}P(\tau_{k_\ell}=\tau_m)\\
&=\varphi_j^{(n-1)}\sum_{m=\ell}^{\infty}P(\tau_{k_\ell}=\tau_m)
\end{aligned}
$$

因为 $\varphi_0^{(n)}>0$ 故 $P(\tau_\ell\leqslant\tau_{k_\ell}<\infty)=1$，即 $\sum\limits_{m=\ell}^{\infty}P(\tau_{k_\ell}=\tau_m)=1$，从而

$$
P(x_{n-1}(\sigma_\ell)=j)=\varphi_j^{(n-1)}\quad(0\leqslant j\leqslant n-1)
$$

最后，根据 Doob 过程的定义，还要证明 $x_{n-1}(t,\omega)$ 是由相互独立的最小链组成．$x_{n-1}(t,\omega)$ 是由最小链组成是显然的，故只要证独立性 [1]．以 τ_{ij},σ_{ij} 分别表 $x_n(t,\omega)$ 及 $x_{n-1}(t,\omega)$ 第 i 个飞跃点后第 j 个跳跃点 $(j\geqslant 0)$，$f_u(x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots)$ 表任意无穷维 Borel 可测函数，$u=1,2,\cdots$．令

$$
\begin{aligned}
F_{uv}^{(n-1)}(\omega)&=f_u(x_{n-1}(\sigma_{v0}),\sigma_{v1}-\sigma_{v0},x_{n-1}(\sigma_{v1}),\sigma_{v2}-\sigma_{v1},\cdots)\\
F_{uv}^{(n)}(\omega)&=f_u(x_n(\tau_{v0}),\tau_{v1}-\tau_{v0},x_n(\tau_{v1}),\tau_{v2}-\tau_{v1},\cdots)
\end{aligned}
$$

设 ℓ 为任意正整数，$c_1,\cdots,c_\ell$ 为任意 ℓ 个实数，则

$$
\begin{aligned}
&P(x_{n-1}(\sigma_v)=j_v,F_{vv}^{(n-1)}<c_v,v=1,\cdots,\ell)\\
&\quad=P(x_n(\tau_{k_v})=j_v,F_{vk_v}^{(n)}<c_v,v=1,\cdots,\ell)\\
&\quad=\sum P(k_v(\omega)=m_v,x_n(\tau_{mv})=j_v,F_{vm_v}^{(n)}<c_v,v=1,\cdots,\ell)\\
&\quad=\sum P(x_n(\tau_{m_v})=j_v,F_{vm_v}^{(n)}<c_v,v=1,\cdots,\ell\\
&\qquad x_n(\tau_i)=n,i\neq m_1,\neq m_2,\cdots,\neq m_\ell,i<m_\ell)
\end{aligned}
$$

这里及以下的 $\sum$ 表对正整数 $m_\ell>m_{\ell-1}>\cdots>m_1\geqslant 1$ 求和．由于 $x_n(t,\omega)$ 是 Doob 过程，故构成 $x_n(t,\omega)$ 的最小链是相互独立的．因此，如以 $\overline{P}_i$ 表开始分布集中在 i 上时最小链所产生的测度，即得上式最右项

$$
\begin{aligned}
&=\sum[\varphi_n^{(n)}]^{m_1-1}\cdot[\varphi_n^{(n)}]^{m_2-(m_1+1)}\cdots[\varphi_n^{(n)}]^{m_\ell-(m_{\ell-1}+1)}\prod_{v=1}^{\ell}\overline{P}_{jv}(F_{vm_v}^{(n)}<c_v)\\
&=\prod_{v=1}^{\ell}\overline{P}_{jv}(F_{vm_v}^{(n)}<c_v)/(1-\varphi_n^{(n)})=\prod_{v=1}^{\ell}P(x_n(\tau_{k_v})=j_v,F_{vk_v}^{(n)}<c_v)\\
&=\prod_{v=1}^{\ell}P(x_{n-1}(\sigma_v)=j_v,F_{vv}^{(n-1)}<c_v)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

---

[1] 此独立性也可由 §3 定理 1 推出

然后对 j_v 自 0 到 $n-1$ 求和 $(v=1,\cdots,\ell)$, 即得

$$P(F_{vv}^{(n-1)}<c_v, v=1,\cdots,\ell)=\prod_{v=1}^{\ell}P(F_{vv}^{(n-1)}<c_v)$$

此即表诸构成 $x_{n-1}(t,\omega)$ 的最小链的独立性. □

类似于 $f_{n,n-1}$, 定义另一种变换 $g_{n,n-1}$ 如下: 对 T_n 跳跃函数 $x_n(t)$, 仿 (1)-(4), 令

$$\tau_1\text{为}x_n(t)\text{的第一个飞跃点} \tag{1'}$$

$$\beta_{k_1}=\inf(t:t\geqslant\tau_1,x_n(t)<n) \tag{2'}$$

$$\tau_{k_i+1}\text{为}\beta_{k_i}\text{后的第一个飞跃点} \tag{3'}$$

$$\beta_{k_{i+1}}=\inf(t:t\geqslant\tau_{k_i+1},x_n(t)<n) \tag{4'}$$

仍设此诸数皆有穷而且

$$\sum_{i=0}(\tau_{k_i+1}-\beta_{k_i})=\infty\quad(k_0=0,\beta_0=0) \tag{5'}$$

对 $x_n(t)$ 施以 $C(\tau_{k_i+1},\beta_{k_{i+1}})$ 变换后, 得一 T_{n-1} 跳跃函数 $x_{n-1}(t)$, 记此关系为

$$g_{n,n-1}(x_n(t))=x_{n-1}(t) \tag{11}$$

或者, 为以后方便, 记成

$$g_{n+1,n}(x_{n+1}(t))=x_n(t) \tag{12}$$

这表示变换 $g_{n+1,n}$ 把 T_{n+1} 跳跃函数变为 T_n 跳跃函数.

今考虑 $(Q,V^{(n+1)})$ 过程 $x_{n+1}(t,\omega),t\geqslant 0$, 这里

$$V^{(n+1)}=(V_0^{(n+1)},V_1^{(n+1)},\cdots,V_{n+1}^{(n+1)})$$

表某集中在 $(0,1,\cdots,n+1)$ 上的分布, 它的样本函数是 T_{n+1} 跳跃函数. 由 (12), 令

$$g_{n+1,n}(x_{n+1}(t,\omega))=x_n(t,\omega) \tag{13}$$

则类似地得

引理 2 $x_n(t,\omega),t\geqslant 0$ 是 $(Q,V^{(n)})$ 过程, 这里

$$\left.\begin{aligned}
&v_j^{(n)}=v_j^{(n+1)}\Big/\left(\sum_{i=0}^{n}v_i^{(n+1)}+v_{n+1}^{(n+1)}c_{n+1,n}\right)\quad(j<n)\\
&v_n^{(n)}=(v_n^{(n+1)}+v_{n+1}^{(n+1)}c_{n+1,n})\Big/\left(\sum_{i=0}^{n}v_i^{(n+1)}+v_{n+1}^{(n+1)}c_{n+1,n}\right)\\
&\sum_{i=0}^{n}v_i^{(n)}=\sum_{i=0}^{n+1}v_i^{(n+1)}=1\quad(n=1,2,\cdots)
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

其中 $c_{jk}=q_k(j)$ 由 §16.1 (25) 定义, 它是自 k 出发, 沿 Q 过程的轨道, 经有穷次转移而到达 j 的概率.

证 证明仿引理 1, 不同处在于证 (14). 分别以 $\sigma_\ell(\omega), \tau_\ell(\omega)$ 表 $x_n(t,\omega)$ 与 $x_{n+1}(t,\omega)$ 的第 ℓ 个飞跃点,

$$\begin{aligned} v_j^{(n)} &= P(x_n(\sigma_\ell)=j) = P(x_{n+1}(\beta_{k_\ell})=j) \\ &= \sum_{m=\ell} P(x_{n+1}(\beta_{k_\ell})=j|\tau_m \leqslant \beta_{k_\ell} < \tau_{m+1}) \cdot P(\tau_m \leqslant \beta_{k_\ell} < \tau_{m+1}) \end{aligned} \tag{15}$$

由于 $R<\infty$, 对 $x_{n+1}(t,\omega)$, 自 k 出发, 经有穷步到达 $j(\geqslant k)$ 的概率为 1, 到达 $k-1$ 的概率为 $c_{k,k-1}$, 故

$$\Delta \equiv \sum_{i=0}^{n} v_i^{(n+1)} + v_{n+1}^{(n+1)} c_{n+1,n} > 0$$

是自任一飞跃点出发经有穷步 [1] 到达 $(0,1,\cdots,n)$ 的概率. 因而

$$P(x_{n+1}(\beta_{k\ell})=j|\tau_m \leqslant \beta_{k\ell} < \tau_{m+1}) = \frac{(1-\Delta)^{m-1}\Delta^{\ell-1}v_j^{(n+1)}}{(1-\Delta)^{m-1}\Delta^{\ell}} = \frac{v_j^{(n+1)}}{\Delta}, \quad (0 \leqslant j \leqslant n)$$

类似地有

$$P(x_{n+1}(\beta_{k\ell})=n|\tau_m \leqslant \beta_{k\ell} < \tau_{m+1}) = (v_n^{(n+1)} + v_{n+1}^{(n+1)} c_{n+1,n})/\Delta$$

以此二式代入 (15), 并注意易证 $P(\tau_\ell \leqslant \beta_{k\ell} < \infty)=1$,

$$P(\lim_{i\to\infty} \tau_i = \infty) = 1$$

即得证 (14) 中前二式. 最后一式是显然的. □

更一般地, 对 $n>m$, 定义二变换

$$f_{nm} = f_{m+1m} \cdots f_{n-1n-2} f_{nn-1} \tag{16}$$

$$g_{nm} = g_{m+1m} \cdots g_{n-1n-2} g_{nn-1} \tag{17}$$

它们都是把 T_n 跳跃函数变为 T_m 跳跃函数的单值变换, 逆变换 f_{nm}^{-1}, g_{nm}^{-1}, 则把 T_m 跳跃函数变为 T_n 跳跃函数, 但后者一般是多值的.

(三) 仍旧考虑 $(Q,\Phi^{(n)})$ 过程 $x_n(t,\omega), t\geqslant 0$. 根据随机过程的表现理论 [2], 可以取基本事件空间 $\Omega=\Omega_n$, 这里 $\Omega_n=(\omega_n)$ 是全体 T_n 跳跃函数的集合, 而且基本事件 ω_n 与样本函数 $x_n(t,\omega_n)$, 重合, 即 $x_n(t,\omega_n)=\omega_n(t), (t\geqslant 0)$. 这样取定的概率空间记为 $(\Omega_n,\mathcal{F}_n,P_n), P_n$ 完全由 $Q,\Phi^{(n)}$ 及一开始分布决定. 今如取由 (8) 定义的分布 $\Phi^{(n-1)}$, 则由 (7) 及引理 1, 定义在 $(\Omega_n;\mathcal{F}_n,P_n)$ 上的过程 $f_{nn-1}(x_n(t,\omega_n))$ 是 $(Q,\Phi^{(n-1)}$ 过程, 由此易见 $f_{nm}(x_n(t,\omega_n))$ 是定义在 $(\Omega_n,\mathcal{F}_n,P_n)$ 上的 $(Q,\Phi^{(m)})$ 过程, $(m<n)$, 这里

$$\varphi_i^{(m)} = \varphi_i^{(n)} \Big/ \sum_{j=0}^{m} \varphi_j^{(n)} \quad (0 \leqslant i \leqslant m) \tag{18}$$

此式是 (8) 的推广.

---

[1] 0 步也算作有穷步.

[2] 见 Doob [1] 第一章 §6.

今设已给一列非负数 (φ_i), 使

$$0<\sum_{i=0}^{\infty}\varphi_i\leqslant\infty \tag{19}$$

(注意此级数可以发散), 故至少有一 $\varphi_i>0$. 不失以下讨论的一般性, 设 $\varphi_0>0$. 由 (φ_i) 作集中在 $(0,1,\cdots,n)$ 上的分布

$$\Phi^{(n)}=(\varphi_0^{(n)},\varphi_1^{(n)},\cdots,\varphi_n^{(n)}),$$

其中

$$\varphi_i^{(n)}=\varphi_i\Big/\sum_{i=0}^{n}\varphi_i \tag{20}$$

显然, 分布列 $(\Phi^{(n)})$ 满足关系 (18).

引理 3 存在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$, 在其上可以定义一列 $(Q,\Phi^{(n)})$ 过程 $x_n(t,\omega)$, $t\geqslant 0$ $(n=0,1,2,\cdots)$, 使满足关系 (7). 这里 $\Phi^{(n)}$ 由 (20) 决定.

证 固定一分布 (v_i) 作为开始分布. 如上所述, 对每一 $n\geqslant 0$, 存在 $(\Omega_n,\mathcal{F}_n,P_n)$ 及定义于其上的 $(Q,\Phi^{(n)})$ 过程 $x_n(t,\omega_n)$, $t\geqslant 0$. 对任意 $k(\geqslant 1)$ 个非负整数 $n_1,\cdots,n_k$, 任取 $n\geqslant\max(n_1,\cdots,n_k)$, 定义在 $(\Omega_n,\mathcal{F}_n,P_n)$ 上的过程 $z_{n_i}(t,\omega_n)=f_{nn_i}x_n(t,\omega_n))$ 也是 $(Q,\Phi^{(n_i)})$ 过程, 故与 $x_{n_i}(t,\omega_{n_i})$, $t\geqslant 0$ 有相同的有穷维分布. 今对 $t_i\in[0,\infty)$ 及 $j_i\in E(i=1,\cdots,k)$, 定义 k 维分布

$$F_{n_1t_1,\cdots,n_kt_k}(j_1,\cdots,j_k)=P_n(z_{n_i}(t_i,\omega_n)=j_i,\ \ i=1,\cdots,k) \tag{21}$$

易见此分布不依赖于 n 的选择, 而且有穷维分布族 $\{F_{n_1t_1,\cdots,n_kt_k}\}$ 是相容的. 故根据 Колмогоров 定理, 存在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$, 及定义于其上的过程列 $x_n(t,\omega),t\geqslant 0\,(n=0,1,2,\cdots)$, 使

$$P(x_{n_i}(t_i,\omega)=j_i,\ i=1,\cdots,k)=F_{n_1t_1,\cdots,n_kt_k}(j_1,\cdots,j_k) \tag{22}$$

由此及 (21), 特别地知 $x_n(t,\omega)$ 与 $z_n(t,\omega_n)$ 有相同的有穷维分布. 其次, 按上引定理, 可取 $\Omega=(\omega)$, 其中 $\omega=\omega(n,t)$ 是取值于 E 的二元函数 $(n=0,1,\cdots,t\in[0,\infty))$, 并且 $x_n(t,\omega)=\omega(n,t)$. 由于对一切 $n\geqslant m\geqslant 0$, $P_n(f_{nm}(z_n(t,\omega_n))=z_m(t,\omega_n))=1, P_n(z_n(t,\omega_n)$ 是 T_n 跳跃函数$)=1$, 故可自 Ω 中除去一 0 测集, 以使对每 $\omega, x_n(t,\omega)$ 是 T_n 跳跃函数, 而过程 $x_n(t,\omega),t\geqslant 0$ 则成为 $(Q,\Phi^{(n)})$ 过程, 并且使 (7) 成立. 清洗 (缩小) 后的概率空间仍记为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 则此空间符合要求. □

逐句重复引理 3 的证明, 作显然的记号上及字面上的修改后, 即可证明下面的

引理 4 存在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$, 在其上可以定义一列 $(Q,V^{(n)})$ 过程 $x_n(t,\omega),t\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$ 使, 满足关系 (13), 这里 $V^{(n)}=(v_0^{(n)},v_1^{(n)},\cdots,v_n^{(n)})(n=1,2,3,\cdots)$ 是 (14) 的任一列非负解.

§17.2 连续流入不可能的充要条件

(一) 设 $x(t,\omega),t\geqslant 0$ 为可分 Q 过程, 由 §14.1, 不影响转移概率, 对每 $i\in E$, 可设 t–集 $S_i(\omega)=(t:x(t,\omega)=i)$ 以概率 1 是有穷或可列多个左闭右开的不相交的 i 区间的和, 而

且在任一有界区间中，只含有穷多个 i 区间，在任一定点 t 后有第一个断点，它是跳跃点 (a.s.).

定理 1 对任意可分 Q 过程 $x(t,\omega), t\geqslant 0, t-$ 集 $\Gamma(\omega)=(t:t$ 是 $x(s,\omega), s\geqslant 0$ 的飞跃点) 是闭集 (a.s.).

证 对固定的 ω, 称 a 是 $\Gamma(=\Gamma(\omega))$ 的左极限点，如 a 是 Γ 的极限点，但存在 $\varepsilon>0$, 使 $x(t)$ 在 $[a-\varepsilon,a)$ 中为常数. 记 Γ 的左极限点集为 A, 并令 $B=(b:x(t)$ 在 b 不连续，而且在某 $[b-\delta,b)$ $(\delta>0)$ 为常数). 显然 $A\subset B$. 但另方面，因 $[b-\delta,b)$ 必含于某 i 区间之中，而且 B 中不同的 i 不能含于同一 i 区间之中，故 B 是可列集 (a.s.). 记 $B=(b_n)$, 则 b_n 不是跳跃点的概率等于 0. 否则，存在 $r\in R$(可分 $t-$ 集), 使 $P(r\in[b_n-\delta,b_n)$ 而且 b_n 非跳跃点$)>0$. 于是 r 后第一个断点以正概率不是跳跃点，此如上述不可能. 故 B 由跳跃点构成；然而由 A 的定义， A 中的点均非跳跃点，故 $AB=\phi$, 从而 $A=\phi$(a.s.).

如点 γ 是 Γ 的极限点，但 $\gamma\overline{\in}A$, 则在任一 $[b-\varepsilon,b)$ 中必有无穷多个跳跃点，故 $\gamma\in\Gamma$. 因而得证 $\Gamma(\omega)$ 是闭集 (a.s.). □

任意固定 $\varphi\geqslant 0$. 由定理 1, 可定义

$$\tau_\varphi(\omega)=\max(\gamma:\gamma\leqslant\varphi,\gamma\in\Gamma(\omega)) \tag{1}$$

换言之， $\tau_\varphi(\omega)$ 是 φ 前的最后一个飞跃点 (如右方括号中集是空的，则令 $\tau_\varphi(\omega)=0$). 它是随机变量. 易见几乎处处存在极限 $\lim\limits_{t\downarrow\tau_\varphi(\omega)}x(t,\omega)$. 实际上，如说不然，必存在 $i\in E$ 使

$$P(\overline{\lim_{t\downarrow\tau_\varphi(\omega)}}x(t,\omega)>\underline{\lim_{t\downarrow\tau_\varphi(\omega)}}x(t,\omega)=i)>0$$

. 由于 $P(\tau_\varphi(\omega)\leqslant\varphi)=1$, 故上式表示以正的概率在 $[0,\varphi]$ 中有无穷多个 i 区间，此不可能.

定义 $x(\tau_\varphi,\omega)=\lim\limits_{t\downarrow\tau_\varphi}x(t,\omega)$. 如对任意 $\varphi\geqslant 0$, 有 $P(x(\tau_\varphi,\omega)=\infty)=0$, 则说 **质点不能自$\infty$"连续地" 流入有穷状态**; 不久可证，其充要条件是 $S=\infty$. 这里 S 由 §16.1(6) 定义.

(二) 设 $x(t,\omega),t\geqslant 0$ 是取值于 E 的典范链，对 $[0,\infty)$ 中任一子集 B, 以 $\mathcal{B}_B$ 表含 $\omega-$ 集 $(x(t,\omega)=j),(t\in B,j\in E)$ 的最小 $\sigma-$ 代数. 设随机变量 $\zeta(\omega)(\leqslant\infty)$ 为马氏时刻，记 $\Omega_\zeta=(\zeta(\omega)<\infty)$. 令

$$\mathcal{B}[0,\zeta]=(A:A\subset\Omega_\zeta,\text{对任}t\geqslant 0,A\cap(\zeta\geqslant t)\in\mathcal{B}[0,t]) \tag{2}$$

则 $\mathcal{B}[0,\zeta]$ 是 Ω_ζ 中一 $\sigma-$ 代数. 由强马氏性，对任意 $B\in\mathcal{B}[0,\infty)$, 在 Ω_ζ 上，除去某 0 测度集外，有

$$P(\theta_\zeta B|\,\mathcal{B}[0,\zeta])=P_{x(\zeta)}(B) \tag{3}$$

引理 1 设 $\xi(\omega)$ 为随机变量，满足条件:

(i) 对任意 $s\geqslant 0,t\geqslant 0,\omega-$ 集 $A_s=(\xi>s)\in\mathcal{B}[0,s]$, 而且 $A_{s+t}\subseteq A_s\cap\theta_sA_t$;

(ii) 存在 $T>0,\alpha>0$, 使对一切 $k\in E$, 有 $P_k(A_T)<1-\alpha$.

则 $E\xi<\infty$.

证 因 $A_s\in\mathcal{B}[0,s]$, $\theta_sA_T\in\mathcal{B}[s,\infty)$, 由马氏性得

$$P_k(A_{s+T})\leqslant P_k(A_s\cap\theta_sA_T)=\int_{A_s}P_{x(s)}(A_T)P_k(d\omega)\leqslant(1-\alpha)P_k(A_s) \tag{4}$$

从而 $P_k(A_{nT}) \leqslant (1-\alpha)^n$, 并且

$$\begin{aligned} E_k\xi &= \int_0^\infty P_k(\xi > s)ds = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} P_k(\xi > s)ds \\ &\leqslant T\sum_{n=0}^{\infty} P_k(\xi > nT) = T\sum_{n=0}^{\infty} P_k(A_{nT}) \leqslant \frac{T}{\alpha} < \infty \end{aligned}$$

由于 $k \in E$ 任意, 故 $E\xi < \infty$. □

(三) **定理 2** 设 Q 满足 $S=\infty$, 则对任意 Q 过程 $x(t,\omega), t \geqslant 0$, 有 $P(x(\tau_\varphi,\omega)=\infty)=0$, 这里 $\varphi \geqslant 0$ 任意.

证 如 $R=\infty$, 则因第一个飞跃点 $\tau(\omega)=\infty$(a.s.), 故 $\tau_\varphi(\omega)=0$(a.s.) 而定理显然正确.

设 $R<\infty$, 令 $\eta_i(\omega)=\inf(t: x(t,\omega)=i)$, 则 $P_0(\eta_i<\infty)=1$. 引进随机变量

$$\xi_k(\omega)=\inf(t: x(t,\omega)=k, x(\tau_t,\omega)=\infty)\ (k\in E) \tag{5}$$

(如右方括号中集是空的, 则令 $\xi_k(\omega)=\infty$). 试证 $P(\xi_k(\omega)=\infty)=1$.

先证 $P(\xi_0(\omega)=\infty)=1$. 如说不然, 则 $P(\xi_0<\infty)>0$, 故至少有一 $i\in E$, 使 $P_i(\xi_0<\infty)>0$. 既然 $P(\xi_0(\omega)\geqslant\tau(\omega))=1$, 故

$$P_0(\xi_0<\infty)=P_0(\eta_i<\infty, \xi_0-\eta_i<\infty)$$

对 η_i 用强马氏性即得

$$\begin{aligned} P_0(\xi_0<\infty) &= \int_{(\eta_i<\infty)} P_0(\xi_0-\eta_i<\infty\,|\mathcal{B}_{[0,\eta_i]})P_0(d\omega) \\ &= \int_{(\eta_i<\infty)} P_{x(\eta_i)}(\xi_0<\infty)P_0(d\omega) \end{aligned}$$

因为 $x(\eta_i)=i, P_0(\eta_i<\infty)=1$, 故由上式得 $P_0(\xi_0<\infty)=P_i(\xi_0<\infty)>0$, 于是存在 $T>0, \alpha>0$, 使 $P_0(\xi_0\leqslant T)\geqslant\alpha$. 既然对任意 $k\in E$, 有

$$\begin{aligned} &P_0(\xi_0\leqslant T)\leqslant P_0(\eta_k\leqslant T, \xi_0-\eta_k\leqslant T) \\ &\quad= \int_{(\eta_k\leqslant T)} P_0(\xi_0-\eta_k\leqslant T|\mathcal{B}_{[0,\eta_k]})P_0(d\omega)=P_k(\xi_0\leqslant T)P_0(\eta_k\leqslant T) \end{aligned}$$

故 $P_k(\xi_0\leqslant T)\geqslant P_0(\xi_0\leqslant T)\geqslant\alpha$, 即 $P_k(\xi_0>T)<1-\alpha, (k\in E)$, 从而引理 1 条件 (ii) 满足; 由 $\xi_0(\omega)$ 的定义, 易见那里 (i) 也满足, 故得 $E\xi_0<\infty$. 按 §16.1 定理 2 及假设,

$$\lim_{n\to\infty} E\sigma_n = S = \infty$$

σ_n 为自 n 出发, 经有穷步首达 0 的时间. 故存在 N 使

$$E\sigma_N > 2E\xi_0 \tag{6}$$

另方面，用迭代法定义

$$\alpha_1(\omega)=\inf(t:x(t,\omega)=N)$$
$$\beta_1(\omega)=\inf(t:t>\alpha_1(\omega),\ x(t,\omega)=N+1)$$
$$\alpha_k(\omega)=\inf(t:t>\beta_{k-1}(\omega),\ x(t,\omega)=N-1)$$
$$\beta_k(\omega)=\inf(t:t>\alpha_k(\omega),\ x(t,\omega)=N+1)\,(k>1)$$

由于 $R<\infty$, 易见 [1] $P(\alpha_k<\infty,\beta_k<\infty,k=1,2,\cdots)=1$. 今保存区间 $[\alpha_k(\omega),\beta_k(\omega)),(k=1,2,\cdots)$ 而抛去其它区间，并将保留区间向左按原序平移，使 $\alpha_1(\omega)$ 重合于 0, 并使各区间相联而不相交，所得为 Q_N 过程 $x_N(t,\omega),t\geqslant 0$(见 §16.1(16)), $P(x_N(0,\omega)=N)=1$. 显然 $\sigma_N(\omega)=\inf(t:x_N(t,\omega)=0)\leqslant\xi_0(\omega)$, 故 $E\sigma_N\leqslant E\xi_0$. 此与 (6) 矛盾，故 $P(\xi_0(\omega)=\infty)=1$.

其次，由 $P(\xi_0<\infty)\geqslant P(\xi_k<\infty)\prod\limits_{i=1}^{k}\frac{a_i}{a_i+b_i}$, 得

$$P(\xi_k(\omega)=\infty)=1\quad(k\in E)\tag{7}$$

今如说定理不真，即对某 $\varphi\geqslant 0$, 有 $P(x(\tau_\varphi)=\infty)>0$, 则必存在 $k\in E$, 使 $P(x(\tau_\varphi)=\infty,x(\varphi)=k)>0$, 故 $P(\xi_k<\infty)\geqslant P(x(\tau_\varphi)=\infty,\ x(\varphi)=k)>0$. 此与 (7) 矛盾. □

系 1 如 $S=\infty$, 则存在 $\Omega_0,P(\Omega_0)=1$, 使 $\omega\in\Omega_0$ 时，$t-$ 集 $H_\omega=(t:\lim\limits_{s\downarrow t}x(s,\omega)=\infty$, 而且存在 $\varepsilon>0$, 使在 $(t,t+\varepsilon)$ 中无飞跃点) 是空集.

证 只要令 $\Omega_0=\bigcap_k(\omega:\xi_k(\omega)=\infty)$. □

反之，如 $S<\infty$, 由下面 §6 系 2, 知存在 Q 过程使定理 2 中结论不成立，故 $S=\infty$ 是不可能"连续"流入有穷状态的充要条件 (参看 §5 中定理 2 及定理 3), 这一结果在构造论中会起到重要作用.

§17.3 一般 Q 过程换为 Doob 过程

(一) 是否可变任一 Q 过程为 Doob 过程？本节给出一般方法. 此时 Q 不变而转移概率的变化则可控制得很小 [2].

设 Q 为保守矩阵 (见 §13.3(12)), 而且 $q_i>0$, 一切 $i\in E$; 称矩阵 Q 为 **原子的**, 如满足

$$P(\xi_n=j|\xi_{n-1}=i)=\frac{q_{ij}}{q_i},\quad(i,j\in E)\tag{1}$$

的马氏链 $(\xi_n)(n\geqslant 0)$ 具有性质：对任一集 $R\subset E$, 不论开始分布如何，存在正整数 $N(=N(\omega))$, 使

$$P(\xi_n\in R,b\geqslant N)=0\text{ 或 }1\tag{2}$$

称 Q**过程为原子的**, 如 Q 是原子的；而由 (1) 定义的马氏链 (ξ_n) 则称为此 Q 过程的嵌入马氏链.

---

[1]这也可从 §3 定理 2 证 (i) 推出.

[2]参看 §4 定理 3 的证明.

易见生灭过程是原子的. 实际上, 以 A 表 (2) 中左方括号中的 $\omega-$ 集, A 是 (ξ_n) 的不变集, 仿 §15.2(16), 得

$$
\begin{aligned}
P_i(A) &= \frac{a_i}{c_i}P_{i-1}(A) + \frac{b_i}{c_i}P_{i+1}(A) \quad (i>1)\\
P_0(A) &= P_1(A)
\end{aligned}
$$

解之得 $P_i(A) \equiv c$, 从而 $P_i(A) \equiv 0$ 或 $=1(i \in E)$, 故 $P(A)=0$ 或 1.

今设 $x(t,\omega), t \geqslant 0$ 为可分的 Borel 可测齐次马氏链, τ 为其第一个飞跃点; 又设 ζ 为马氏时刻, $P(\zeta<\infty)=1$, $P(x(\zeta)=\infty)=0$, $\tau_\zeta^{(n)}$ 为 ζ 后的第 n 个跳跃点, $\tau_\zeta=\lim\limits_{n\to\infty}\tau_\zeta^{(n)}$ 是 ζ 后的第一个飞跃点, 易见 $\tau_\zeta^{(n)}$ 为马氏时刻.

定理 1 如 Q 过程 $x(t,\omega), t \geqslant 0$ 是原子的, 且 $P(\tau<\infty)=1$, 则

$$
P(\theta_{\tau_\zeta}B|\,\mathcal{B}_{[0,\tau_\zeta)}) = c \tag{3}
$$

这里 $B \in \mathcal{B}_{[0,\infty)}$; 又 $\mathcal{B}_{[0,\tau_\zeta)}$ 是含一切 $\mathcal{B}_{[0,\tau_\zeta^{(n)}]}(n \geqslant 0)(\tau_\zeta^{(0)}=\zeta)$ 的最小 $\sigma-$ 代数; C 为不依赖于 ζ 的常数.

证 除去一 0 测集后, $\tau_\zeta^{(n)} < \tau_\zeta^{(n+1)}$, $\Omega_{\tau_\zeta^{(n)}} = \Omega_{\tau_\zeta^{(n+1)}}$. 先证 $\mathcal{B}_{[0,\tau_\zeta^{(n)}]} \subset \mathcal{B}_{[0,\tau_\zeta^{(n+1)}]}$. 任取 $A \in \mathcal{B}_{[0,\tau_\zeta^{(n)}]}$, 则 $A \subset \Omega_{\tau_\zeta^{(n+1)}}$, 又 [1]

$$
\begin{aligned}
(A, \tau_\zeta^{(n+1)} \leqslant t) &= (A, \tau_\zeta^{(n)} \leqslant t) \cap (\tau_\zeta^{(n+1)} \leqslant t,\ \tau_\zeta^{(n)} \leqslant t)\\
&= (A, \tau_\zeta^{(n)} \leqslant t) \cap \bigcup_{v=1}^{\infty}\bigcap_{u=v}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^u-1}\left[\left(\frac{(k-1)t}{2^u} < \tau_\zeta^{(n)} \leqslant \frac{kt}{2^u}\right)\right.\\
&\qquad \left.\cap\left(\text{存在} j, k<j\leqslant 2^u, \text{使} x\left(\frac{jt}{2^u}\right) \neq x\left(\frac{kt}{2^u}\right)\right)\right] \in \mathcal{B}_{[0,t]}
\end{aligned}
$$

故 $A \in \mathcal{B}_{[0,\tau_\zeta^{(n+1)}]}$. 于是 $\mathcal{B}_{[0,\tau_\zeta^{(n)}]} \uparrow \mathcal{B}_{[0,\tau_\zeta)}$. 由强马氏性, 得

$$
P(\theta_{\tau_\zeta}B|\,\mathcal{B}_{[0,\tau_\zeta)}) = \lim_{n\to\infty}P(\theta_{\tau_\zeta}B|\,\mathcal{B}_{[0,\tau_\zeta^{(n)}]}) = \lim_{n\to\infty}P_{x(\tau_\zeta^{(n)})}](\theta_\tau B) \tag{4}
$$

任意取实数 $\alpha>0$, 令 $R=(i: P_i(\theta_\tau B)>\alpha)$, 由 (4)

$$
\begin{aligned}
&P(\omega: P(\theta_{\tau_\zeta}B|\mathcal{B}_{[0,\tau_\zeta)})>\alpha)\\
&\quad = P(\omega: \text{存在} N(=N(\omega)), \text{使} n \geqslant N \text{时}, x(\tau_\zeta^{(n)}) \in R)
\end{aligned}
$$

然而 $(x(\tau_\zeta^{(n)}))(n=0,1,2,\cdots)$ 是 Q 过程的嵌入马氏链, 开始分布为 $r_i=P(x(\zeta)=i)(i\geqslant 0)$. 由原子性得

$$
P(\omega: P(\theta_{\tau_\zeta}B|\,\mathcal{B}_{[0,\tau_\zeta)})>\alpha) = 0 \text{ 或 } 1
$$

由于 α 为任一正数, 故以概率 1

$$
P(\theta_{\tau_\zeta}B|\,\mathcal{B}_{[0,\tau_\zeta)}) = C(\zeta)
$$

[1] (A,B) 表 $A\cap B$.

这里 $C(\zeta)$ 表一常数，它可能依赖于 ζ. 更精确些，可能依赖于开始分布 $r_i = P(x(\zeta) = i)(i \in E)$. 利用马氏链理论中下列简单事实：设 (x_n) 为马氏链，f 为实值函数，如对任意开始分布，$f(x_n)$ 当 $n \to \infty$ 时以概率 1 收敛于常数，则此常数与开始分布无关[1]. 因此，在此事实中取 $x_n = x(\tau_\zeta^{(n)}), f(x_n) = P_{x_n}(\theta_\tau B)$, 即得 $C(\zeta)$ 与 ζ 无关. □

由此定理可见，事件 $\theta_{\tau_\zeta} B$ 与 $\mathscr{B}_{[0,\tau_\zeta)}$ 中的事件独立.

(二) 现在进一步设 Q 为生灭矩阵而且 $R < \infty$, 用迭代法定义

$$\tau_1(\omega)(=\tau(\omega))\text{为}x(t,\omega)\text{的第一个飞跃点} \tag{5}$$

$$\beta_1^{(n)}(\omega) = \inf(t : t \geqslant \tau_1(\omega), x(t,\omega) \leqslant n) \tag{6}$$

如 $\tau_{m-1}(\omega), \beta_{m-1}^{(n)}(\omega)$ 已定义. 则令

$$\tau_m(\omega)\text{为}\beta_{m-1}^{(n)}(\omega)\text{后的第一个飞跃点} \tag{7}$$

$$\beta_m^{(n)}(\omega) = \inf(t : t \geqslant \tau_m(\omega), x(t,\omega) \leqslant n) \tag{8}$$

此外，令 $\beta_{mk}^{(n)}(\omega)$ 为 $\beta_m^{(n)}(\omega)$ 后的第 k 个跳跃点.

对 Q 过程 $x(t,\omega), t \geqslant 0$ 施行 $C(\tau_m(\omega), \beta_m^{(n)}(\omega))$ 变换后，所得过程记为 $x_n(t,\omega), t \geqslant 0$.

定理 2 如 $R < \infty$, 则 $x_n(t,\omega)$ 为 $(Q, V^{(n)})$ 过程，其中 $V^{(n)} = (v_0^{(n)}, v_1^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)})$ 满足 §1(14).

证 为证此只需要证明下列结论：

(i) 对一切 $n, m = 1, 2, \cdots, P(\beta_m^{(n)} < \infty) = 1$;

(ii) 对任意固定的 $n \geqslant 1, x(\beta_m^{(n)})(m = 1, 2, \cdots)$ 独立同分布，而且 $v_i^{(n)} = P(x(\beta_m^{(n)}) = i)$ 满足 §1(14);

(iii) 对任意固定的 $n \geqslant 1$, 随机变量族

$$(x(\beta_{mk}^{(n)}); (\beta_{m,k+1}^{(n)} - \beta_{mk}^{(n)}), k = 0, 1, 2, \cdots) \quad (\beta_{m0}^{(n)} = \beta_m^{(n)})$$

不依赖于随机变量族

$$(x(\beta_{jk}^{(n)}); \beta_{jk}^{(n)}, j = 0, 1, \cdots, m-1; \quad k = 0, 1, 2, \cdots)$$

如果这些结论得以证明，则由于 $x_n(t,\omega), t \geqslant 0$ 的密度矩阵是 Q(这由 Q 中元的概率意义推出，见 §13.2 定理 5,6.) 而且在飞跃点上的分布为 $P(x(\beta_m^{(n)}) = i) = v_i^{(n)} (0 \leqslant i \leqslant n)$, 故它是 $(Q, V^{(n)})$ 过程.

(i)–(iii) 的证明分成四步：

(A) 由 $R < \infty$, 存在 $S > 0$ 及 $\ell \in E$, 使

$$P(\beta_1^{(\ell)} < \infty) \geqslant P(\tau_1 < s, x(s) \leqslant \ell) > 0 \tag{9}$$

由此可见[2] 存在 $T > 0, \alpha > 0$, 使对任一 $k \in E$, 有 $P_k(\beta_1^{(\ell)} \leqslant T) \geqslant \alpha$. 从而根据 §2 引理 1 立得 $E\beta_1^{(\ell)} < \infty$, 故有 $P(\beta_1^{(\ell)} < \infty) = 1$. 今考虑 $y(t,\omega) = x(\beta_1^{(\ell)}(\omega) + t, \omega), t \geqslant 0$, 由关于

---

[1] 实际上，先设开始分布 $u = (u_i)$ 满足 $u_i > 0$, 一切 i, 则由 $P(f(x_n) \to c(u)) = 1$ 得 $P_i(f(x_n) \to c(u)) = 1$, $c(u)$ 为可能依赖于 u 的常数. 另方面，由假定 $P_i(f(x_n) \to c(d_i)) = 1$, d_i 表集中于单点 i 上之分布，故 $c(u) = c(d_i)$. 今设 u' 为任意分布，则至少存在一 i, 使 $u'_i > 0$, 重复上推理得 $c(u') = c(d_i) = c(u)$.

[2] 实际上，由 (9) 至少有一 $j \in E$ 使 $P_j(\beta_1^{(\ell)} < \infty) > 0$; 从而由 $R < \infty$ 知 $P_0(\beta_1^{(\ell)} < \infty) > 0$. 故有 T, α 使 $P_0(\beta_1^{(\ell)} \leqslant T) \geqslant \alpha$, 于是 $P_k(\beta_1^{(\ell)} \leqslant T) \geqslant P_0(\beta_1^{(\ell)} \leqslant T) \geqslant \alpha$.

$\beta_1^{(\ell)}$ 的强马氏性它也是 Q 过程. 仿 (6) 对此 $y(t,\omega)$ 定义的 $\beta_1^{(\ell)}(\omega)$ 记为 $\beta_{1y}^{(\ell)}(\omega)$, 则由上知 $P(\beta_{1y}^{(\ell)}(\omega) < \infty) = 1$. 于是由 $\beta_2^{(\ell)}(\omega) = \beta_1^{(\ell)}(\omega) + \beta_{1y}^{(\ell)}(\omega)$ 得 $P(\beta_2^{(\ell)} < \infty) = 1$. 如此继续, 得证 $P(\beta_m^{(\ell)} < \infty) = 1(m \geqslant 1)$. 既然当 $n \geqslant \ell$ 时, $\beta_m^{(n)}(\omega) \leqslant \beta_m^{(\ell)}(\omega)$, 故 (i) 对 $n \geqslant \ell$ 正确.

(B) 固定 $n(\geqslant \ell)$. 令 $\tau_0 = 0$. 取 $B_i = (x(\beta_0^{(n)}) = i)$, 并于定理 1 中令 $\zeta(\omega) = \beta_{m-1}^{(n)}(\omega)(m = 2,3,\cdots,)$. 得知诸事件

$$\theta_{\tau_m} B_i = (x(\beta_m^{(n)}) = i) \quad (i = 0,1,\cdots,n)$$

与 $\mathcal{B}_{[0,\tau_m)}$ 中的事件独立, 特别与事件 $x(\beta_j^{(n)}) = i, j < m, i = 0,1,\cdots,n$ 及其交独立, 从而诸 $x(\beta_m^{(n)})(m \geqslant 1)$ 相互独立. 再在定理 1 中顺次令 $\zeta(\omega) = 0, \zeta(\omega) = \beta_1^{(n)}(\omega), \zeta(\omega) = \beta_2^{(n)}(\omega), \cdots$, 可见诸事件 $\theta_{\tau_1} B_i = (x(\beta_1^{(n)}) = i), \theta_{\tau_2} B_i = (x(\beta_2^{(n)}) = i) \cdots$ 有相同的概率.

(C) 为证 (iii) 对 $n(\geqslant \ell)$ 成立, 只需证 $(x(\beta_{mk}^{(n)}), \beta_{mk+1}^{(n)} - \beta_{mk}^{(n)}, k = 0,1,2,\cdots)$ 与 $\mathcal{B}_{[0,\tau_m)}$ 中的事件独立. 对任二组整数 $k_1 < k_2 < \cdots < k_u$, $r_1 < r_2 < \cdots < t_v$, 有

$$(x(\beta_{mk_1}^{(n)}) = i_1, \cdots, (x(\beta_{mk_u}^{(n)}) = i_u; \beta_{mr_1+1}^{(n)} - \beta_{mr_1}^{(n)} > t_1, \cdots, \beta_{mr_v+1}^{(n)} - \beta_{mr_v}^{(n)} > t_v) = \theta_{\tau_m} B$$

其中 $B = (x(\beta_{0k_1}^{(n)} = i_1, \cdots, x(\beta_{0k_u}^{(n)} = i_u;$

$$\beta_{0r_1+1}^{(n)} - \beta_{0r_1}^{(n)} > t_1, \cdots, \beta_{0r_v+1}^{(n)} - \beta_{0r_v}^{(n)} > t_v)$$

然后仿 (B) 利用定理 1 即可.

(D) 证 (i),(ii),(iii) 中的结论对任一 $n(\geqslant 1)$ 成立. 只要证 $P(\beta_k^{(\ell)} < \infty) = 1$ 即可. 如 $v_1^{(\ell)} = P(x(\beta_1^{(\ell)}) = 1) > 0$. 则由 (A) 及 (B) 得 $P(\beta_1^{(\ell)} < \infty) = v_1^{(\ell)} \sum\limits_{n=0}^{\infty}(1 - v_1^{(\ell)})^n = 1$; 如 $v_1^{(\ell)} = 0$, 则取 $k(\leqslant \ell)$, 使 $v_k^{(\ell)} > 0$, 于是 $P(\beta_1^{(1)} < \infty) = v_k^{(\ell)} c_{k1} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty}(1 - v_k^{(\ell)} c_{k1})^n = 1$. 然后利用 (A) 中之方法得证 $P(\beta_1^{(1)} < \infty) = 1(k \geqslant 1)$. 故 (i) 完全得证. 为完全证明 (ii),(iii), 只要在 (B),(C) 中以 1 换 ℓ; 最后, 注意 $g_{n+1,n}(x_{n+1}(t,\omega)) = x_n(t,\omega)$, 故 $(v_i^{(n)})$ 满足 §1(14). □

对于 $R < \infty, S = \infty$ 的 Q, 尚可如下把 Q 过程变为 Doob 过程, 代替 (5)–(8), 令

$$\tau_1(\omega)\text{为}x(t,\omega)\text{的第一个飞跃点} \tag{10}$$

$$\alpha_1^{(n)}(\omega) = \inf(t : t \geqslant \tau_1(\omega), t\text{为飞跃点}, x(t,\omega) \leqslant n) \tag{11}$$

$$\tau_m(\omega)\text{为}\alpha_{m-1}^{(n)}(\omega)\text{后的第一个飞跃点} \tag{12}$$

$$\alpha_m^{(n)}(\omega) = \inf(t : t \geqslant \tau_m(\omega), t\text{为飞跃点}, x(t,\omega) \leqslant n) \tag{13}$$

此外, 令 $\alpha_{mk}^{(n)}(\omega)$ 为 $\alpha_m^{(n)}(\omega)$ 后的第个 k 跳跃点.

对 Q 过程 $x(t,\omega), t \geqslant 0$ 施行 $C(\tau_m(\omega), \alpha_m^{(n)}(\omega))$ 变换后, 所得过程也记为 $x_n(t,\omega), t \geqslant 0$.

定理 3 设 $R < \infty, S = \infty$. 则 $x_n(t,\omega), t \geqslant 0(n \geqslant \ell, \ell$ 为某非负数) 为 $(Q, \Phi^{(n)})$ 过程, 其中 $\Phi^{(n)} = (\varphi_0^{(n)}, \varphi_1^{(n)}, \cdots, \varphi_n^{(n)})$ 满足 §1(8).

证 取 $\varphi > 0$, 使 $P(\tau_1 < \varphi) > 0$. 由 §2 定理 2, $P(x(\tau_\varphi) \neq \infty) = 1$, 这里 $\tau_\varphi(\omega)$ 是 φ 以前的最后一个飞跃点. 故存在 $\ell \in E$, 使 $P(\tau_1 \leqslant \tau_\varphi, x(\tau_\varphi) = \ell) = P(\tau_1 < \varphi, x(\tau_\varphi) = \ell) > 0$, 从而

$$P(\alpha_1^{(\ell)} < \infty) \geqslant P(\tau_1 \leqslant \tau_\varphi, x(\tau_\varphi) = \ell) > 0$$

故得到了与 (9) 类似的式子, 然后只要逐句重复上定理的证明至 (D) 以前, 并作显然的改变即可. □

§17.4 $S<\infty$ 时 Q 过程的构造

(一) 固定任一生灭矩阵 Q, 使 $R<\infty$. 考虑 §1 中方程组 (14), 任意给定 $v_1^{(1)}, 0 \leqslant v_1^{(1)} \leqslant 1$, 则 $v_0^{(1)}$ 唯一决定；如果 $(v_0^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)})$ 已求出，则任意给定 $v_{n+1}^{(n+1)}, 0 \leqslant v_{n+1}^{(n+1)} \leqslant 1$ 后，可唯一决定 $(v_0^{(n+1)}, \cdots, v_{n+1}^{(n+1)})$. 因此给出一数列 $(v_n^{(n)})$ 后 (以后简记为 (v_n), 即 $v_n = v_n^{(n)}$), 可唯一决定 §1 中 (14) 的一组解. 为使此组解中每 $(v_0^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)})$ $(n=1,2,\cdots)$ 均是一概率分布，不难看出，充要条件是 (v_n) 满足条件

$$1 \geqslant v_1 \geqslant 0$$

$$1 \geqslant v_n \geqslant \frac{v_{n+1}(z-z_{n+1})}{(z-z_n)-v_{n+1}(z_{n+1}-z_n)} \geqslant 0, \quad (n \geqslant 1) \tag{1}$$

由 §3 定理 2(ii), 立得

引理 1 设已给 Q 过程 $x(t,\omega), t \geqslant 0$, 使 $R<\infty$, 则序列 (v_n)

$$v_n = P(x(\beta_1^{(n)}) = n), \quad n \geqslant 1 \tag{2}$$

满足 (1).

本节中，以下恒设 $R<\infty, S<\infty$.

重要的是，以后会证明：设已给满足 (1) 的序列 (v_n), 则必存在 Q 过程 $x(t,\omega), t \geqslant 0$, 满足 (2), 而且此过程是唯一的. 为此要作相当准备.

设已给一列满足 (1) 的 (v_n), 它决定 §1 (14) 的一组解记为 $(V^{(n)})$, $V^{(n)} = (v_0^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)})$. 由 §1 引理 4, 可在某空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上作一列 $(Q, V^{(n)})$ 过程 $x_n(t,\omega), t \geqslant 0 (n \geqslant 1)$, 并且

$$g_{nm}(x_n(t,\omega)) = x_m(t,\omega), \ (n \geqslant m) \tag{3}$$

换言之, 对 $x_n(t,\omega)$ 施行 $C(\tau_i^{(n,m)}(\omega), \beta_i^{(n,m)}(\omega))$ 变换后即得 $x_m(t,\omega)$, 这里 $\tau_i^{(n,m)}(\omega), \beta_i^{(n,m)}(\omega))$ 仿 §3 中 (5)–(8) 对过程 $x_n(t,\omega)$ 定义，即

$$\tau_1^{(n,m)}(\omega) \text{为} x_n(t,\omega) \text{的第一个飞跃点} \tag{4}$$

$$\beta_1^{(n,m)}(\omega) = \inf(t: t \geqslant \tau_1^{(n,m)}(\omega), x_n(t,\omega) \leqslant m) \tag{5}$$

$$\tau_i^{(n,m)}(\omega) \text{为} \beta_{i-1}^{(n,m)}(\omega) \text{ 后的第一个飞跃点} \tag{6}$$

$$\beta_i^{(n,m)}(\omega) = \inf(t: t \geqslant \tau_i^{(n,m)}(\omega), x_n(t,\omega) \leqslant m) \tag{7}$$

$$\tau_i^{(n)}(\omega) \text{为} x_n(t,\omega) \text{的第 } i \text{ 个飞跃点} \tag{8}$$

$$\tau_{ij}^{(n)}(\omega) \text{为} \tau_i^{(n)}(\omega) \text{后的第 } j \text{ 个飞跃点} \tag{9}$$

先考虑一特殊情况，即 $v_n = 1 (n \geqslant 1)$ 时，此 (v_n) 所决定的 §1 (14) 的解记为 $(\pi^{(n)})$, 显然

$$\pi^{(n)} = (\pi_0^{(n)}, \cdots, \pi_{n-1}^{(n)}, \pi_n^{(n)}) = (0, \cdots, 0, 1) \tag{10}$$

引理 2 对 $(Q, \pi^{(n)})$ 过程 $x_n(t,\omega)$, $t \geqslant 0$, 令 $\xi^{(n,m)}(\omega)$ 表使 $\beta_i^{(n,m)}(\omega) < \beta_1^{(n,0)}(\omega)$ 的 i 的个数，则

$$E\xi^{(n,m)}(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} P(\beta_i^{(n,m)} < \beta_1^{(n,0)}) = \frac{Z}{Z - Z_m} \tag{11}$$

这里 Z 及 Z_m 由 §16.1(7) 定义.

证 定义 $\eta_i(\omega)=1$ 或 0, 视 $\beta_i^{(n,m)}<\beta_1^{(n,0)}$ 与否而定. 则 $E\xi^{(n,m)}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}E\eta_i=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(\beta_i^{(n,m)}<\beta_1^{(n,0)})$. 但 $P(\beta_i^{(n,m)}<\beta_1^{(n,0)})=(1-c_{m0})^{i-1}$, 故由 §16.1(25) 并回忆 $c_{m0}=q_m(0)$, 得

$$E\xi^{(n,m)}=\sum_{i=1}^{\infty}(1-c_{m0})^{i-1}=\frac{1}{c_{m0}}=\frac{Z}{Z-Z_m}\ \square$$

对 $(Q,\pi^{(n)})$ 过程 $x_n(t,\omega),t\geqslant 0$, 定义

$$T^{(n,r)}(\omega)=\beta_1^{(n,r)}(\omega)-\tau_1^{(n)}(\omega)\quad(n>r)\tag{12}$$

故 $T^{(n,r)}$ 是自 $\tau_1^{(n)}$ 算起, 初次到达 r 的时间. 注意 $P(x_n(\tau_1^{(n)})=n)=1$, 故 $ET^{(n,r)}$ 是在"质点自 n 出发, 到达 ∞ 后立刻回到 n"的条件下, 质点初次到达 r 的平均时间. 因此, 它不超过在"自 n 出发, 到达 ∞ 后'连续地'回到有穷状态"的条件下. 此时间的平均值 $\sum\limits_{k=r+1}^{\infty}e_k$(见 §16.1(5)). 此直观上明显的事实可如下证明.

引理 3 对 $(Q,\pi^{(n)})$ 过程, $ET^{(n,r)}\leqslant\sum\limits_{k=r+1}^{\infty}e_k\leqslant S(n>r\geqslant 0)$.

证 首先注意一简单事实: 设有差分方程

$$\mathcal{D}_k=\frac{1}{c_k}(1-e^{-c_k\varepsilon})+\frac{a_k}{c_k}\mathcal{D}_{k-1}+\frac{b_k}{c_k}\mathcal{D}_{k+1}\ (0<n<k<N)\tag{13}$$

其中 $c_k=a_k+b_k,a_k>0,b_k>0,0<\varepsilon\leqslant\infty$(如 $\varepsilon=\infty$, 则令 $e^{-c_k\varepsilon}=0$, 在边值条件 $\mathcal{D}_n=0,\mathcal{D}_N=c(c\geqslant 0)$ 下之解记为 $(\mathcal{D}_n^{(c)},\mathcal{D}_{n+1}^{(c)},\cdots,\mathcal{D}_N^{(c)})$, 则 $\mathcal{D}_k^{(c)}\geqslant\mathcal{D}_k^{(0)}(n\leqslant k\leqslant N)$.

今以 f_i 表对 $(Q,\pi^{(n)})$ 过程自 i 出发初次回到 $i-1$ 的平均时间, 仿 §16.1(19), 得

$$f_i=\frac{a_i}{c_i}\cdot\frac{1}{c_i}+\frac{b_i}{c_i}\left(\frac{1}{c_i}+f_{i+1}+f_i\right)\quad(1\leqslant i\leqslant n)\tag{14}$$

或 $f_i=\frac{1}{a_i}+\frac{b_i}{a_i}f_{i+1}(1\leqslant i\leqslant n)$. 故如已知 f_{i+1}, 则

$$f_i=\frac{1}{a_i}+\sum_{k=0}^{n-1-i}\frac{b_ib_{i+1}\cdots b_{i+k}}{a_ia_{i+1}\cdots a_{i+k}a_{i+k+1}}+\frac{b_ib_{i+1}\cdots b_n}{a_ia_{i+1}\cdots a_n}f_{n+1}\tag{15}$$

故如能证 $f_{n+1}\leqslant e_{n+1}$, 则由 (15) 及 §16.1(5) 立得 $f_i\leqslant e_i$, 而

$$ET^{(n,r)}\leqslant\sum_{i=r+1}^{\infty}f_i\leqslant\sum_{i=r+1}^{\infty}e_i=S$$

为证 $f_{n+1}\leqslant e_{n+1}$, 考虑 $N>k>n$, 以 $\overline{\mathcal{D}}_k^{(N)}$ 表自 k 出发初次到达 n 的平均时间, 但当到达 N 时, 立刻回到 n(更精确些, $\overline{\mathcal{D}}_k^{(N)}$ 为对 (Q,π_n) 过程, 自 k 出发初次到达含二点之集 $\{n,N\}$ 的平均时间); 而 $\overline{\overline{\mathcal{D}}}_k^{(N)}$ 表对 Q_N 过程 (见 §16.1(16)) 自 k 出发初次到达 n 的平均时间. 易见 $(\overline{\mathcal{D}}_k^{(N)})$ 与 $(\overline{\overline{\mathcal{D}}}_k^{(N)})$ $(n\leqslant k\leqslant N)$ 分别是 (13), 当 $\varepsilon=\infty$ 时在边界条件 $\mathcal{D}_n=0,\mathcal{D}_N=0$ 及 $\mathcal{D}_n=0,\mathcal{D}_N=c\left(\geqslant\frac{1}{a_N+b_N}\right)$ 下的解, 故由上述事实 $\overline{\mathcal{D}}_{n+1}^{(N)}\leqslant\overline{\overline{\mathcal{D}}}_{n+1}^{(N)}$. 但 $\overline{\mathcal{D}}_{n+1}^{(N)}\uparrow f_{n+1}$; $\overline{\overline{\mathcal{D}}}_{n+1}^{(N)}\uparrow e_{n+1},N\to\infty$ [注意 $\overline{\overline{\mathcal{D}}}_{n+1}^{(N)}=e_{n+1}^{(N)}$, 见 §16.1(20) 上面一式], 故 $f_{n+1}\leqslant e_{n+1}$. $\square$

对任 $\varepsilon, 0<\varepsilon\leqslant\infty$, 考虑函数

$$f_\varepsilon(x)=x,\quad 如0\leqslant x<\varepsilon \\ =\varepsilon\quad 如x\geqslant\varepsilon \tag{16}$$

设 $\xi(\geqslant 0)$ 是具有分布密度 $ce^{-cy}(c>0)$ 的随机变量，则易见 $Ef_\varepsilon(\xi)=\frac{1}{c}(1-e^{-c\varepsilon})$. 特别，$Ef_\infty(\xi)=\frac{1}{c}$.

对 $(Q,\pi^{(n)})$ 过程及 $n>r$, 定义

$$T_\varepsilon^{(n,r)}(\omega)=\sum_{\tau_1^{(n)}\leqslant\tau_{ij}^{(n)}<\beta_1^{(n,r)}} f_\varepsilon(\tau_{ij+1}^{(n)}(\omega)-\tau_{ij}^{(n)}(\omega)) \tag{17}$$

特别，$T_\infty^{(n,r)}=T^{(n,r)}$. 直觉地说，将 $(Q,\pi^{(n)})$ 过程 $x_n(t,\omega), t\geqslant 0$ 的常数区间如下变形：如其长不小于 ε, 则缩短之使其长变为 ε, 如长小于 ε, 则保留不变. 于是 $T_\varepsilon^{(n,r)}(\omega)$ 是 $[\tau_1^{(n)}(\omega),\beta_1^{(n,r)}(\omega))$ 中变形后的区间的总长.

引理 4 对 $(Q,\pi^{(n)})$ 过程,

$$ET_\varepsilon^{(n,r)}\leqslant\sum_{k=r+1}^{\infty}\left[\frac{1}{a_k}(1-e^{-c_k\varepsilon})+\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{b_kb_{k+1}\cdots b_{k+\ell}}{a_ka_{k+1}\cdots a_{k+\ell}}\cdot\frac{(1-e^{-c_{k+\ell+1}\varepsilon})}{a_{k+\ell+1}}\right]\leqslant S \tag{18}$$

证 $(Q,\pi^{(n)})$ 过程的 k 区间经如上变形后，有平均长度为 $E_kf_\varepsilon(\beta)=\frac{1}{c_k}(1-e^{c_k\varepsilon})$ [1], 然后重复引理 3 的证明，只要换 $\frac{1}{c_k},\frac{1}{a_k}$ 为 $\frac{1}{c_k}(1-e^{-c_k\varepsilon})$ 及 $\frac{1}{a_k}(1-e^{-c_k\varepsilon})$ 即可. □

由于 (3), 对固定 $\varepsilon>0$, 有 $T_\varepsilon^{(n,0)}(\omega)\leqslant T_\varepsilon^{(n+1,0)}(\omega)$, 令 $T_\varepsilon(\omega)=\lim_{n\to\infty}T_\varepsilon^{(n,0)}(\omega)$.

引理 5 对 $(Q,\pi^{(n)})$ 过程, $\lim_{\varepsilon\to 0}ET_\varepsilon(\omega)=0$; $P(\lim_{\varepsilon\to 0}T_\varepsilon(\omega)=0)=1$.

证 由

$$ET_\varepsilon^{(n,0)}\leqslant S_\varepsilon=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{a_k}(1-e^{-c_k\varepsilon})+\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{b_kb_{k+1}\cdots b_{k+\ell}(1-e^{-c_{k+\ell+1}\varepsilon})}{a_ka_{k+1}\cdots a_{k+\ell}a_{k+\ell+1}}\right]\leqslant S<\infty$$

得 $ET_\varepsilon\leqslant S_\varepsilon$, $\lim_{\varepsilon\to 0}ET_\varepsilon\leqslant\lim_{\varepsilon\to 0}S_\varepsilon=0$. 又由 $T_\varepsilon(\omega)$ 关于 ε 的单调性，存在 $\lim_{\varepsilon\to 0}T_\varepsilon(\omega)=T(\omega)\geqslant 0$. 根据积分单调定理 $ET(\omega)=\lim_{\varepsilon\to 0}ET_\varepsilon(\omega)=0$. 从而 $P(T(\omega)=0)=1$. □

今令

$$\left.\begin{aligned}L_{nm}^{(i)}(\omega)&=\beta_i^{(n,m)}(\omega)-\tau_i^{(n,m)}(\omega),\ 如\beta_i^{(n,m)}(\omega)<\beta_1^{(n,0)}(\omega)\\ &=0,\qquad\qquad\qquad\qquad 如\beta_i^{(n,m)}(\omega)>\beta_1^{(n,0)}(\omega)\end{aligned}\right\} \tag{17'}$$

故 $\sum_{i=1}^{\infty}L_{nm}^{(i)}(\omega)$ 是经 (3) 自 $x_n(t,\omega)$ 得 $x_m(t,\omega)$ 时，在 $[\tau_1^{(n)}(\omega),\beta_1^{(n,0)}(\omega)]$ 中所抛去区间之总长. 由 (3) 可见

$$\sum_{i=1}^{\infty}L_{nm}^{(i)}(\omega)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}L_{n+1,m}^{(i)}(\omega)$$

---

[1]注意 $P_k(\beta\leqslant t)=\begin{cases}1-e^{-c_kt}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$ β 为第一个跳跃点.

故存在 $L_m(\omega)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}L_{nm}^{(i)}(\omega)$.

引理 6 对 $(Q,\pi^{(n)})$ 过程, $\lim_{m\to\infty}EL_m(\omega)=0$, 又 $P(\lim_{m\to\infty}L_m(\omega)=0)=1$.

证 由 $(Q,\pi^{(n)})$ 过程 $x_n(t,\omega),t\geqslant 0$ 的构造 $\beta_i^{(n,m)}-\tau_i^{(n,m)}$ 不依赖[1] 于事件 $(\beta_i^{(n,m)}<\beta_1^{(n,0)})$, 而且 $\beta_i^{(n,m)}-\tau_i^{(n,m)}(i=1,2,\cdots)$ 同分布, 故由引理 2 及 $\tau_1^{(n,m)}(\omega)=\tau_1^{(n)}(\omega)$, 得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}EL_{nm}^{(i)}&=\sum_{i=1}^{\infty}E(\beta_i^{(n,m)}-\tau_i^{(n,m)}|\ \beta_i^{(n,m)}<\beta_1^{(n,0)})P(\beta_i^{(n,m)}<\beta_1^{(n,0)})\\&=\sum_{i=1}^{\infty}E(\beta_i^{(n,m)}-\tau_i^{(n,m)})P(\beta_i^{(n,m)}<\beta_1^{(n,0)})\\&=E(\beta_1^{(n,m)}-\tau_1^{(n,m)})\sum_{i=1}^{\infty}P(\beta_i^{(n,m)}<\beta_1^{(n,0)})\\&=E(\beta_1^{(n,m)}-\tau_1^{(n)})\frac{Z}{Z-Z_m}\end{aligned}\tag{18'}$$

再由引理 3 及 §16.1 (5), (7), 经简单计算后

$$\sum_{i=1}^{\infty}EL_{nm}^{(i)}\leqslant\sum_{k=m+1}^{\infty}e_k\cdot\frac{Z}{Z-Z_m}\leqslant Z\sum_{k=m}^{\infty}\frac{b_1b_2\cdots b_k}{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}\tag{19}$$

注意 $Z<b_0R<\infty$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_1b_2\cdots b_k}{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}<S<\infty$, 故

$$\lim_{m\to\infty}EL_m(\omega)=\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}EL_{nm}^{(i)}\right)=0$$

再由 $L_m(\omega)\geqslant L_{m+1}(\omega)$ 即得 $P(\lim_{m\to\infty}L_m(\omega)=0)=1$. □

由 (7) 及 (3), 可见 $\beta_i^{(n,0)}(\omega)\leqslant\beta_i^{(n+1,0)}(\omega)$, 故存在极限 $\beta_i^{(0)}(\omega)=\lim_{n\to\infty}\beta_i^{(n,0)}(\omega)$. 由定义 $P(\lim_{i\to\infty}\beta_i^{(n,0)}(\omega)=\infty)=1(n\geqslant 1)$, 即然 $\beta_i^{(n,0)}(\omega)\leqslant\beta_i^{(0)}(\omega)$, 故得

$$P(\lim_{i\to\infty}\beta_i^{(0)}(\omega)=\infty)=1\tag{20}$$

以下"几乎一切 t" 系对 Lebesgue 测度而言.

定理 1 以概率 $1,(Q,\pi^{(n)})$ 过程的样本函数 $x_n(t,\omega)$ 当 $n\to\infty$ 时几乎对一切 t 收敛.

证 除去一 0 测度集后, 可设对每一 $\omega\in\Omega,x_n(t,\omega)$ 在任一有限区间中只有有限多个 i 区间 $(n\geqslant 0,i\in E)$. 如向左平移使每 $x_n(t,\omega)$ 为常数的区间, 而且每区间平移的距离不大于 ε, 则在 $[0,\beta_1^{(n,0)}(\omega))$ 中. 使 $x_n(t,\omega)$ 不等于 $x_m(t,\omega)(n>m)$ 的点 t 所成区间的总长不超过 $\varepsilon+T_\varepsilon^{(n)}(\omega)<\varepsilon+T_\varepsilon(\omega)$. 固定 k, 取 $n>m>\ell(>k)$. 由于 $\beta_1^{(n,0)}(\omega)\geqslant\beta_1^{(k,0)}(\omega)$ 得

$$L(t:\ t\in[0,\beta_1^{(k,0)}(\omega)),x_n(t,\omega)\neq x_m(t,\omega))\leqslant L_\ell(\omega)+T_{L_\ell}(\omega)\tag{21}$$

令 $\Omega_0=(L_\ell(\omega)+T_{L_\ell}(\omega)\downarrow 0)(\ell\to\infty)$ 由引理 5,6 得 $P(\Omega_0)=1$. 固定 $\omega\in\Omega_0$. 由 (21) 知 $x_n(t,\omega)(=x_n(t))$ 在 $[0,\beta_1^{(k,0)})$ 中依测度 L 收敛, 故存在一列 $n_i\to\infty$, 使 $x_{n_i}(t)$ 在 $[0,\beta_1^{(k,0)})$

[1] 即对任意实数 a, 事件 $(\beta_i^{(n,m)}-\tau_i^{(n,m)}<a)$, $(\beta_i^{(n,m)}<\beta_1^{(n,0)})$ 独立.

中对几乎一切 t 收敛. 固定一收敛点 t_0. 由于 Doob 过程的相空间为 E, 故存在 $M \in E$, 使 $x_{n_i}(t_0) \to M, (i \to \infty)$. 由于 E 离散, 有正整数 L, 使

$$x_{n_i}(t_0) = M \quad (i \geqslant L) \tag{22}$$

今证存在正整数 L', 使 $n > L'$ 时, $x_n(t_0) = M$, 从而 $\{x_n(t_0)\}$ 收敛. 因为, 否则必存在一列 $m_i \to \infty$ 使

$$x_{m_i}(t_0) \neq M$$

由此式及 (22), 并根据 $g_{nm}(x_n(t,\omega)) = x_m(t,\omega)$, 即知在 $[0, t_0]$ 中, $x_M(t,\omega)$ 有无穷多个不同的 M 区间, 此与证明开始时所说的矛盾.

于是得证在 $[0, \beta_1^{(k,0)}(\omega))$ 中, 定理结论成立; 令 $k \to \infty$ 即得在 $[0, \beta_1^{(0)}(\omega))$ 中也成立; 同样得证在 $[0, \beta_i^{(0)}(\omega))$ 中成立; 再由 (20) 即得证定理. □

(二) 今考虑一般情况. 取 §1 (14) 的任一非负解 $V^{(n)} = (v_0^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)}), n \geqslant 1$. 下面看到, 在证 $(Q, V^{(n)})$ 过程列的收敛时, $(Q, \pi^{(n)})$ 过程列将在一定意义下起控制作用.

定理 2 以概率 $1, (Q, V^{(n)})$ 过程的样本函数 $x_n(t,\omega)$ 当 $n \to \infty$ 时几乎对一切 t 收敛.

证 如能证引理 5 及 6 对 $(Q, V^{(n)})$ 过程也成立, 则只需逐字重复定理 1 的证明即可.

象对 $(Q, \pi^{(n)})$ 过程列定义 $L_{nm}^{(i)}(\omega), T_\varepsilon^{(n,r)}(\omega)$ 等一样, 对 $(Q, V^{(n)})$ 过程列定义 $\overline{L}_{nm}^{(i)}(\omega)$, $\overline{T}_\varepsilon^{(n,r)}(\omega)$ 等, 只于其上加一短横线以表区别.

与推导 (18) 同样, 得

$$E\left(\sum_{i=1}^{\infty} \overline{L}_{nm}^{(i)}\right) = E(\overline{\beta}_1^{(n,m)} - \overline{\tau}_1^{(n,m)}) \cdot \sum_i P(\overline{\beta}_i^{(n,m)} < \overline{\beta}_1^{(n,0)}) \tag{23}$$

然而

$$\begin{aligned}
P(\overline{\beta}_i^{(n,m)} - \overline{\beta}_1^{(n,0)}) &= \sum_{\substack{dj=1 \\ (j=1,\cdots,i-1)}}^{m} P(\overline{\beta}_i^{(n,m)} < \overline{\beta}_1^{(n,0)} | x_n(\overline{\beta}_j^{(n,m)}) = d_j, j = 1, \cdots, i-1) \\
&\quad \times P(x_n(\overline{\beta}_j^{(n,m)}) = d_j, j = 1, \cdots, i-1) \\
&= \sum_{\substack{dj=1 \\ (j=1,\cdots,i-1)}}^{m} \bigcap_{j=1}^{i-1} (1 - c_{d_j 0}) P(x_n(\overline{\beta}_j^{(n,m)}) = d_j, j = 1, \cdots, i-1) \\
&\leqslant (1 - c_{m0})^{i-1} \sum_i P(\overline{\beta}_j^{(n,m)} < \overline{\beta}_1^{(n,0)}) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (1 - c_{m0})^{i-1} = \frac{Z}{Z - Z_m}
\end{aligned} \tag{24}$$

如果能够证明下列直觉上显然正确的事实: 质点自 $(0, \cdots, n)$ 中的状态出发, 每当到达 ∞ 时, 立即回到 $(0, \cdots, n)$, 这样运动直到初次[1] 到达 $(0, \cdots, m)(m < n)$ 的平均时间, 不大于它自 n 出发, 每当到达 ∞ 时, 立即回到 n, 如是运动直到初次到达 $(0, \cdots, m)$ 的平均时间. 换言之, 即

$$E(\overline{\beta}_1^{(n,m)} - \overline{\tau}_1^{(n,m)}) \leqslant E(\beta_1^{(n,m)} - \tau_1^{(n,m)}) \tag{25}$$

[1] 如自 $(0, \cdots, m)$ 出发, 则认为初次回到 $(0, \cdots, m)$ 的时间为 0.

则由 (23)–(25) 立得

$$E\left(\sum_{i=1}^{\infty}\overline{L}_{nm}^{(i)}\right)\leqslant E(\beta_1^{(n,m)}-\tau_1^{(n,m)})\frac{Z}{Z-Z_m} \tag{26}$$

从而 $(18')$ 对 $(Q,V^{(n)})$ 过程正确，故引理 6 对 $(Q,V^{(n)})$ 过程也正确.

为严格证明上列事实，利用乘积空间的技巧，可造 Ω，使在其上同时定义 $(Q,\pi^{(n)})$ 过程及一列独立随机变量 $(y_n(\omega))$，有相同的分布 $P(y_n(\omega)=i)=v_i^{(n)}$，$(i=0,\cdots,n)$. 将 $(Q,\pi^{(n)})$ 过程的样本函数自第一个飞跃点起至初次出现状态 $y_1(\omega)$ 的时刻止的那一段抛去，再将自下一飞跃点 (即出现 $y_1(\omega)$ 的时刻后的第一飞跃点) 起至以后初次出现状态 $y_2(\omega)$ 的时刻[1]止的那一段抛去. 如此继续，经平移后所得即 $(Q,V^{(n)})$ 过程. 因而已将 $(Q,V^{(n)})$ 过程嵌入于 $(Q,\pi^{(n)})$ 过程之中. 对此二过程，易见对几乎一切 $\omega\in\Omega$，有

$$\overline{\beta}_1^{(n,m)}(\omega)-\overline{\tau}_1^{(n,m)}(\omega)\leqslant\beta_1^{(n,m)}(\omega)-\tau_1^{(n,m)}(\omega)$$

甚至更一般地有

$$\overline{T}_{\varepsilon}^{(n,m)}(\omega)\leqslant T_{\varepsilon}^{(n,m)}(\omega)$$

因而得证 (25)，并且 $\overline{T}_{\varepsilon}^{(n,m)}(\omega)\leqslant T_{\varepsilon}^{(n,m)}(\omega)$; $\overline{T}_{\varepsilon}(\omega)\leqslant T_{\varepsilon}(\omega)$. 由于 $ET_{\varepsilon}(\omega)\to 0$ $(\varepsilon\to 0)$, $P(\lim\limits_{\varepsilon\to 0}T_{\varepsilon}(\omega)=0)=1$，即知引理 5 对 $(Q,V^{(n)})$ 过程成立. □

(三) 以 $x(t,\omega)$ 表 $(Q,V^{(n)})$ 过程列的极限. 由定理 2，对几乎一切 ω，存在 L(Lebesgue)0 测集 T_ω，当 $t\in T_\omega$ 时，$x(t,\omega)$ 无定义. 补定义

$$x(t,\omega)=\infty\quad t\in T_\omega \tag{27}$$

从而以概率 1，$x(t,\omega)$ 在 $[0,\infty)$ 有定义. 由于 $(Q,V^{(n)})$ 过程 $x_n(t,\omega),t\geqslant 0$ Borel 可测，故对 $i\in E,((t,\omega):x(t,\omega)=i)\in\overline{\mathcal{B}_1\times\mathcal{F}}$，这里 $\mathcal{B}_1$ 表 $[0,\infty)$ 中 Borel 集族，而 $\overline{\mathcal{B}\times\mathcal{F}}$ 则表 $\mathcal{B}_1\times\mathcal{F}$ 关于 $L\times P$ 的完全化 σ 代数. 因此

$$((t,\omega):x(t,\omega)=\infty)\in\overline{\mathcal{B}\times\mathcal{F}}$$

由定理 2，$L(t:x(t,\omega)=\infty)=0$ 对几乎一切 ω 成立，故由 Fubini 定理，存在 L 测度为 0 的集 T，使 $t\overline{\in}T$ 时，

$$P(\omega:x(t,\omega)=\infty)=0 \tag{28}$$

试证 (28) 对一切 $t\in[0,\infty)$ 成立.

实际上，由 (3) 可见，对 $\omega\in\Omega$ 及一切 n

$$x(t,\omega)=x_n(t,\omega),\quad t<\tau(\omega) \tag{29}$$

这里 $\tau(\omega)=\tau_1^{(n)}(\omega)$ 是第一个飞跃点. 由此易见

$$P(x(t)=i|\,x(0)=i)\geqslant e^{-(a_i+b_i)t}\to 1\quad(t\to 0) \tag{30}$$

[1]易见这些时刻以概率 1 有穷.

而且对任意给定的 $t>0,\eta>0$, 存在 $\delta>0$, 使 $\varepsilon<\delta$ 时，下二式成立：

$$|P(x(t)\neq\infty|\ x(0)=i,x(\varepsilon)=i)-P(x(t)\neq\infty|\ x(\varepsilon)=i)|<\eta \tag{31}$$

$$|P(x(t)\neq\infty|\ x(\varepsilon)=i)-P(x(t-\varepsilon)\neq\infty|\ x(0)=i)|<\eta \tag{32}$$

只要用到的条件概率有意义. 对 $t\in T$, 有

$$P(x(t)=j|\ x(0)=i)\geqslant P(x(t)=j|\ x(0)=i,\ x(\varepsilon)=i)\cdot P(x(\varepsilon)=i|\ x(0)=i) \tag{33}$$

$$\begin{aligned}P(x(t)\neq\infty|\ x(0)=i)&=\sum_j P(x(t)=j|\ x(0)=i)\\&\geqslant P(x(\varepsilon)=i|\ x(0)=i)\cdot P(x(t)\neq\infty|\ x(0)=i,x(\varepsilon)=i)\end{aligned} \tag{34}$$

今因 $L(T)=0, 0\bar{\in}T$, 故对 $\eta>0$, 存在 ε_1 使 $t-\varepsilon_1\bar{\in}T$, 同时使 (31),(32) 对 ε_1 成立，而且 $P(x(\varepsilon_1)=i|\ x(0)=i)>1-\eta$. 于是由 (34) 立得 $P(x(t)\neq\infty|\ x(0)=i)>(1-\eta)(1-2\eta)$. 由 η 的任意性， $P(x(t)\neq\infty|\ x(0)=i)=1$, 或 $P(x(t)=\infty)=0$.

定理 3 (i) $x(t,\omega),t\geqslant 0$ 是 Q 过程； (ii) 以 $P_{ij}^{(n)}(t)$ 及 $P_{ij}(t)$ 分别表 $(Q,V^{(n)})$ 过程 $x_n(t,\omega)$ 及 $x(t,\omega)$ 的转移概率，则

$$\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}(t)=P_{ij}(t).$$

证 如能证 $x(t,\omega),t\geqslant 0$ 是齐次马氏链，则由 (29) 及 Q 中元的概率意义知它是 Q 过程. 显然它的相空间是 $\overline{E}$. 由上述 $P(x(t,\omega)=\infty)=0$ 及定理 2, 对任一组 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_k$, 随机向量 $(x_n(t_1),x_n(t_2),\cdots,x_n(t_k))$ 当 $n\to\infty$ 时以概率 1 收敛于 $(x(t_1),x(t_2),\cdots,x(t_k))$ 故也依分布收敛，即

$$\lim_{n\to\infty}P(x_n(t_1)=i_1,\cdots,x_n(t_k)=i_k)=P(x(t_1)=i_1,\cdots,x(t_k)=i_k) \tag{35}$$

由此式并利用 $x_n(t,\omega),t\geqslant 0$ 是齐次马氏链，即知 $x(t,\omega),\ t\geqslant 0$ 也是齐次马氏链，而且 $\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}(t)=P_{ij}(t)$. □

过程 $x(t,\omega),t\geqslant 0$ 自然地称为 (Q,V) 过程，其中 $V=(v_n)$ 是满足 (1) 的任一序列. 回忆 §3(6), 有

定理 4 (Q,V) 过程 $x(t,\omega),t\geqslant 0$, 是满足

$$P(x(\beta_1^{(n)})=n)=v_n\quad(n\geqslant 0) \tag{36}$$

的唯一 Q 过程.

证 先证 (Q,V) 过程满足 (36). 设 $(v_0^{(n)},\cdots,v_n^{(n)}),n\geqslant 1$, 是 §1(14) 的任一非负解，利用 $c_{\ell+1,\ell}c_{\ell,\ell-1}=c_{\ell+1,\ell-1}$, 用归纳法易见

$$v_i^{(n)}=\frac{v_i^{(n+k)}}{\sum\limits_{j=0}^{n+k}v_j^{(n+k)}c_{jn}},\quad v_n^{(n)}=\frac{\sum\limits_{j=n}^{n+k}v_j^{(n+k)}c_{jn}}{\sum\limits_{j=0}^{n+k}v_j^{(n+k)}c_{jn}} \tag{37}$$

$k,n=1,2,\cdots,i=1,\cdots,n-1$. 今考虑 $(Q,V^{(k)})$ 过程 $x_k(t,\omega),t\geqslant 0$, 对此过程用 (5) 定义 $\beta_1^{(k,n)}$. 由 (3) $\beta_1^{(k,n)}(\omega)\leqslant\beta_1^{(k+1,n)}(\omega),(k>n)$. 容易看出, 以概率 1 有

$$\lim_{k\to\infty}\beta_1^{(k,n)}(\omega)=\beta_1^{(n)}(\omega)$$
$$\lim_{n\to\infty}x_k(\beta_1^{(k,n)})=x(\beta_1^{(n)})$$

根据 (37) 得

$$P(x(\beta_1^{(n)})=n)=\lim_{k\to\infty}P(x_k(\beta_1^{(k,n)})=n)=\lim_{k\to\infty}P(x_{n+k}(\beta_1^{(n+k,n)})=n)$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=n}^{n+k}v_j^{(n+k)}c_{jn}}{\sum\limits_{j=0}^{n+k}v_j^{(n+k)}c_{jn}}=v_n^{(n)}=v_n\quad(n\geqslant 0)$$

次证如 $\widetilde{x}(t,\omega),t\geqslant 0$, 为某满足 (36) 的可分 Borel 可测的 Q 过程, 则它与 (Q,V) 过程有相同的转移概率. 实际上, 利用 §3(5)–(8) 对 $\widetilde{x}(t,\omega)$ 定义 $(\tau_m,\beta_m^{(n)}),m\geqslant 1$, 并对它进行 $C(\tau_m,\beta_m^{(n)})$ 变换, 由 §3 定理 2, 所得过程 $x_n(t,\omega),t\geqslant 0$ 是 $(Q,V^{(n)})$ 过程. 由 (36), $v_n^{(n)}=v_n$. 根据定理 3, 它们的转移概率 $P_{ij}^{(n)}(t)$ 收敛于 (Q,V) 过程的转移函数 $P_{ij}(t)$.

另方面, 可证对任意固定的 $t\geqslant 0$, $P(\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t,\omega)=\widetilde{x}(t,\omega))=1$, 从而 $P_{ij}^{(n)}(t)\to\widetilde{P}_{ij}(t)$, ($\widetilde{P}_{ij}(t)$ 是 $\widetilde{x}(t,\omega)$ 的转移函数), 于是 $\widetilde{P}_{ij}(t)=P_{ij}(t)$. 为证此令

$$S_\infty^{(b)}(\omega)=(t:t\in[0,b],t\text{是 }\widetilde{x}(t,\omega)\text{ 的飞跃点})$$
$$S_i^{(b)}(\omega)=(t:t\in[0,b],x(t.\omega)=i)$$

则由 §2 定理 1 及 §14.2 系 4, 以概率 1 $S_\infty^{(b)}(\omega)$ 是 L 测度为 0 的闭集, 既然 $[0,b]=S_\infty^{(b)}(\omega)\cup\bigcup\limits_{i\neq\infty}S_i^{(b)}(\omega)$, 故以概率 1

$$\sum_{i\neq\infty}L(S_i^{(b)}(\omega))=b\tag{38}$$

根据 $x_n(t,\omega)$ 的定义, 在 $[0,b]$ 中, 它至少包含 $\widetilde{x}(t,\omega)$ 的对应于 $S_i^{(b)}(\omega),i\leqslant n$ 的段. 由于

$$x_n(t,\omega)=\widetilde{x}(t+\tau_t^{(n)},\omega),\quad t\in[0,b]\tag{39}$$

这里 $\tau_t^{(n)}(\omega)$ 是自 $\widetilde{x}(t,\omega)$ 变到 $x_n(t,\omega)$ 时, 自 $[0,b]$ 中所抛去的部分段的总长, 故

$$\tau_t^{(n)}(\omega)\leqslant\sum_{\substack{i\geqslant n+1\\ i\neq\infty}}L(S_i^{(b)}(\omega)),\quad t\in[0,b]$$

由 (38) 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_t^{(n)}(\omega)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\substack{i\geqslant n+1\\ i\neq\infty}}L(S_i^{(b)}(\omega))=0$. 由此及 (39) 得知, $P(\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t,\omega)=\widetilde{x}(t,\omega))=1$ 对任一固定点 $t\in[0,b]$ 成立, 因为 t 以概率 1 是 $\widetilde{x}(s,\omega),s\geqslant 0$, 的连续点. 由 $b>0$ 的任意性即得所欲证. □

总结以上主要结果，得

定理 5 (i) 设已给可分、Borel 可测 Q 过程 $x(t,\omega), t \geqslant 0$, 使 $R<\infty$, 则序列 (v_n)

$$v_n = P(x(\beta_1^{(n)}) = n), \quad n \geqslant 1 \tag{40}$$

满足关系 (1).

(ii) 反之，设已给 Q 使 $R<\infty, S<\infty$, 则对满足 (1) 的序列 (v_n), 存在唯一 Q 过程 $x(t,\omega), t\geqslant 0$, 使 (40) 成立. 它的转移概率 $P_{ij}(t) = \lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}(t)$. 这里 $P_{ij}^{(n)}(t)$ 是 $(Q, V^{(n)})$ 过程的转移概率，而 $V^{(n)} = (v_0^{(n)}, v_1^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)})$ 是 §1(14) 在条件 $v_n^{(n)} = v_n$ 下的解， $n\geqslant 1$.

实际上，由引理 1 得 (i). (ii) 则自定理 3 及 4 推出.

§17.5 特征数列与生灭过程的分类

(一) §4 中结果的深化有待于对 §1 中方程组 (14) 的非负解的研究，本节中首先求出此方程组的全部非负解，然后应用此结果来进一步刻画全体 Q 过程. 以下恒设 $R<\infty$. 令

$$R_n = \sum_{i=0}^{n-1} v_i^{(n)} c_{i0}, \quad S_n = v_n^{(n)} c_{n0}, \quad \Delta_n = R_n + S_n$$

引理 1 设 $V^{(n)} = (v_0^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)}), n\geqslant 1$ 是 §1(14) 的非负解，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{R_n}{\Delta_n} = p(\geqslant 0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{\Delta_n} = q(\geqslant 0)$; $p+q=1$; 当且只当 $v_n^{(n)} = 1 (n\geqslant 1)$ 时 $q=1, p=0$.

证 改写 §1(14) 为

$$\begin{aligned} v_j^{(n+1)} &= v_j^{(n)}\left(1 - v_{n+1}^{(n+1)} \frac{z_{n+1}-z_n}{z-z_n}\right), \quad (j=0,1,\cdots,n-1)\\ v_n^{(n+1)} &= v_n^{(n)}\left(1 - v_{n+1}^{(n+1)} \frac{z_{n+1}-z_n}{z-z_n}\right) - v_{n+1}^{(n+1)} \frac{z-z_{n+1}}{z-z_n}\\ \sum_{i=0}^{n} v_i^{(n)} &= \sum_{i=0}^{n+1} v_i^{(n+1)} = 1 \end{aligned} \tag{1}$$

并令

$$\delta_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} v_i^{(n+1)} + v_{n+1}^{(n+1)} c_{n+1,n} = 1 - v_{n+1}^{(n+1)} \frac{z_{n+1}-z_n}{z-z_n} > 0$$

由 §1(14) 及 §4(37) 经简单计算后得

$$\frac{R_{n+1}}{\Delta_{n+1}} = \frac{R_n}{\Delta_n} + \frac{v_n^{n+1} c_{n0}}{\Delta_n \delta_{n+1}}$$

故 $\frac{R_n}{\Delta_n} \uparrow p, 0\leqslant p\leqslant 1$. 由 $\frac{R_n}{\Delta_n} + \frac{S_n}{\Delta_n} = 1$, 得 $\frac{S_n}{\Delta_n} \downarrow q$, $0\leqslant q\leqslant 1$, $p+q=1$. 如 $v_n^{(n)} = 1 (n\geqslant 1)$, 则 $R_n = 0$, $q=1$. 反之，如 $q=1$, 则 $\frac{S_n}{\Delta_n} = 1$, $n\geqslant 1$, $R_n = 0$, 因 $c_{i0} > 0$, 故 $v_i^{(n)} = 0$, $i<n$, 从而 $v_n^{(n)} = 1$ $(n\geqslant 1)$. □

引理 2 设 $V_n^{(n)}$, $n \geqslant 1$, 为 §1(14) 的非负解，如存在 k 使 $v_i^{(i)} = 1, i \leqslant k$, 但 $v_{k+1}^{(k+1)} < 1$, 则 (i) $v_k^{(n)} > 0 (n \geqslant k)$; (ii) $v_j^{(n)}/v_k^{(n)}$ 不依赖于 $n (> \max(j,k))$; (iii) 任取一数 $r_k > 0$, 并令 $r_j = \frac{v_j^{(n)}}{v_k^{(n)}} r_k, (n > \max(j,k))$; 则

$$0 < \sum_{m=0}^{\infty} r_m c_{m0} < \infty \tag{2}$$

证 因 $(v_0^{(i)}, \cdots, v_{i-1}^{(i)}, v_i^{(i)}) = (0, \cdots, 0, 1), (i \leqslant k)$, 由 (1) 得

$$v_j^{(n)} = 0, \text{一切} n > j, (j = 0, 1, \cdots, k-1) \tag{3}$$

特别，$v_j^{(k+1)} = 0, j \leqslant k-1$. 由假定 $v_{k+1}^{(k+1)} < 1$, $\sum_{j=0}^{k+1} v_j^{(k+1)} > 0$, 故 $v_k^{(k+1)} > 0$, 由 (1) 得证 (i). 任取 $n > m > \max(j,k)$, 由 §4(37) 得

$$\frac{v_j^{(m)}}{v_k^{(m)}} = \frac{v_j^{(n)} \Big/ \sum_{\ell=0}^{n} v_\ell^{(n)} c_{\ell m}}{v_k^{(n)} \Big/ \sum_{\ell=0}^{n} v_\ell^{(n)} c_{\ell m}} = \frac{v_j^{(n)}}{v_k^{(n)}}$$

此即 (ii). 因 $r_k > 0$ 而一切 $r_m \geqslant 0$, 故得 (2) 中前一不等式. 取 $n > k$, 由 (3) $v_1^{(n+1)} = \cdots = v_{k-1}^{(n+1)} = 0$. 由 p 的定义及 (ii) 与 §4(37) 得

$$\begin{aligned} p &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{\ell=k}^{n} v_\ell^{(n+1)} c_{\ell 0}}{v_k^{(n+1)}} \cdot \frac{v_k^{(n+1)}}{v_k^{(n+1)} c_{k0} + \left(\sum_{\ell=k+1}^{n+1} v_\ell^{(n+1)} c_{\ell,k+1}\right) c_{k+1,0}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_k} \left(\sum_{\ell=k}^{n} r_\ell c_{\ell 0}\right) \frac{v_k^{(k+1)}}{v_k^{(k+1)} c_{k0} + v_{k+1}^{(k+1)} c_{k+1,0}} \end{aligned}$$

因由 (3),$r_\ell = 0, \ell < k$, 故得

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} r_\ell c_{\ell 0} = \frac{p r_k (v_k^{(k+1)} c_{k0} + v_{k+1}^{(k+1)} c_{k+1,0})}{v_k^{(k+1)}} < \infty \ \square$$

注 p, q 由解 $v^{(n)}, n \geqslant 1$ 唯一决定，(r_j) 则除一常数因子外唯一决定.

(二) 定理 1 为使 $(v_0^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)})$, $n \geqslant 1$, 是 §1(14) 的一非负解，充要条件是存在非负数 $p, q, r_n, n \geqslant 0$, 满足关系式

$$p + q = 1 \tag{4}$$

$$0 < \sum_{n=0}^{\infty} r_n c_{n0} < \infty, \quad \text{如} p > 0 \tag{5}$$

$$r_n = 0 \quad (n \geqslant 0), \quad \text{如} p = 0 \tag{6}$$

使 $(v_0^{(n)},\cdots,v_n^{(n)})$ 可表为：当 $p>0$ 时，

$$v_j^{(n)}=X_n\frac{r_j}{A_n}\quad(j=0,1,\cdots,n-1)\tag{7}$$

$$v_n^{(n)}=Y_n+X_n\frac{\sum\limits_{\ell=n}^{\infty}r_\ell c_{\ell n}}{A_n}\tag{8}$$

当 $p=0$ 时，

$$v_j^{(n)}=0\quad(j=0,\cdots,n-1)\quad v_n^{(n)}=1\tag{8'}$$

其中 $0<A_n=\sum\limits_{\ell=0}^{\infty}r_\ell c_{\ell n}<\infty$, 而

$$X_n=\frac{pA_n(Z-Z_n)}{pA_n(Z-Z_n)+qA_0Z},\quad Y_n=\frac{qA_0Z}{pA_n(Z-Z_n)+qA_0Z}\tag{9}$$

此时 p,q 唯一决定，而 $r_n,n\geqslant0$ 则除一常数因子外唯一决定.

证 充分性. 设已给满足 (4)–(6) 的 p,q,r_n. 如 $p=0$, 则由 (8′) 得 $(v_0^{(n)},\cdots,v_{n-1}^{(n)},v_n^{(n)})=(0,\cdots,0,1)$, $n\geqslant1$, 它显然是 §1(14) 的一非负解. 如 $p>0$, 由 (5) 及

$$A_n-A_{n+1}c_{n+1,n}=\left(\sum_{i=0}^{n}r_i\right)(1-c_{n+1,n})\tag{10}$$

$$A_n\geqslant A_0\tag{11}$$

可见 $0<A_n<\infty,0<X_n<\infty$. 由 (7),(8) 及 §16.1 (25), 有

$$\sum_{i=0}^{n+1}v_i^{(n+1)}c_{in}=\frac{X_{n+1}}{A_{n+1}}A_n+Y_{n+1}c_{n+1,n}\tag{12}$$

由 (9) 得

$$\frac{Y_{n+1}}{X_{n+1}}\cdot\frac{Z-Zn+1}{Z-Z_n}A_{n+1}=A_n\frac{Y_n}{X_n}$$

利用 $X_n+Y_n=1$ 及 §16.1 (25) 有

$$\frac{X_n}{A_n}=\frac{X_{n+1}}{A_{n+1}}\div\left(\frac{X_{n+1}}{A_{n+1}}A_n+Y_{n+1}c_{n+1,n}\right)$$

以 (12) 代入得

$$\frac{X_n}{A_n}=\frac{X_{n+1}}{A_{n+1}}\Big/\sum_{i=0}^{n+1}v_i^{(n+1)}c_{in}$$

乘此式两方以 r_j $(j=0,1,\cdots,n-1)$ 并利用 (7),(8) 得

$$v_j^{(n)}=v_j^{(n+1)}\Big/\sum_{i=0}^{n+1}v_i^{(n+1)}c_{in}\,(j=0,1,\cdots,n-1)\tag{13}$$

由 (7),(8) 有

$$\sum_{j=0}^{n} v_j^{(n)} = \sum_{j=0}^{n+1} v_j^{(n+1)} = 1$$

按 (13) 及 $c_{in} = 1(j \leqslant N)$

$$v_n^{(n)} = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} v_j^{(n)} = \frac{v_n^{(n+1)} + v_{n+1}^{(n+1)} c_{n+1,n}}{\sum\limits_{i=0}^{n+1} v_i^{(n+1)} c_{in}} \tag{14}$$

因而充分性证完.

必要性. 设已给 §1(14) 的一非负解 $(v_0^{(n)}, \cdots, v_{n-1}^{(n)}, v_n^{(n)})$. 取引理 1 中的 p, q 此时如 $p = 0$, 则取 $r_n = 0 (n \geqslant 1)$ 而结论显然正确, 否则由引理 1 必存在 $k (\geqslant 0)$, 使满足引理 2 的条件, 于是如引理 2 定义 $r_n (n \geqslant 1)$. 由此二引理知 (4)–(6) 满足. 下证 (7),(8) 成立. 为此定义

$$u_j^{(n)} = X_n \frac{r_j}{A_n} \quad (j = 0, 1, \cdots, n-1)$$

$$u_n^{(n)} = Y_n + X_n \frac{\sum\limits_{\ell=n}^{\infty} r_\ell c_{\ell n}}{A_n} \tag{15}$$

其中 $A_n = \sum\limits_{\ell=0}^{\infty} r_\ell c_{\ell n} > 0$, 而 X_n, Y_n 由 (9) 给出. 由充分性之证知 $(u_0^{(n)}, \cdots, u_{n-1}^{(n)}, u_n^{(n)})$ $(n \geqslant 1)$ 是 §1(14) 的非负解, 故为证 $(v_0^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)}) = (u_0^{(n)}, \cdots, u_n^{(n)})$ $(n \geqslant 1)$, 只要证

$$v_n^{(n)} = u_n^{(n)} \quad (n \geqslant 1) \tag{16}$$

注意, 如 $n \leqslant k$, 则由 (3) 得 $u_n^{(n)} = 1 = v_n^{(n)}$, 而此时 (16) 成立. 故只要对 $n \geqslant k+1$ 证明 (16). 对 n 用归纳法, 经过一些计算后, 可证

$$u_k^{(n)} = v_k^{(n)} \quad (n \geqslant k+1) \tag{17}$$

由此式并注意

$$\frac{u_{k+i}^{(n)}}{u_k^{(n)}} = \frac{r_{k+i}}{r_k} = \frac{v_{k+i}^{(n)}}{v_k^{(n)}}, \quad (k+i < n)$$

立得

$$\left(1 - \sum_{i=k}^{n-1} u_i^{(n)}\right) \Big/ u_k^{(n)} = \left(1 - \sum_{i=k}^{n-1} v_i^{(n)}\right) \Big/ v_k^{(n)}$$

即

$$1 - \sum_{i=k}^{n-1} u_i^{(n)} = 1 - \sum_{i=k}^{n-1} v_i^{(n)}$$

今因

$$\sum_{i=0}^{n} u_i^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} v_i^{(n)} = 1$$

而且 $u_i^{(n)} = v_i^{(n)} = 0$ 对一切 $i < k$ 成立，故得证 $u_n^{(n)} = v_n^{(n)}, n \geqslant k+1$.

唯一性. 今设有二组满足 (4)-(6) 的非负数 $p, q, r_n, n \geqslant 0$, 及 $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}_n, n \geqslant 0$, 均使已给非负解 $(v_0^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)})$ 能表成 (7)-(9) 的形式. 如 $v_n^{(n)} = 1 (n \geqslant 1)$, 即 $v_j^{(n)} = 0$ $(n \geqslant 1,\ j < n)$ 此时显然 $p = \bar{p} = 0, r_n = \bar{r}_n = 0, q = \bar{q} = 1$. 如存在 k 使 $v_i^{(i)} = 1, i \leqslant k, v_{k+1}^{(k+1)} < 1$. 则由 (7),(9),(5) 知 $p > 0, X_n > 0, A_0 > 0$. 于是由 (7),(8)

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k^{(n)} c_{k0}}{\sum\limits_{k=0}^{n} v_k^{(n)} c_{k0}} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} r_k c_{k0}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} r_k c_{k0} + \frac{Y_n}{X_n} A_n c_{n0}} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} r_k c_{k0}}{A_0 + \frac{q}{p} A_0} \uparrow p \quad (n \to \infty) \tag{18}$$

同样，上式右方也应收敛于 $\bar{p}$, 故 $p = \bar{p}$, 由 (4) 得 $q = \bar{q}$; 其次，当 $j < k$ 时，由于 $v_j^{(k)}$ 等于 0 而由 (7) 得 $r_j = 0 = \bar{r}_j$. 既然 $v_k^{(k+1)} > 0$, 故 $r_k > 0, r'_k > 0$, 于是由 (7) 得知对 $j > k$, 有

$$r_j / r_k = v_j^{(n)} / v_k^{(n)} = \bar{r}_j / \bar{r}_k \quad (n > \max(j, k))\Box$$

(三) 考虑任一 Q 过程 $x(t, \omega), t \geq 0, Q$ 满足 $R < \infty$, 以 $\tau_1(\omega)$ 表它的第一个飞跃点，又

$$\beta_1^{(n)}(\omega) = \inf(t:\ t \geq \tau_1(\omega), x(t, \omega) \leq n)$$
$$v_i^{(n)} = P(x(\beta_1^{(n)}) = i), \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

则如 §3 定理 2 所述，$V^{(n)} = (v_0^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)})$ 满足 §1(14), $n \geq 0$. 现在定义此过程的特征数列 $p, q, r_n,\ n \geq 0$ 如下：

$$p = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} v_i^{(n)} c_{i0}}{\sum\limits_{i=0}^{n} v_i^{(n)} c_{i0}}, \quad q = \lim_{n \to \infty} \frac{v_n^{(n)} c_{n0}}{\sum\limits_{i=0}^{n} v_i^{(n)} c_{i0}} \tag{19}$$

如果一切 $v_n^{(n)} = 1$ $(n \geq 0)$, 定义 $r_n = 0$ $(n \geq 0)$; 如果存在 k, 使 $v_i^{(i)} = 1$ $(i \leq k)$, 但 $v_{k+1}^{(k+1)} < 1$, 那么按引理 2 来定义 r_n $(n \geq 0)$, 即：先任取定一正数 r_k, 并定义

$$r_n = \frac{v_n^{(m)}}{v_k^{(m)}} r_k \quad (m > \max(n, k)) \tag{20}$$

由此可见：一 Q 过程唯一决定一特征数列. (由于 r_k 可任意选取，故 $\{r_n\}$ 实际上是除一常数因子外唯一决定. 因此，如 $p = p', q = q'$ 而 $r_n = cr'_n, c > 0$ 为常数，我们仍认为 $\{p, q, r_n\}$ 与 $\{p', q', r'_n\}$ 是相同的.) 特征数列刻画了此过程的样本函数在第一个飞跃点后的无穷小近邻内的行为. 它们满足关系式 (4)-(6), 而且使下面的定理 3,4 成立 [1]. 在下节中我们将证明反面的结论：任给一组满足这些条件的非负数 $p, q, r_n, n \geqslant 0$,, 是必存在唯一 Q 过程，它的特征数列与此组数重合. 这样一来，特征数列将全体 Q 过程分类：在全体特征数列与全体 Q 过程间存在一一对应；也就是说，在全体满足 (4)-(6) 和下面的定理 3, 4 的非负数列与全体以 Q 为密度矩阵的转移概率 $p_{ij}(t)$ 之间存在一一对应，下节的基本定理还会指出如何根据特征数列和 Q 来求出对应的 $p_{ij}(t)$.

[1] 本节末会证明，(5) 可由定理 4 推出.

(四) 试进一步研究特征数列的性质. 考虑用 §3 中 (6),(8) 定义的 $\beta_m^{(n)}$, 因而 $\beta_1^{(0)}$ 是第一个飞跃点后首次到达 0 的时刻, 以 η 表 $\beta_1^{(0)}$ 前的最后一个飞跃点, 即

$$\eta(\omega)=\sup(u:\ u\leqslant\beta_1^{(0)},\ u\text{是}\ x(t,\omega)\ \text{的飞跃点})$$

下定理更直接地说明特征数列的概率意义.

定理 2 $P(x(\eta,\omega)=j)=pr_jc_{j0}/A_0\ \ (j\neq\infty)$

$$P(x(\eta,\omega)=\infty)=q$$

(当 $p=0$ 因而 $A_0=0$ 时, 应理解 $P(x(\eta,\omega)=j)=0$).

证 因 $P(\lim\limits_{m\to\infty}\beta_m^{(n)}=\infty)=1$, 故对几乎一切 ω, 存在唯一正整数 $m=m_n$, 使

$$\beta_{m_n-1}^{(n)}<\eta\leqslant\beta_{m_n}^{(n)}\leqslant\beta_1^{(0)}$$

试证

$$(x(\beta_{m_n}^{(n)})=j)=(x(\eta)=j)\ \ (n>j)\tag{21}$$

$$(x(\beta_{m_n}^{(n)})=n)\downarrow(x(\eta)=\infty)\ \ (n\to\infty)\tag{22}$$

实际上, 如 $x(\beta^{(n)})_{m_n}=j<n$, 则必 $\beta_{m_n}^{(n)}=\eta$, 否则由于在 $(\eta,\beta_{m_n}^{(n)})$ 中 $x(t)>n$, 在 $\beta_{m_n}^{(n)}$ 上轨道之跃度将大于 1, 而此以概率 1 不可能. 因此

$$(x(\beta_{m_n}^{(n)})=j)\subset(x(\eta)=j)$$

反包含关系是显然的, 此得证 (21). 其次, 显然

$$(x(\beta_{m_{n+1}}^{(n+1)})=n+1)\subset(x(\beta_{m_n}^{(n)})=n)\quad\beta_{m_n}^{(n)}\downarrow\overline{\eta}\geqslant\eta\ \ (n\to\infty)$$

如 $\omega\in\bigcap\limits_n(x(\beta_{m_n}^{(n)})=n)$, 由 $x(t,\omega)$ 的右下半连续性得

$$x(\overline{\eta})=\lim_{n\to\infty}x(\beta_{m_n}^{(n)})=\lim n=\infty$$

但 η 是 $\beta_1^{(0)}$ 前最后一飞跃点, 故 $\overline{\eta}=\eta$, 从而 $\omega\in(x(\eta)=\infty)$. 这得证

$$\bigcap_n(x(\beta_{m_n}^{(n)})=n)\subset(x(\eta)=\infty)$$

反包含关系是明显的, 故 (22) 成立.

对 $0\leqslant j\leqslant n$, 有

$$\begin{aligned}P(x(\beta_{m_n}^{(n)})=j)&=\sum_{m=1}^{\infty}P(x(\beta_m^{(n)})=j,\ m_n=m)\\&=\sum_{m=1}^{\infty}P(\beta_{m-1}^{(n)}<\beta_1^{(0)},\ x(\beta_m^{(n)})=j,\ \beta_m^{(n)}\leqslant\beta_1^{(0)}<\tau_{m+1}^{(n)})\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}v_k^{(n)}(1-c_{k0})\right]^{m-1}v_j^{(n)}c_{j0}=\frac{v_j^{(n)}c_{j0}}{\sum\limits_{k=0}^{n}v_k^{(n)}c_{k0}}\end{aligned}\tag{23}$$

其中 $\tau_{m+1}^{(n)}$ 是 $\beta_m^{(n)}$ 后的第一个飞跃点，由 (21),(23), 并仿照 (18) 的推理即得证定理中第一结论. 第二结论由 (22),(23) 及引理 1 推出. □

定理 3 如 $S=\infty$, 则 $q=0$.

证 以 τ_t 表 $t>0$ 前最后一飞跃点，令

$$\xi_0=\begin{cases}\inf(t:\ x(\tau_t)=\infty,\ x(t)=0)\\ \infty,\quad \text{如上括号中 } t\text{- 集空}\end{cases}$$

显然 $(x(\eta)=\infty)\subset(\xi_0<\infty)$. 根据 §2 (7), $P(\xi_0<\infty)=0$; 因而 $q=P(x(\eta)=\infty)=0$. □

由定理 3 可见，对 $S=\infty$ 的 Q 过程，特征数列中 $p=1,\ q=0$, 故少去一自由度. 因而 $S=\infty$ 的 Q 过程要比 $S<\infty$ 的 Q 过程少得多.

在证明下列定理前，先作一些准备.

设 $S=\infty$. 令

$$\alpha_1^{(n)}(\omega)=\inf(t:\ t\text{为飞跃点},x(t,\omega)\leqslant n) \tag{24}$$

由 §3 定理 3, 存在 $\ell\geqslant 0$, 当 $n\geqslant \ell$ 时， $P(\alpha_1^{(n)}<\infty)=1$. 令 $s_k^{(n)}=P(x(\alpha_1^{(n)})=k)$. 因 $\sum\limits_{k=0}^{n}s_k^{(n)}=1$, 故至少有一 $s_k^{(n)}>0$, 不失一般性, 可假定 $s_0^{(n)}>0$. 显然，$P(\alpha_1^{(0)}<\infty)\geqslant s_0^{(n)}>0$, 故存在 $T>0$, 使 $P_0(\alpha_1^{(0)}<T)>0$. 于是由 §2 引理 1 即得

$$E\alpha_1^{(0)}<\infty \tag{25}$$

今对 $x(t,\omega),\ t\geqslant 0$, 施行 $c(\tau_m,\beta_m^{(n)})$ 变换而得 $(Q,V^{(n)})$ 过程 $x_n(t,\omega)$ (参看 §3 定理 2). 令

$$\gamma_0^{(n)}=\inf(u:\ u\text{ 是 }x_n(t,\omega)\text{ 的飞跃点},x_n(u,\omega)=0) \tag{26}$$

易见 $\gamma_0^{(n)}\leqslant\alpha_1^{(0)}$. 以 $\tau_i^{(n)}$ 表 $x_n(t,\omega)$ 的第 i 个飞跃点，并对 $m<n$ 定义

$$\left.\begin{aligned}L_{nm}^{(i)}&=\tau_{i+1}^{(n)}-\tau_i^{(n)},\ \text{如 }\tau_i^{(n)}\leqslant\gamma_0^{(n)},\ \text{而且} n\geqslant x_n(\tau_i^{(n)})>m\\ &=0,\quad \text{如 }\tau_i^{(n)}>\gamma_0^{(n)},\ \text{或 }x_n(\tau_i^{(n)})\leqslant m\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

于是 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}L_{nm}^{(i)}$ 是在 $\gamma_0^{(n)}$ 以前的满足 $n\geqslant x_n(\tau_i^{(n)})>m$ 的区间 $[\tau_i^{(n)},\tau_i^{(n+1)})$ 的总长. 因之

$$\alpha_1^{(0)}\geqslant\gamma_0^{(n)}=\tau_1^{(n)}+\sum_{i=1}^{\infty}L_{n,-1}^{(i)} \tag{28}$$

令

$$C=(n\geqslant x_n(\tau_i^{(n)})>m,\ \tau_i^{(n)}\leqslant\gamma_0^{(n)}),\quad \Delta=\sum_{j=m+1}^{n}v_j^{(n)}$$

$$R_i=\sum_{j=i}^{\infty}m_j\quad (m_i\text{ 由 §16.1 (4) 给出}) \tag{28'}$$

因而 $R_i = E_i\tau_1$ 是自 i 出发首次到达 ∞ 的平均时间. 我们有

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{i=1}^{\infty} L_{nm}^{(i)}\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} E(\tau_{i+1}^{(n)} - \tau_i^{(n)} \mid C)P(C) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} E(\tau_{i+1}^{(n)} - \tau_i^{(n)} \mid x_n(\tau_i^{(n)}) > m)P(C) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\Bigg[\sum_{k=m+1}^{n} E(\tau_{i+1}^{(n)} - \tau_i^{(n)} \mid x_n(\tau_i^{(n)}) = k) \\
&\quad \times P(x_n(\tau_i^{(n)}) = k \mid x(\tau_i^{(n)}) > m)\Bigg]P(C) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\left[\sum_{k=m+1}^{n} R_k \frac{v_k^{(n)}}{\Delta}\right]P(C) \\
&= \left[\sum_{k=m+1}^{n} R_k \frac{v_k^{(n)}}{\Delta}\right] \cdot \sum_{\ell=m+1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty} P(x_n(\tau_i^{(n)}) = \ell,\ \tau_i^{(n)} \leqslant \gamma_0^{(n)}) \\
&= \left[\sum_{k=m+1}^{n} R_k \frac{v_k^{(n)}}{\Delta}\right] \cdot \sum_{\ell=m+1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty} v_\ell^{(n)}(1 - v_0^{(n)})^{i-1} \\
&= \left[\sum_{k=m+1}^{n} R_k \frac{v_k^{(n)}}{\Delta}\right] \cdot \frac{\Delta}{v_0^{(n)}} = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{v_k^{(n)}}{v_0^{(n)}} R_k
\end{aligned} \tag{29}$$

其中 $v_0^{(n)} > 0$, 这是因为 $P(\gamma_0^{(n)} < \infty) = 1$, 存在 k, 使 $\delta = P(\gamma_0^{(n)} = \tau_k^{(n)}) > 0$, 故 $v_0^{(n)} = P(x_n(\tau_k^{(n)} = 0) = \delta > 0$.

可以更直观地理解 (29). 实际上, 如 $x_n(\tau_i^{(n)}) = k$, 则 $[\tau_i^{(n)}, \tau_{i+1}^{(n)})$ 的平均长度为 R_k; 然而在 $\gamma_0^{(n)}$ 前, 这种区间的平均个数等于

$$\sum_{i=1}^{\infty} v_k^{(n)}(1 - v_0^{(n)})^{i-1} = \frac{v_k^{(n)}}{v_0^{(n)}}$$

由此即可得 (29) 中的结果

定理 4 [1] $\sum\limits_{i=0}^{\infty} r_i R_i < \infty$

证 先设 $S = \infty$. 如上所述, 不妨设 $s_0^{(n)} > 0$. 以 (7),(8) 代入 (29), 并注意由定理 3, 此时 $q = 0$, 因而 $Y_n = 0$, $X_n = 1$, 即得

$$E\left(\sum_{i=1}^{\infty} L_{nm}^{(i)}\right) = \frac{1}{r_0}\left(\sum_{k=m+1}^{n-1} r_k R_k + R_n \sum_{\ell=n}^{\infty} r_\ell c_{\ell n}\right) \tag{30}$$

由 (25),(28),(30) 即得

$$\frac{1}{r_0}\sum_{k=1}^{n-1} r_k R_k \leqslant E\alpha_1^{(0)} < \infty \tag{31}$$

---

[1] 由定理 2 并注意 $P(x(\eta) \in [0, 1, \cdots, \infty]) = 1$, 可见如 $q < 1$, 则必至少有一 $r_i > 0$, 故此时 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} r_i R_i > 0$.

再令 $n \to \infty$ 即得所欲证.

次设 $S < \infty$. 令

$$y_0 = \frac{1}{b_0}, \quad y_1 = \frac{1}{a_1}, \quad y_n = \frac{b_1 b_2 \cdots b_{n-1}}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n} \tag{32}$$

回忆 §16.1(一) 中的 m_i, Z_i 及 Z, 得

$$m_i = (Z_{i+1} - Z_i) \sum_{j=0}^{i} y_j$$

$$R_j = \sum_{i=j}^{\infty} m_i = \sum_{i=j}^{\infty} (Z_{i+1} - Z_i) \sum_{k=0}^{i} y_k$$

$$= (Z - Z_j) \sum_{k=0}^{j} y_k + \sum_{k=j+1}^{\infty} (Z - Z_k) y_k \tag{32'}$$

$$\leqslant (Z - Z_j) \sum_{k=0}^{\infty} y_k \tag{33}$$

由假设 $S < \infty$ 得 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k < \infty$, 于是由 (5) 并回忆 $c_{n0} = \frac{Z - Z_n}{Z}$, 我们有

$$\sum_{j=0}^{\infty} r_j R_j \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} r_j (Z - Z_j) \sum_{k=0}^{\infty} y_k < \infty. \ \Box$$

由 (33) 可见, $R_j \geqslant (Z - Z_j) y_0$,

$$\sum_{j=0}^{\infty} r_j R_j \geqslant \sum_{j=0}^{\infty} r_j (Z - Z_j) y_0 = y_0 Z \sum_{j=0}^{\infty} r_j c_{j0}$$

由此及定理 4 的后半证明立得

系 1 如 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} r_j R_j < \infty$, 则 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} r_j c_{j0} < \infty$; 相反的结论在 $S < \infty$ 时成立.

由 (10) 可见, 如 $A_0 = \sum\limits_{j=0}^{\infty} r_j c_{j0} < \infty$, 则一切

$$A_n = \sum_{j=0}^{\infty} r_j c_{jn} < \infty$$

§17.6 基本定理

(一) 下定理是生灭过程构造论中的主要结果.

基本定理 设已给生灭矩阵 Q, 满足条件 $R < \infty$, 那么下列结论成立:

(i) 任一 Q 过程 $x(t,\omega), t\geqslant 0$ 的特征数列 $p,q,r_n,n\geqslant 0$, 必满足关系式

$$p+q=1 \tag{1}$$

$$0<\sum_{i=0}^{\infty}r_iR_i<\infty,\ 如p>0 \tag{2}$$

$$r_n=0,\qquad\qquad 如p=0 \tag{3}$$

$$q=0,\qquad\qquad 如S=\infty \tag{4}$$

(ii) 反之，设已给一列非负数 $p,q,r_n,n\geqslant 0$, 满足 (1)-(4). 则存在唯一 Q 过程 $x(t,\omega)$, $t\geqslant 0$, 它的特征数列重合于此已给数列；而且它的转移概率 $p_{ij}(t)$ 满足

$$p_{ij}(t)=\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}(t) \tag{5}$$

这里 $p_{ij}^{(n)}(t)$ 是 $(Q,V^{(n)})$ 过程的转移概率，而分布 $V^{(n)}=(V_0^{(n)},\cdots,V_n^{(n)})$ 如下给出：若 $p=0$, 则令

$$v_j^{(n)}=0\ (0\leqslant j<n),\quad v_n^{(n)}=1 \tag{6}$$

若 $p>0$, 则令

$$v_j^{(n)}=X_n\frac{r_j}{A_n}\quad(0\leqslant j<n) \tag{7}$$

$$v_n^{(n)}=Y_n+X_n\frac{\sum\limits_{\ell=n}^{\infty}r_\ell c_{\ell n}}{A_n} \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}0<A_n&=\sum_{\ell=0}^{\infty}r_\ell c_{\ell n}<\infty\\ X_n&=\frac{pA_n(Z-Z_n)}{pA_n(Z-Z_n)+qA_0Z}\\ Y_n&=\frac{qA_0Z}{pA_n(Z-Z_n)+qA_0Z}\end{aligned} \tag{9}$$

证 (i) 已在 §5 定理 1,3,4 中证明.

(ii) 在 $S<\infty$ 的情况下，只须综合 §4 定理 5 及 §5 定理 1 与系 1 即得证明. 因此，剩下来只要在 $S=\infty$ 的情形下证明 (ii) 中结论.

设 $S=\infty$, 此时 $q=0$ 而 (7),(8) 简化为

$$\begin{aligned}v_j^{(n)}&=r_j/A_n\quad(0\leqslant j<n)\\ v_n^{(n)}&=\sum_{\ell=n}^{\infty}r_\ell c_{\ell n}/A_n\end{aligned} \tag{10}$$

因 $A_n>0$, 至少有一 $r_i>0$, 不失一般性可设 $r_0>0$. 下面的证明与 §4 定理 2 的证明一样. 以 $x_n(t,\omega), t\geqslant 0$, 表 $(Q,V^{(n)})$ 过程， $V^{(n)}$ 由 (10) 定义，用 §4 中 (17'),(17) 对 $(Q,V^{(n)})$ 过程

定义的量记为 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\overline{L}_{nm}^{(i)}$ 与 $\overline{T}_{\varepsilon}^{(n,r)}(\omega)$, 我们只要证明

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}E\left(\sum_{i=1}^{\infty}\overline{L}_{nm}^{(i)}\right)=0 \tag{11}$$

$$\lim_{\varepsilon\to o}\lim_{n\to\infty}E\overline{T}_{\varepsilon}^{(n.0)}=0 \tag{12}$$

回忆 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\overline{L}_{nm}^{(i)}$ 是从 $x_n(t,\omega)$ 经 $C(\tau_i^{(n,m)},\beta_i^{(n,m)})$ 变换变到 $x_m(t,\omega)$ 时在 $\beta_1^{(n,0)}$ 前所抛去的区间总长 (参看 §4(4)-(7)), 它显然不大于由 §5 (27) 定义的总长 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}L_{nm}^{(i)}$. 实际上, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\overline{L}_{nm}^{(i)}$ 只是 $\beta_1^{(n,0)}(\leqslant\gamma_0^{(n)})$ 前诸如下区间 $[\tau_i^{(n,m)},\beta_i^{(n,m)})$ 之总长，在这些区间中, $x_n(t,\omega)>m$. 而 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}L_{nm}^{(i)}$ 则是在 $\gamma_0^{(n)}$ 前一切满足 $x_n(\tau_i^{(n)})>m$ 的区间 $[\tau_i^{(n)},\tau_{i+1}^{(n)})$ 的总长. 既然每个 $[\tau_i^{(n,m)},\beta_i^{(n,m)})$ 必是后一种区间之一或几个之和的子集，故必有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\overline{L}_{nm}^{(i)}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}L_{nm}^{(i)}$. 于是仿 §5 (30) 得

$$E\left(\sum_{i=1}^{\infty}\overline{L}_{nm}^{(i)}\right)\leqslant\frac{1}{r_0}\left(\sum_{k=m}^{n-1}r_kR_k+R_n\sum_{\ell=n}^{\infty}r_\ell c_{\ell n}\right) \tag{13}$$

当 $n\to\infty, m\to\infty$ 时，右方第一项根据假设 (2) 趋于 0. 又由 §5 (32'), 易见

$$c_{\ell n}R_n<R_\ell$$

故右方第二项不超过 $\frac{1}{r_0}\sum\limits_{\ell=n}^{\infty}r_\ell R_\ell$; 当 $n\to\infty$ 时，它也趋于 0, 这样便证明了 (11).

其次，由 §4 (17) 并注意 $\beta_1^{(n,0)}\leqslant\gamma_0^{(n)}$, 显见

$$\overline{T}_{\varepsilon}^{(n,0)}\leqslant\sum_{\tau_1^{(n)}\leqslant\tau_{ij}^{(n)}<\gamma_0^{(n)}}f_\varepsilon(\tau_{ij+1}^{(n)}-\tau_{ij}^{(n)})\equiv T_{\varepsilon}^{(n,0)} \tag{14}$$

令 $F_\varepsilon^{(i)}=\sum\limits_{j=0}^{\infty}f_\varepsilon(\tau_{ij+1}^{(n)}-\tau_{ij}^{(n)})$, 则

$$R_k^{(\varepsilon)}\equiv E_kF_\varepsilon^{(i)}=\sum_{\ell=k}^{\infty}\left[\frac{1}{b_\ell}(1-e^{-c_\ell\varepsilon})+\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{a_\ell a_{\ell-1}\cdots a_{\ell-k}(1-e^{-c_{\ell-k-1}\varepsilon})}{b_\ell b_{\ell-1}b_{\ell-k}b_{\ell-k-1}}\right] \tag{15}$$

此式的证明仿 §4 引理 4. 象证明 §5 (30) 一样，有

$$\lim_{n\to\infty}ET_\varepsilon^{(n,0)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r_0}\left[\sum_{k=0}^{n-1}r_kR_k^{(\varepsilon)}+R_n^{(\varepsilon)}\sum_{\ell=n}^{\infty}r_\ell c_{\ell n}\right]=\frac{1}{r_0}\sum_{k=0}^{\infty}r_kR_k^{(\varepsilon)} \tag{16}$$

最后一级数被收敛级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}r_kR_k$ 所控制, 故当 $\varepsilon\to0$ 时可在求和号下求极限, 既然 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}R_k^{(\varepsilon)}=0$, 于是最后得证

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}E\overline{T}_\varepsilon^{(n,0)}\leqslant\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}ET_\varepsilon^{(n,0)}=0\ \square$$

(二) 我们已知 $S=\infty$ 时 $q=0$. 另一极端是 $q=1$, 这是很重要而有趣的特殊情形. 考虑特征数列为 $p=0,q=1,r_n=0\ (n\geqslant 0)$ 的 Q 过程 $x(t,\omega),t\geqslant 0$, 记它为 $(Q,1)$ 过程. 它是 §4 中 $(Q,\pi^{(n)})$ 过程列 $x_n(t,\omega),t\geqslant 0$ 的极限, $\pi^{(n)}=(0,\cdots,0,1)$, 括号中共 $n-1$ 个 0. 容易想象, 质点沿 $(Q,1)$ 过程的轨道运动时, 每当到达状态 "∞" 后以概率 1 立即连续流入有穷状态. 在 §4 中已看到, 当 $S<\infty$ 时, 由 $(Q,\pi^{(n)})$ 过程列的收敛可推出其它 $(Q,V^{(n)})$ 过程列的收敛, 在这个意义上它起了控制作用, 就象级数论中控制级数所起的作用.

定理 1 [1] $(Q,1)$ 过程 $x(t,\omega),t\geqslant 0$ 是既满足向后方程组 $P'(t)=QP(t),P(0)=I$ 又满足向前方程组 $P'(t)=P(t)Q,P(0)=I$ 的 Q 过程.

证 因每 Q 过程都满足向后方程组, 故只要证它满足向前方程组. 为此由 §13.3 定理 2, 只要证在任一固定的 $t_0>0$ 前, 样本函数以概率 1 有最后一断点 ($t=0$ 也看作一跳跃点), 而且是跳跃点. 令 $\Omega_0=(x(t_0,\omega)\in E)$, 则 $P(\Omega_0)=1$. 固定 $\omega\in\Omega_0$, 设 $x(t_0,\omega)=k$. 由于 $x_n(t_0,\omega)\to x(t_0,\omega)$ 及 E 的离散性, 存在 $N(=N(\omega))$, 使 $n\geqslant N$ 时, $x_n(t_0,\omega)=k$. 取 $M>\max(N,k)$, 由于在飞跃点 τ 上, $x_n(\tau,\omega)=n$, 再注意 §16.1 (2), 可见在 t_0 以前, $x_M(t,\omega)$ 必有最后一断点, 而且是跳跃点. 这个点是某 k 区间的闭包的左端点. 由于 §4 (3), 此 k 区间保留在一切 $x_n(t,\omega),n\geqslant M$ 之中, 故也保留在 $x(t,\omega)$ 之中, 从而得证 $x(t,\omega)$ 在 t_0 以前有最后一断点为跳跃点, $(\omega\in\Omega_0)$. 故 $(Q,1)$ 过程满足向前与向后两组方程. □

系 1 设 $\tau(\omega)$ 为 $(Q,1)$ 过程的第一个飞跃点, 则

$$P(\lim_{t\downarrow\tau}x(t,\omega)=\infty)=1$$

证 此由定理 1 及 §14.2 中定理 1 与系 4 推出 [2]. □

系 2 对 $(Q,1)$ 过程, $P(x(\tau_\varphi,\omega)=\infty)>0$, 这里 τ_φ 由 §2 (1) 定义, $\varphi>0$ 任意.

证 因第一个飞跃点的分布是连续的 (见 §13.3 (45)), 故

$$P(\tau_\varphi>0)\geqslant P(\tau\leqslant\varphi)>0$$

由 §14.2 系 4, τ_φ 不可能是任一 i 区间的左端点, 故由 §14.2 定理 1, $P(x(\tau_\varphi)=\infty)=P(\tau_\varphi>0)>0$. □

§17.7 $S=\infty$ 时 Q 过程的另一种构造 [3]

(一) 本节的目的是当 $R<\infty,S=\infty$ 时用另一种方法求出一切 Q 过程. 思路与 §4 相仿, 故证明扼要. 考虑 Q 过程 $x(t,\omega),t\geqslant 0$ 以及 §3 (11) 中的 $\alpha_1^{(n)}$, 并令 $s_i^{(n)}=P(x(\alpha_1^{(n)})=i)$. 由 §3 定理 3, 存在 $\ell\geqslant 0$, 当 $n\geqslant\ell$ 时, $P(\alpha_1^{(n)}<\infty)=1$, 从而 $\sum\limits_{i=0}^{n}s_i^{(n)}=1$. 故至少有一个 $s_k^{(n)}>0$, 再由 §3 定理 3 及 §1 (8), 有

$$s_j^{(n)}=s_j^{(n+1)}\Big/\sum_{i=0}^{n}s_i^{(n+1)},\quad (j\leqslant n) \tag{1}$$

[1] 其实 (Q,I) 过程是唯一的满足两组方程的 Q 过程, 证明见 Reuter [1].

[2] 或参看 Chung[1], 第 227 页, II.17 定理 5.

[3] 构造问题已由 §6 基本定理完全解决, 故本节初读时可以不看.

因而 $s_k^{(m)} > 0, (m \geqslant k)$, 而且 $s_j^{(m)}/s_k^{(m)}$ 不依赖于 $m(\geqslant \max(j,k))$. 今任意取定 $s_k > 0$ 而定义

$$s_i = s_k \frac{s_j^{(m)}}{s_k^{(m)}} \ (\geqslant 0) \tag{2}$$

显然，除差一常数因子外，(s_j) 由过程唯一决定，$j \geqslant 0$.

称 (s_j) 为此 Q 过程的 **第二组特征数列**. 注意，它只对 $R < \infty, S = \infty$ 的 Q 过程有定义.

象证明 §5 定理 4 一样，可以证明

$$0 < \sum_{j=0}^{\infty} s_j R_j < \infty \tag{3}$$

为此，只要对 $x(t,\omega), t \geqslant 0$ 施行 $C(\tau_m, \alpha_m^{(n)})$(代替那里的 $C(\tau_m, \beta_m^{(n)})$) 变换而得 $(Q, s^{(n)})$(代替那里的 $(Q, V^{(n)})$) 过程 $x_n(t,\omega), t \geqslant 0, S^{(n)} = (s_0^{(n)}, \cdots, s_n^{(n)})$, 易见 §5 (29) 仍成立，只要以 $s_k^{(n)}$ 换 $v_k^{(n)}$.

(二) 考虑反面问题：设已给满足 (3) 的非负数列 $(s_j), j \geqslant 0$, 不妨设 $s_0 > 0$. 按 §1 (20) 作分布 $S^{(n)} = (s_0^{(n)}, \cdots, s_n^{(n)})$, 以 s_i 代替那里的 φ_i. 由 §1 定理 3, 存在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 在其上可定义 $(Q, S^{(n)})$ 过程列 $x_n(t,\omega), t \geqslant 0 (n \geqslant 0)$, 满足 §1 (7). 以 $\tau_i^{(n)}(\omega)$ 表 $x_n(t,\omega)$ 的第 i 个飞跃点，并令

$$\beta_0^{(n)} = \min(\tau_i^{(n)} : \ x_n(\tau_i^{(n)}) = 0) \tag{4}$$

由于 $s_0 > 0, P(\beta_0^{(n)} < \infty) = 1$. 定义

$$L_{nm}^{(i)}(\omega) = \begin{cases} \tau_{i+1}^{(n)}(\omega) - \tau_i^{(n)}(\omega), & \text{如}\tau_i^{(n)}(\omega) \leqslant \beta_0^{(n)}(\omega) \\ & n \geqslant x_n(\tau_i^{(n)}(\omega)) > m \\ = 0, & \text{如}\tau_i^{(n)}(\omega) > \beta_0^{(n)}(\omega) \\ & \text{或}x_n(\tau_i^{(n)}(\omega)) \leqslant m \end{cases} \tag{5}$$

则象 §5 (29) 的证明一样可证

$$E\left(\sum_{i=1}^{\infty} L_{mn}^{(i)}\right) = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{s_k^{(n)}}{s_0^{(n)}} R_k = \frac{1}{s_0} \sum_{k=m+1}^{n} s_k R_k \tag{6}$$

当 $n \to \infty, m \to \infty$ 时，由 (3) 知右方项趋于 0. 再仿 §4 (16) 定义

$$T_\varepsilon^{(n)}(\omega) = \sum_{\tau_1^{(n)} \leqslant \tau_{ij}^{(n)} < \beta_0^{(n)}} f_\varepsilon(\tau_{ij+1}^{(n)}(\omega) - \tau_{ij}^{(n)}(\omega))$$

不难证明

$$\lim_{n\to\infty} ET_\varepsilon^{(n)} = \frac{1}{s_0} \sum_{k=0}^{\infty} s_k R_k^{(\varepsilon)} \to 0, \ \ (\varepsilon \to 0) \tag{7}$$

定理 1 如 (s_j) 满足 (3), 则 $(Q, S^{(n)})$ 过程的样本函数 $x_n(t,\omega)$ 当 $n \to \infty$ 时对几乎一切 t 收敛.

证 只需利用 (6),(7) 并重复 §4 定理 1 的证即可. □

仿 §4 补定义极限函数后, 同样可证所得的为 Q 过程 $x(t,\omega)$, $t \geqslant 0$, 称为 (Q,S) 过程, 其转移概率 $p_{ij}(t)=\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}(t)$. 而 $p_{ij}^{(n)}(t)$ 是 $(Q,S^{(n)})$ 过程的转移概率.

定理 2 (Q,S) 过程 $x(t,\omega)$, $t\geqslant 0$ 是唯一的以已给 (s_j), $j\geqslant 0$ 为特征数列的 Q 过程.

证 用 §3(11) 于 (Q,S) 及 $(Q,S^{(\ell)})$ 过程而得 $\alpha_1^{(n)}$ 及 $\alpha_1^{(\ell,n)}$, 由 (1) 得

$$P(x(\alpha_1^{(n)})=i)=\lim_{\ell\to\infty}P(x_\ell(\alpha_1^{(\ell,n)}))=\lim_{\ell\to\infty}P(x_{n+\ell}(\alpha_1^{(n+\ell,n)})=i)$$
$$=\lim_{\ell\to\infty}s_i^{(n+\ell)}\Big/\sum_{j=0}^{n}s_j^{(n+\ell)}=s_i^{(n)}\quad(i=0,1,\cdots,n)$$

由此即知 $x(t,\omega)$, $t\geqslant 0$ 的特征数列为 (s_j).

唯一性的证明仍仿 §4 定理 4, 但要作下列修改. 设 $\widetilde{x}(t,\omega)$, $t\geqslant 0$, 是以 (s_j) 为特征数列的 Q 过程, 对它用 §3 中 (10)-(13) 定义 τ_m, $\alpha_m^{(n)}$, $m\geqslant 1$, 并施行 $C(\tau_m,\alpha_m^{(n)})$ 变换而得 $(Q,S^{(n)})$ 过程 $x_n(t,\omega)$, $t\geqslant 0$. 由特征数列的定义

$$s_j^{(n)}=s_j\Big/\sum_{i=0}^{n}s_i,\quad(j=0,1,\cdots,n)$$

故 $x_n(t,\omega)$ 的转移概率 $P_{ij}^{(n)}(t)$, 如上述应收敛于 (Q,S) 过程的转移概率 $p_{ij}(t)$.

今证 $p_{ij}^{(n)}(t)$ 也收敛于 $\widetilde{x}(t,\omega)$ 的转移概率 $\widetilde{p}_{ij}(t)$. 固定 $(0,b)$ 而令

$$S_\infty^{(b)}(\omega)=(t:\ t\in(0,b),\ t\text{ 是 }\widetilde{x}(t,\omega)\text{ 的飞跃点})$$

因 $S_\infty^{(b)}(\omega)$ 以概率 1 是闭集, 故 $(0,b)/S_\infty^{(b)}(\omega)$ 至多是可列多个不相交的开区间 $T_j(\omega)=(\eta_j(\omega),\gamma_j(\omega))$ 的和, 在每 $T_j(\omega)$ 中, $\widetilde{x}(t,\omega)\neq\infty$. 定义 $\widetilde{x}(\eta_j)=\lim\limits_{S\downarrow\eta_j}\widetilde{x}(s)$, 试证

$$P(\widetilde{x}(\eta_j,\omega)=\infty)=0\tag{8}$$

否则, 如说 $P(\widetilde{x}(\eta_j)=\infty)>0$, 则必存在 $k\in E$, 使

$$P(\widetilde{x}(\eta_j)=\infty;\ \text{对某}t\in(\eta_j(\omega),\gamma_i(\omega)),\widetilde{x}(t,\omega)=k)>0$$

于是, 由上式得 $P(\xi_k(\omega)<\infty)>0$ (这里 $\xi_k(\omega)$ 由 §2(5) 对 $\widetilde{x}(t,\omega)$ 定义), 此与 §2 (7) 矛盾. 今令 t- 集

$$S_i^{(b)}(\omega)=(\text{使 }\widetilde{x}(\eta_j)=i\text{ 的区间 }(\eta_j(\omega),\gamma_j(\omega))\text{ 之和})$$

由 (8) 得

$$\bigcup_{i\neq\infty}S_i^{(b)}(\omega)=\bigcup_j(\eta_j(\omega),\gamma_j(\omega))=(0,b)\setminus S_\infty^{(b)}(\omega)$$

既然以概率 1, $L(S_\infty^{(b)}(\omega))=0$, 故 $\sum\limits_{i\neq\infty}L(S_i^{(b)}(\omega))=b$ 的概率为 1. 然后自 §4 (38) 起逐句重复 §4 定理 4 的证, 并注意 $x(0,\omega)=x_n(0,\omega)$ 即可. □

总结以上诸结果便得

定理 3 (i) 设已给 Q 过程 $x(t,\omega), t \geqslant 0$, 使 $R < \infty, S = \infty$, 则它的第二组特征数列 (s_j) 满足条件 (3); (ii) 反之，设已给一列非负数 (s_j), 满足 (3), 则存在唯一 Q 过程 $x(t,\omega), t \geqslant 0$, 其第二组特征数列重合于此已给数列，而且此过程的转移概率为 $P_{ij}(t) = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}(t)$, 这里 $p_{ij}^{(n)}(t)$ 是 $(Q, S^{(n)})$ 过程的转移概率，而 $S^{(n)} = (s_0^{(n)}, \cdots, s_n^{(n)})$ 由 §1 (20) 定义.

至此，我们已把生灭过程的构造问题叙述完毕. 在此基础上，下节中将研究生灭过程的若干性质.

§17.8、 遍历性与 0–1 律

(一) 在 §15.1–§15.2 中，我们对一般的马氏链讨论了 0–1 律、常返性与过份函数. 下面看到，对生灭过程，可以得到更完整的结果. 注意，由 §15.1 定理 2, 生灭过程的无穷近 0–1 律恒成立，故只要考虑无穷远 0–1 律 (本节内简称 0–1 律).

设 $X = \{x(t,\omega), t \geqslant 0\}$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的生灭过程，不妨设它是完全可分，Borel 可测的，它的密度矩阵 Q 由 §16.1 (1) 给出. 利用 §16.1 (4)-(7), 可以引进数字特征 m_i, e_i, R, S, Z_n, Z.

引进随机变量 $g_i(\omega)$:

$$\left.\begin{aligned} g_i(\omega) &= \inf(t:\ t > \tau(\omega),\ x(t,\omega) = i), &&\text{如右方 } t\text{- 集非空}\\ &= \infty, &&\text{反之}\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

这里 $\tau(\omega)$ 为 X 的第一个跳跃点，因而 $g_i(\omega)$ 是经过第一次跳跃后的首达 i 的时刻，而 $E_i g_i$ 是自 i 出发，离开 i 后首次回到 i 的平均时间. 称 **过程 X 遍历**, 如它常返，而且对一切 $i \in E$,

$$E_i g_i < \infty \tag{2}$$

定理 1 设 $R = \infty$, 则 X 常返的充要条件是 $Z = \infty$; X 遍历的充要条件是 $Z = \infty$, $e_1 < \infty$.

证 由于 $R = \infty$, 第一个飞跃点以概率 1 等于 ∞, 故自 k 出发，转移到 m 的概率，重合于自 k 出发，经有穷次跳跃而达到 m 的概率 $q_k(m)$. 由 §16.1 (25) 可见： $q_k(m) \equiv 1$ (一切 $k, m \in E$) 的充要条件是 $Z = \infty$. 因此由 §15.2 定理 2 得证前一结论.

考虑首达 i 的时间.

$$\left.\begin{aligned} \eta_i(\omega) &= \inf(t:\ t > 0,\ x(t,\omega) = i), &&\text{如右方 } t\text{- 集非空}\\ &= \infty, &&\text{反之}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

容易看出

$$\begin{aligned} E_i g_i &= E_i \tau + \frac{a_i}{a_i + b_i} E_{i-1}\eta_i + \frac{b_i}{a_i + b_i} E_{i+1}\eta_i \\ &= \frac{1}{a_i + b_i} + \frac{a_i}{a_i + b_i} m_{i-1} + \frac{b_i}{a_i + b_i} e_{i+1} \end{aligned} \tag{4}$$

由 §16.1 (4) $m_{i-1} < \infty$. 如 $e_1 < \infty$, 由 §16.1 (5) 可见 $e_{i+1} < \infty$. 因而由 (4) 及 (2) 式下的注意即得证后一结论. □

如 $R<\infty$, Q 过程不唯一，例如 (Q,π) 过程 (参看 §1 (二)) 就是其中的一种，π 为 E 上任一概率分布．固定 Q, 全体 (Q,π) 过程的集记为 $\{D\}$, 全体 Q 过程的集记为 $\{A\}$, 显然 $\{D\}\subset\{A\}$.

定理 2 如 $R<\infty$, 则一切 Q 过程遍历 (因而都常返).

证 考虑 §3(8) 中定义的 $\beta_1^{(0)}$, 它是第一个飞跃点后首达状态 0 的时刻．由 $R<\infty$, 存在 $s>0$ 及 $\ell\in E$, 使 $P(\tau_1<s,x(s)\leqslant\ell)>0$, 这里 τ_1 是第一个飞跃点．从而

$$P(\beta_1^{(0)}<\infty)\geqslant P(\tau_1<s,\ x(s)\leqslant\ell,\ s\text{后经有穷次跳跃到}0)>0 \tag{5}$$

因此，存在 $T>0,\alpha>0$, 使对一切 $k\in E$, 有

$$P_k(\beta_1^{(0)}\leqslant T)\geqslant\alpha$$

(参看 §3 的注). 于是由 §2 引理 1, 有 $E\beta_1^{(0)}<\infty$. 显然 $g_0\leqslant\beta_1^{(0)}$, 故 [1]

$$m_{00}=E_0g_0\leqslant E_0\beta_1^{(0)}<\infty$$

这得证状态 0 遍历．由互通性，过程遍历． □

(二) 以下所谓 "任意生灭过程" 是指 "任意具有 §16.1 (1) 形的 Q 及任意 Q 过程".

定理 3 设 X 为任意生灭过程，$\{f_i\}$ 为 X 的任一过份函数，则必存在极限

$$\lim_{t\to\infty}f_i=f \tag{5'}$$

如 $R<\infty$ 或 $R=\infty$, $Z=\infty$, 则 $f_i\equiv f$(常数).

证 如对某 j, $f_j=\infty$, 则因 $P_{ij}(t)>0$ 对一切 $i,j\in E$ 及 $t>0$ 成立，故由 §4.2(10) 知 $f_i\equiv\infty$. 因而不妨设 $\{f_i\}$ 是有限的过份函数.

如 $R<\infty$ 或 $R=\infty$, $Z=\infty$, 由定理 1 及 2, 知 X 常返．根据 §15.2 定理 3, 知 $f_i\equiv f$.

剩下一种情形是 $R=\infty$, $Z<\infty$. 这时 X 非常返，没有飞跃点．以 $\mathcal{N}_t$ 表由 $\{x_{u,0\leqslant u\leqslant t}\}$ 所产生的 σ 代数，则 $\{f_X,\mathcal{N}_t,P\}$ 是可分的半 Martingale, 于是 P 几乎地存在极限

$$\lim_{t\to\infty}f_{x_t}(\omega)=f(\omega) \tag{6}$$

既然 X 没有飞跃点，非常返，故对几乎一切 ω 及任一正数 N, 存在 $T(\omega)>0$, 使当 $t\geqslant T(\omega)$ 时，有 $x_t(\omega)\geqslant N$, 换句话说 [2]

$$P(\lim_{t\to\infty}x_t(\omega)=\infty)=1 \tag{7}$$

由此并注意 X 无飞跃点，可见对 X 的嵌入马氏链 $\{y_n\}$, 也有

$$P(y_n(\omega)\to\infty)=1$$

注意对生灭过程，自 i 出发，经一步跳跃后只能到 $i+1$ 或 $i-1$. 故对几乎一切 ω, $y_n(\omega)$ 必取一切正整数 (除有穷多个外) 而趋于 ∞. 于是由 (6) 知以概率 1

$$\lim_{n\to\infty}f_n=\lim_{n\to\infty}f_{y_n(\omega)}=\lim_{t\to\infty}f_{x_t(\omega)}=f(\omega) \tag{8}$$

---

[1] m_{ii} 应理解为自 i 出发，离开 i 后首次回到 i 的平均时间，即 $m_{ii}=E_ig_i$.

[2] 如换 P 为 P_i,(7),(8) 式同样正确.

这说明 $f(\omega)$ 以概率 1 等于某常数 f, 而且 (5') 成立. □

(三) **定理 4** 对一切生灭过程 X, 强 0–1 律成立.

证 如 X 常返, 由 §15.1 定理 5 知对 X, 0–1 律成立.

设 X 非常返, 即 $R=\infty$, $Z<\infty$. 此时 (7) 成立, 不论开始分布如何. 任取不变集 A, 由定义及马氏性知对任意 $t\geqslant 0$

$$P_i(A)=P_i(\theta_t A)=\int_\Omega P_i(\theta_t A/\mathcal{N}_t)P_i(d\omega)=\int_\Omega P_{x_t}(A)P_i(d\omega)=\sum_{j\in E}p_{ij}(t)P_j(A) \tag{9}$$

所以作为 i 的函数 $\{P_i(A)\}$ 是 X 的过份函数, 由定理 3 及 (8), 存在常数 f, 使

$$f=\lim_{i\to\infty}P_i(A)=\lim_{t\to\infty}P_{x_t}(A) \tag{10}$$

注意 A 为不变集, $P_i(A\Delta\theta_t A)=0$, 故上式右方等于

$$\lim_{t\to\infty}P_i(\theta_t A/\mathcal{N}_t)=\lim_{t\to\infty}P_i(A/\mathcal{N}_t)=P_i(A/\mathcal{N}_\infty)=\chi_A(\omega)\ \ (P_i-\text{几乎}) \tag{11}$$

$\chi_A(\omega)$ 是 A 的示性函数. 由 (10) 及 (11) 得

$$P_i(\chi_A(\omega)=f)=1$$

因而 $P_i(A)=0$ 或 1. 再由 (9) 并注意 $p_{ij}(t)>0$, 知对 X 强 0–1 律成立. □

附录1 时间离散的马尔科夫链的过份函数

§1 势与过份函数

近年来关于马氏过程与古典分析中的位势理论间紧密的关系引起了广泛的注意. 如所周知，联系于拉普拉斯算子有所谓半调和函数，这种函数在数理方程中起着重要的作用. 在马氏过程论中，与这种算子和函数相当的分别是所谓无穷小算子 $\mathfrak{A}$ 和过份函数；而且对于 Wiener 过程，$\mathfrak{A}$ 恰好化为拉普拉斯算子，而对于具离散参数的齐次马氏链，$\mathfrak{A}$ 则化为 $P-I$ (P 的定义见下，I 为恒等变换). 研究这两种理论的关系，无论是对用数学分析方法以解决概率问题，或是用概率方法以解决数学分析问题，都有很大的帮助.

上述关系开始由 J. I. Doob 和 G. A. Hunt 所研究，这里，我们偏重于讨论过份函数. 本节叙述它们的一般性质，下一节叙述极限性质. 在下节中要用到一些辅助知识，为节省篇幅起见，我们只指明出处而略去证明.

(一) 设已给可列集 E 上一广随机矩阵[1] $P=(p(i,j)), i,j\in E$, E 的全体子集构成 E 中一 σ 代数 $\mathcal{B}$, 对 $A\in\mathcal{B}$, 令 $p(i,A)=\sum\limits_{j\in A}p(i,j)$, 显然

$$0\leqslant p(i,A)\leqslant p(i,E)\leqslant 1 \tag{1}$$

用迭代法定义 $p^{(n)}(i,A)$:

$$\left.\begin{aligned}&p^{(0)}(i,A)=\chi_A(i)\left(=\begin{cases}1, & \text{如}\, i\in A\\ 0, & \text{如}\, i\overline{\in} A\end{cases}\right)\\ &p^{(n)}(i,A)=\int_E p^{(n-1)}(j,A)p(i,dj)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

上式中的积分实际上是级数 $\sum\limits_{j\in E}p^{(n-1)}(j,A)p(i,j)$, 不过写成积分的形式更方便. 由 (2) 可见:

$p^{(1)}(i,A)=p(i,A)$, $p^{(n)}(i,j)$ 是 n 步转移概率.

$p^{(n)}(i,A)$ 具有性质：当 i 固定时，它关于 A 是 $\mathcal{B}$ 上的不超过 1 的测度，显然，当 $A\in\mathcal{B}$ 固定时，它是 $i\in E$ 的函数.

由 §4.2 定理 2 知：可以在某概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上定义一马氏链 $X=\{x_n,n\geqslant 0\}$, 其状态空间为 $E\cup\{a\}$, $(a\overline{\in}E)$. 它在 E 中的一步转移概率为 $p(i,j)$, 而且 a 为吸引状态.

$$p(i,a)=1-p(i,E),\ (i\in E);\ \ p(a,a)=1 \tag{3}$$

由 P 可产生两个变换，一个是把 E 上的非负函数 $u(=u(i))$ 变为 E 上的非负函数 Pu: $u\to Pu$, 其中

$$Pu\cdot(i)=\int_E u(j)\,p(i,dj) \tag{4}$$

---

[1]即满足条件 $0\leqslant p(i,j)$, $\sum\limits_{j\in E}p(i,j)\leqslant 1$ 的矩阵 $(i,j\in E)$. 注意 $p(i,j)$ 与 t 无关.

这里 $Pu\cdot(i)$ 表函数 Pu 在 i 点的值. 另一个是把 $\mathcal{B}$ 上的测度 v 变为 $\mathcal{B}$ 上的测度 vP 的变换: $v\to vP$,

$$vP\cdot(A)=\int_E p(i,A)v(di) \tag{5}$$

$p(i,A)$ 是这二变换的核函数. 我们还需要一个重要的核函数 $G(i,A)$:

$$G(i,A)=\sum_{n=0}^{\infty}p^{(n)}(i,A) \tag{6}$$

当 $A=\{j\}$ 为单点集时, 它化为 $G(i,j)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}p^{(n)}(i,j)$. 利用核函数 $G(i,A)$ 及 $p^{(n)}(i,A)$, 类似地可以定义 Gu,vG 与 $P^{(n)}u,vP^{(n)}$.

(二) 设 $u(i)$ $(i\in E)$ 为非负函数. 可取 ∞ 为值. 称 u 为 (关于 p 或关于 X 的)**过份函数**, 如

$$Pu\leqslant u \tag{7}$$

称 u 为 (关于 P 或 X 的)**调和函数**, 如 u 有限非负而且

$$Pu=u \tag{8}$$

称 u 为 **势**, 如存在非负函数 $f(i), i\in E$ (f 可取 ∞ 为值), 使

$$u=Gf \tag{9}$$

这时也称 u 为 **f的势**.

显然, 调和函数是有穷的过份函数, 势也是过份函数; 实际上, 由 (9)

$$Pu=P[Gf]=P\left(\sum_{n=0}^{\infty}P^{(n)}f\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P^{(n)}f\leqslant Gf=u \tag{10}$$

特别, 由于 $G(i,A)=G\chi_A\cdot(i)$, 故作为 i 的函数, $G(i,A)$ 是 χ_A 的势, 从而也是过份的.

以 $\mathcal{E}$ 表关于 p 的全体过份函数的集.

引理 1 (i) 非负常数 $c\in\mathcal{E}$;

(ii) 如 $u,v\in\mathcal{E}$, c_1,c_2 为非负常数, 则

$$c_1u+c_2v\in\mathcal{E},\quad \min(u,v)\in\mathcal{E}$$

(iii) 如 $u_n\in\mathcal{E}$, $u_n\to u$, 则 $u\in\mathcal{E}$;

(iv) 对任 $u\in\mathcal{E}$, 存在 $u_n\in\mathcal{E}$, u_n 有界, 使 $u_n\uparrow u$.

证 (i) 及 (ii) 中第一结论明显. 为证第二结论, 令

$$h=\min(u,v)$$

则

$$Ph\leqslant Pu\leqslant u;\quad Ph\leqslant Pv\leqslant v \tag{11}$$

故 $Ph \leqslant h$.

(iii) 由 Fatou 引理

$$Pu = P\big(\lim_{n\to\infty} u_n\big) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} Pu_n \leqslant \lim_{n\to\infty} u_n = u \tag{12}$$

(iv) 只要取 $u_n = \min(n, u)$ 即可. □

关于有穷的势有下列简单引理:

引理 2 设 $u = Gf < \infty$, 则

(i) f 被 u 唯一决定;

(ii) $P^{(n)}u \downarrow 0\ (n \to \infty)$.

证 由 (6)

$$G = P^{(n)}G + \sum_{j=0}^{n-1} P^{(j)} \tag{13}$$

取 $n = 1$ 得 $Gf = PGf + f$. 如 $Gf < \infty$, 则 $PGf < \infty$, 故

$$f = u - Pu \tag{14}$$

其次, 由 (13)

$$P^{(n)}u = P^{(n)}Gf = Gf - \sum_{j=0}^{n-1} P^{(j)}f \downarrow 0\ \ (n \to \infty)\ \square$$

注 1 由证明可见, 为使 (i) 中结论即 (14) 成立, 只需 $PGf < \infty$ 即可. 如此条件不满足, 则 (i) 可不成立, 例如, 设 E 只含一点 i, 又 $P = P^{(0)}$, 则 $G(i,i) = \infty$, 故任一正函数 f 的势都恒等于 ∞.

称函数 v 为过份函数 u 的 **极大调和核**, 如果 $v \leqslant u$, v 是调和函数, 而且对任一不大于 u 的调和函数 h 都有 $h \leqslant v$. 显然, 如极大调和核存在, 则必唯一.

设 $u \in \mathcal{E}$, 由于

$$u \geqslant Pu \geqslant P^{(2)}u \geqslant \cdots \tag{15}$$

故存在极限

$$P^{(\infty)}u = \lim_{n\to\infty} P^{(n)}u \leqslant \infty \tag{16}$$

我们来证明: 如 $P^{(\infty)}u < \infty$, 则 $P^{(\infty)}u$ 是 u 的极大调和核; 因而特别地, 有穷过份函数 u 必有极大调和核为 $P^{(\infty)}u$. 实际上, 由 (15)

$$P(P^{(\infty)}u) = P\big(\lim_{n\to\infty} P^{(n)}u\big) = \lim_{n\to\infty} P^{(n+1)}u = P^{(\infty)}u$$

若 $h \leqslant u$ 而且调和, 则

$$h = P^{(n)}h \leqslant P^{(n)}u \downarrow P^{(\infty)}u$$

定理 1 (Riesz 分解) 任一有穷过份函数 u 可唯一地表为一调和函数 v 与一势 w 的和:

$$u = v + w \tag{17}$$

$$v = P^{(\infty)}u,\ w = G(u - Pu) \tag{18}$$

证 因 u 有穷，故 $P^{(\infty)}u$ 为 u 的极大调和核，在

$$u = P^{(n+1)}u + \sum_{j=0}^{n} P^{(j)}(u - Pu)$$

中令 $n \to \infty$, 即得

$$u = P^{(\infty)}u + G(u - Pu) \tag{19}$$

下证唯一性. 设 $u = v_1 + w_1$ 为任一展式， v_1 调和， w_1 为势，因而 $w_1 \leqslant u$ 有穷. 以 $P^{(n)}$ 作用于此展式两边，令 $n \to \infty$, 再用引理 2 (ii), 即得

$$P^{(\infty)}u = \lim_{n\to\infty} P^{(n)}u = \lim_{n\to\infty} P^{(n)}v_1 + \lim_{n\to\infty} P^{(n)}w_1 = v_1 \ \square$$

注 2 由证明过程可见，定理 1 中有穷性假定可局部化如下：如在点 i 上 $u(i) < \infty$, 则

$$u(i) = P^{(\infty)}u \cdot (i) + G(u - Pu) \cdot (i) \tag{20}$$

(三) 什么样的过份函数是势？由定理 1 可见：如对有穷过份函数 u 有 $P^{(\infty)}u = 0$, 则 u 必是势. 这结果可以加强.

定理 2 (势的判别法) 过份函数 u 是势的充分与必要条件是 $P^{(\infty)}u$ 至多只能取二值 0 与 ∞.

证 必要：令 $E_0 = (j:\ P^{(\infty)}u \cdot (j) < \infty)$, 因 $P^{(\infty)}u$ 过份，

$$\int_E P^{(\infty)}u \cdot (j) p(i, dj) \leqslant P^{(\infty)}u \cdot (i)$$

故如 $i \in E_0$, $k \overline{\in} E_0$, 则必 $p(i,k) = 0$, 否则左方积分等于 ∞ 而与 $i \in E_0$ 矛盾. 这表示 $p(i, E_0) = p(i, E)$, 因而不妨设 $E = E_0$.

设 $u = Gw$, 令 $B_m = \left(i:\ w(i) \geqslant \frac{1}{m}\right)$, 则

$$\infty > P^{(\infty)}u \geqslant P^{(\infty)}\left[\int_{B_m} w(j)G(\cdot, dj)\right] \geqslant \frac{1}{m} P^{(\infty)}G(\cdot, B_m)$$

于是 $P^{(\infty)}G(\cdot, B_m) < \infty$. 由此推知，对任一固定的 i, 下式

$$P^{(n)}G(i, B_m) + \sum_{j=0}^{n-1} P^{(j)}(i, B_m) = G(i, B_m) \tag{21}$$

的左方当 n 充分大时有穷，故 $G(i, B_m) < \infty$. 于上式中令 $n \to \infty$ 得

$$P^{(\infty)}G(i, B_m) = 0 \tag{22}$$

令

$$C_m = \left(i:\ w(i) < \frac{1}{m}\right)$$

$$P^{(\infty)}u = P^{(\infty)}\left[\int_{C_m} w(j)G(\cdot, dj) + \int_{B_m} w(j)G(\cdot, dj)\right]$$

第一积分等于

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)}\left[\int_{C_m} w(j)G(\cdot,dj)\right] = \lim_{n\to\infty}\int_{C_m} w(j)(P^{(n)}G)(\cdot,dj)$$
$$= \int_{C_m} w(j)(P^{(\infty)}G)(\cdot,dj)$$

类似计算并利用 (22) 得知第二积分等于

$$\int_{B_m} w(j)(P^{(\infty)}G)(\cdot,dj) = 0$$

因此

$$\infty > P^{(\infty)}u = \int_{C_m} w(j)(P^{(\infty)}G)(\cdot,dj) \to 0 \quad (m\to\infty)$$

充分：定义函数 w

$$w(i) = \begin{cases} u(i) - Pu\cdot(i), & \text{如} u(i) < \infty \\ \infty, & \text{如} u(i) = \infty \end{cases} \tag{23}$$

则 $u = Gw$. 实际上，如 $u(i) < \infty$, 由注 2 及假定

$$u(i) = P^{(\infty)}u\cdot(i) + G(u - Pu)\cdot(i) = Gw\cdot(i)$$

如 $u(i) = \infty$, 则由 $Gw\cdot(i) \geqslant w(i) = \infty$ 得

$$u(i) = \infty = Gw\cdot(i) \ \square$$

由定理 2 直接推得

系 1 有穷过份函数 u 是势的充分与必要条件是 $P^{(\infty)}u = 0$.

至于一般过份函数与势的关系有

定理 3 设 u 为有穷过份函数，而且对任一常返状态 i 有 $u(i) = 0$, 则 u 是一列不下降的势的极限.

证 以 D 表全体非常返状态所成的集. 任取一列 $D_n \subset D$, D_n 是有穷集， $D = \bigcup_n D_n$. 定义

$$u_k = \min\left[u, kG\left(\cdot, \bigcup_{n=1}^{k} D_n\right)\right] \tag{24}$$

如 $j \in D$, 当 k 充分大时， $j \in \bigcup_{n=1}^{k} D_n$, $G\left(j, \bigcup_{n=1}^{k} D_n\right) \geqslant 1$, 故 $u_k \uparrow u$. 由 (10) 式下的说明及引理 1(ii) 知 u_k 是有穷过份函数. 又因 $G(i,j) \leqslant G(j,j)$, 得

$$G\left(\cdot, \bigcup_{n=1}^{k} D_n\right) \leqslant \sum_{j\in \bigcup_{n=1}^{k} D_n} G(j,j) < \infty \tag{25}$$

故由本节引理 2 得

$$P^{(\infty)}u_k \leqslant kP^{(\infty)}G\left(\cdot, \bigcup_{n=1}^{k} D_n\right) = 0$$

由系 1 知 u_k 是势. □

系 2 如每一状态都非常返，则任一有穷过份函数是一列不下降的势的极限.

证明与上证完全相同.

如果定理 3 或系 2 的条件不满足，则结论一般不正确. 仍然考虑注 1 中的例，那里 $G(i,i) = \infty$, 故任一势或恒为 0 或恒为 ∞. 显然任一列势不能趋于过份函数 $u(i) \equiv C$, $0 < C < \infty$ 为常数.

(四) 试给出上述诸概念的一些概率解释. 考虑 (一) 中的马氏链 $X = \{x_n, n \geqslant 0\}$, $p^{(n)}(i,j)$ 是质点自 i 出发在第 n 步来到 j 的转移概率， $i,j \in E$, 把 u 看成 $E \cup \{a\}$ 上的函数，补定义 $u(a) = 0$, 则

$$P^{(n)}u \cdot (i) = \int_E u(j)p^{(n)}(i,dj) = \int_{E\cup\{a\}} u(j)p^{(n)}(i,dj) = E_i u(x_n) \tag{26}$$

因而 $P^{(n)}u \cdot (i)$ 是开始分布集中在 i 时， $u(x_n)$ 的平均值，而 (7),(8) 则分别化为

$$E_i u(x_1) \leqslant u(i) \quad (i \in E) \tag{27}$$

$$E_i u(x_1) = u(i) \quad (i \in E) \tag{28}$$

$G(i,A)$ 是自 i 出发的质点位于 $A(i \in E, A \subset E)$ 中的平均总次数，实际上，定义

$$\begin{aligned} \eta_n(\omega) &= 1, \quad \text{如} x_n(\omega) \in A \\ &= 0, \quad \text{如} x_n(\omega) \overline{\in} A \end{aligned}$$

则 $\eta = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \eta_n$ 是位于 A 中的总次数而

$$E_i\eta = E_i\left(\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(i,A) = G(i,A) \tag{29}$$

直观地，设想某块土地采用第 i 种耕作方案时可获年产量 $u(i)$ 斤， $u(a) = 0$, 如果今年采用第 i 种方案，则明年采用第 j 种的概率为 $p(i,j)$; 于是在今年 (第 0 年) 采用第 i 种方案的条件下，第 n 年的平均年产量为 $E_i u(x_n) = P^{(n)}u(i)$ 斤，而势

$$Gu(i) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}u(i)$$

则是长久耕种下去历年平均年产量的总和. 如果 u 是过份函数，则 (27) 表示今年的年产量不小于明年的平均年产量，又

$$P^{(\infty)}u \cdot (i) = \lim_{n\to\infty} P^{(n)}u \cdot (i)$$

是经过多年以后的稳定的平均年产量，而 Riesz 分解式 (19) 则表示今年年产量与稳定的平均年产量之差是 $G(u-Pu)$.

例 1 对任意集 $A\subset E$, 以 $u_A(i)$ 表自 i 出发的质点经有穷多步 (包括 0 步) 终于来到 A 中的概率，即

$$u_A(i)=P_i\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}(x_n\in A)\right)\tag{30}$$

显然 $0\leqslant u_A(i)\leqslant 1$; $u_A(i)=1\ (i\in A)$, 以 $r_A(i)$ 表自 i 出发从下一步起永不来到 A 的概率，即

$$r_A(i)=P_i\left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}(x_n\in A)}\right)=P_i\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(x_n\in\overline{A})\right)$$

则因

$$\begin{aligned}u_A(i)&=P_i\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(x_n\in A)\right)+p^{(0)}(i,A)P_i\left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}(x_n\in A)}\right)\\&=Pu_A\cdot(i)+p^{(0)}(i,A)r_A(i)\end{aligned}\tag{31}$$

可见 $u_A(i)$ 是有穷的过份函数，而且

$$p^{(0)}(i,A)r_A(i)=u_A(i)-Pu_A\cdot(i)$$

由 (17),(18) 得 u_A 的 Riesz 展式为

$$u_A(i)=P^{(\infty)}u_A\cdot(i)+\int_E p^{(0)}(j,A)r_A(j)G(i,dj)\tag{32}$$

这式的概率解释见下例.

例 2 以 $v_A(i)$ 表自 i 出发到达 A 无穷多次的概率，即

$$\begin{aligned}v_A(i)&=P_i\left(\bigcap_{m=0}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}(x_n\in A)\right)\\&=\lim_{m\to\infty}P_i\left(\bigcup_{n=m}^{\infty}(x_n\in A)\right)\\&=\lim_{m\to\infty}P^{(m)}u_A\cdot(i)=P^{(\infty)}u_A\cdot(i)\end{aligned}\tag{33}$$

故 v_A 是 u_A 的极大调和核，当然是调和函数.

以 $w_A(i)$ 表自 i 出发到达 A 有穷 (>0) 次的概率，则显然

$$u_A(i)=v_A(i)+w_A(i)$$

故由 (32) 及 Riesz 展式的唯一性得

$$w_A(i)=\int_E p^{(0)}(j,A)r_A(j)G(i,dj)=\int_A r_A(j)G(i,dj)\tag{34}$$

因而 w_A 是 $p^{(0)}(\cdot,A)r_A(\cdot)$ 的势.

注 3 如果 u 是调和函数，显然 (17) 化为 $u = v$. 特别，如 P 为随机矩阵又 $u_A(i) \equiv 1$ (当任二状态互通而且常返时此条件满足), 则因 u_A 调和而得 $v_A(i) = u_A(i)$, 一切 i.

(五) 与过份函数、调和函数对偶的概念分别是过份测度与调和测度. 称非负数列 $v = \{v(i)\}$, $(i \in E)$ 为 (关于 P 的，或关于 X 的)**过份测度**, 如

$$vP \leqslant v \tag{35}$$

其中 $vP\cdot(j)$ 的值由 (5) 定义 (当 (5) 中 A 为单点集 $\{j\}$ 时). 如果 (35) 取等号而且 $0 \leqslant v(i) < \infty$ $(i \in E)$, 就称 v 为 **调和测度**.

如 $v(i) \equiv 0$, 显然 v 是调和测度，我们以下自然不考虑这种平凡情形.

当 P 为随机矩阵而且至少存在一常返状态时，调和测度存在；如果存在二不互通的常返状态，则有无穷多个调和测度.[1]

我们知道，关于任何广转移矩阵 P, 过份函数总存在 (任意常数 $C \geqslant 0$ 都是), 但过份测度的存在性却待研究.

定理 4 设 P 为随机矩阵， E 中任二状态互通，则至少存在一个过份测度 v, 而且 $0 < v(j) < \infty$, 一切 $j \in E$.

证 任意固定一个 $i \in E$. 对每 $k \in E$ 定义 ${}_iN_{ik}$ 如下:

(i) 对 $k = i$, 令 ${}_iN_{ii} = f_{ii}$, f_{ii} 为自 i 出发后终于回到 i 的概率；由互通性知 $f_{ii} > 0$;

(ii) 对 $k \neq i$, 令 ${}_iN_{ik}$ 为自 i 出发后在回到 i 以前到达 k 的平均次数.

对 $k \neq i$, 以 ${}_if_{jk}$ 表自 j 出发后在到达 i 以前到达 k 的概率. 则显然有

$${}_iN_{ik} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot {}_if_{ik}({}_if_{kk})^{n-1}(1 - {}_if_{kk}) = \frac{{}_if_{ik}}{1 - {}_if_{kk}} \tag{36}$$

由互通性知 ${}_if_{ik} > 0$, ${}_if_{kk} < 1$, 故

$$0 < {}_iN_{ik} < \infty \quad (\text{一切} k \in E) \tag{37}$$

以 ${}_ip_{ik}^{(n)}$ 表自 i 出发于第 n 步来到 k 而且中间未回到 i 的概率，我们有

$${}_iN_{ik} = \sum_{n=1}^{\infty} {}_ip_{ik}^{(n)}$$

简写 $p(i,j) = p_{ij}$, 于是

$$\begin{aligned}\sum_j {}_iN_{ij} \cdot p_{jk} &= f_{ii}p_{ik} + \sum_{j \neq i}\left(\sum_{n=1}^{\infty} {}_ip_{ij}^{(n)}\right)p_{jk} \\ &= f_{ii}p_{ik} + \sum_{n=1}^{\infty} {}_ip_{ik}^{(n+1)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} {}_ip_{ik}^{(n)} = {}_iN_{ik}\end{aligned} \tag{38}$$

故取 $v(j) = {}_iN_{ij}$ $(j \in E)$, 即得所欲求. □

[1] 参看 §2.5, 并注意那里所谓平稳分布是一种特殊的调和测度.

可以把对过份测度的研究化为对过份函数的研究. 实际上，设关于广转移矩阵 $P=(p_{ij})$ 存在过份测度 v, $0<v(i)<\infty$, 令

$$q_{ji}=p_{ij}\frac{v(i)}{v(j)} \tag{39}$$

显然 $Q=(q_{ji})$ 是一广转移矩阵. 如果 β 是关于 P 的过份测度，定义

$$\alpha(i)=\frac{\beta(i)}{v(i)}\quad (i\in E) \tag{40}$$

则 $\alpha=\{\alpha(i)\}$ 是关于 Q 的过份函数.

§2 过份函数的极限定理

(一) 本节中，我们先将马氏链的位势理论作一简短介绍，然后应用此理论以研究马氏链的过份函数的极限定理. 这节中的某些结果，由于篇幅所限，不能在此证明，只指明出处，以供查阅.

设状态空间 E 为可列集， P 为 E 上的广转移矩阵， $P=(p(i,j))$ 给出一步转移的概率，矩阵 P 满足下列条件：

$$p(i,j)\geqslant 0;\qquad \sum_{j\in E}p(i,j)\leqslant 1$$

回忆上节所述，称非负函数 $h(i)$ $(i\in E)$ 为过份的，如

$$Ph\cdot(i)=\sum_{j\in E}p(i,j)h(j)\leqslant h(i)\quad (i\in E)$$

如此式取等号，而且 h 非负有限，就称 h 为调和的. E 上的测度 μ 如满足条件

$$\mu P\cdot(j)\equiv\sum_{i\in E}\mu(i)P(i,j)\leqslant\mu(j)\quad (j\in E)$$

则称为过份测度.

设 h 为过份函数，如果 $E^h=(i:\ 0<h(i)<\infty)$ 非空，定义

$$p^h(i,j)=p(i,j)h(j)/h(i)\quad (i,j\in E^h) \tag{1}$$

则 $P^h=(p^h(i,j))$ 是 E^h 上的广转移矩阵，因而可以定义 h-**过份函数**(即定义在 E^h 上的关于 P^h 过份的函数)、 h-**调和函数** 等等. 以 P^h 为转移概率矩阵，以 E^h 为相空间的马氏链 $(x_n(\omega),\beta(\omega))$ 称为 h-**链**,$\beta(\omega)$ 为中断时刻， $0\leqslant n\leqslant\beta(\omega)$ (如 $\beta(\omega)=\infty$, 则 $0\leqslant n<\infty$), $\omega\in\Omega$. 如 $\beta(\omega)\equiv\infty$, 简记 $(x_n(\omega),\beta(\omega))$ 为 $\{x_n(\omega)\}$ 或 $\{x_n\}$. 注意 1- 链即以 P 为转移概率矩阵的马氏链.

以 $p^{(n)}(i,j)$ 表 1- 链的 n 步转移概率， $p^{(0)}(i,j)=\delta_{ij}$ (Kronecker 符号); 令

$$G(i,j)=\sum_{n=0}^{\infty}p^{(n)}(i,j) \tag{2}$$

本节总假定 1- 链是非常返的，即

$$G(i,j) < \infty \quad (i,j \in E) \tag{3}$$

固定 E 上一测度 γ, 使满足

$$\gamma(i) > 0 \ (i \in E); \quad \sum_{i \in E} \gamma(i) = 1$$

定义函数

$$K(i,j) = \frac{G(i,j)}{\zeta(j)} \quad (i,j \in E)$$

这里 $\zeta(j) = \sum_{i \in E} \gamma(i) G(i,j)$ (如 $\zeta(j) = 0$, 则可将 j 自 E 中除去，故不妨设 $\zeta(j) > 0$). 在 E 中可引入距离 d, 使在此距离下，点列 $\{j_n\} \subset E$ 是 Cauchy 基本列的充要条件是：或者 $\{j_n\}$ 只含有穷多个不同元，或者 $\{j_n\}$ 含无穷多个不同元而且 $\{K(i,j_n)\}$ 对每一固定的 $i \in E$ 都是实数的 Cauchy 基本列. E 关于 d 的完备化空间记为 E^*. 称集 $B = E^* \setminus E$ 为 E 的**马亭边界**,B 依赖于 P 及 γ. 以 $\mathcal{F}$ 表 E^* 中含一切开集的最小 σ 代数.

设 $\xi \in B$, 下式定义的函数 $K(\cdot,\xi)$ 是过份的：

$$K(i,\xi) = \lim_{\substack{j \to \xi \\ d}} K(i,j) \tag{4}$$

称过份函数 h 为 **极小的**, 如自展式 $h = h_1 + h_2$ (其中 h_1, h_2 均过份) 可推出 h_1, h_2 都与 h 成比例. 称边界点 $\xi \in B$ 为 **极小的**, 如 $K(\cdot,\xi)$ 是极小调和函数，而且

$$\sum_{i \in E} \gamma(i) K(i,\xi) = 1 \tag{5}$$

全体极小边界点所成的集记为 B_e.

我们要用到下列结果 [1].

(A) 设函数 h 过份而且对 γ 可积, 则对 h- 链 (x_n,β), 几乎处处或者 β 有穷，此时 $x_\beta \in E$; 或者 $\beta = \infty$, 此时 x_n 在 E^* 中拓扑下收敛于某点 $x_\beta \in B_e$.

(B) 对 (A) 中 h, 存在 $E \cup B_e$ 上唯一测度 μ^h, 使

$$h(i) = \int_{E \cup B_e} K(i,\xi) \mu^h(d\xi) \tag{6}$$

μh 有下列概率意义：设 h- 链 (x_n,β) 有开始分布 γ^h, $(\gamma^h(i) = \gamma(i)h(i))$, 则终极状态 x_β 的分布为 μ^h, 即

$$\mu^h(C) = P(x_\beta \in C), \quad C \in \mathcal{F} \tag{7}$$

当而且只当 h 调和时 μ^h 集中在 B_e 上.

---

[1] 参看 Hunt [1].

(C) 适当选取基本空间 Ω 后，对 $\xi \in B_e$, 可以考虑在条件 $x_\beta = \xi$ 下的 (B) 中的 h- 链，所得条件链记为 $\{x_{n\xi}\}$, 对 μ^h- 几乎一切 ξ, $(\mu^h - \xi)$, 此条件链是 $K(\cdot,\xi)$- 链 (因而更是马氏链), 有相空间为 $E_\xi = (i:\ K(i,\xi) > 0)$, 开始分布为 $\gamma^{K(\cdot,\xi)}$. 又由于 $K(\cdot,\xi)$ 调和,

$$\sum_{j\in E_\xi} p(i,j)K(j,\xi)/K(i,\xi) = 1 \quad (i \in E_\xi)$$

故此链是不断的，即它的中断时刻 $\beta(\omega) \equiv \infty$.

引理 1 设 $\xi \in B_e$, $\{x_n\}$ 为具任意开始分布 $\alpha\big(\sum\limits_i \alpha(i) = 1\big)$ 的 $K(\cdot,\xi)$- 链，则有 $P(x_\beta = \xi) = 1$.

证 概率 P 依赖于开始分布 α, 故最好记 P 为 P_α. 当 $\alpha = \gamma^{K(\cdot,\xi)}$ 时，由 (C) 及 (5) 得

$$1 = P_\alpha(x_\beta = \xi) = \sum_{i\in E_\xi} \gamma(i)K(i,\xi)P_i(x_\beta = \xi) \tag{8}$$

P_i 表开始分布集中在点 i 的 $K(\cdot,\xi)$- 链所产生的概率. 由于 $\gamma(i)K(i,\xi) > 0$, 由 (5) 及 (8) 得 $P_i(x_\beta = \xi) = 1$ $(i \in E_\xi)$, 从而对任意开始分布 α(它必集中在 E_ξ 上), 有

$$P_\alpha(x_\beta = \xi) = \sum_{i\in E_\xi} \alpha(i)P_i(x_\beta = \xi) = \sum_{i\in E_\xi} \alpha(i) = 1 \ \square$$

以下简记

$$\mu_i^h(C) = P_i(x_\beta \in C) \quad (C \in \mathcal{F})$$

此即开始分布集中在 i 上的 h- 链的终极状态的分布. 由 (6),(7) 已知 μ^h 有重要意义，但如何求出 μ_i^h 及 μ^h 的值？在一特殊情形即对 E^h 中的单点集 j, 由 Hunt [1] 中 (2.21)

$$\left.\begin{aligned} \mu_i^h(j) &= G(i,j)[h(j) - Ph\cdot(j)]/h(i) \quad (i,j \in E^h) \\ \mu^h(j) &= \sum_{i\in E^h} \gamma(i)G(i,j)[h(j) - Ph\cdot(j)] \quad (j \in E^h) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

至于边界上的集 C, 则有

定理 1 设 $C \subset B_e$, $C \in \mathcal{F}$, 则

$$\mu_i^h(C) = h_C(i)/h(i) \quad (i \in E^h)$$
$$\mu^h(C) = \sum_{i\in E^h} \gamma(i)h_C(i)$$

其中 $h_C(i)$ 表 h 在 i 关于 C 的 Réduite [1].

证 任取一不属于 E 的元 s, 令 $p(s,i) = \gamma(i)$, $p(i,s) = 0$ $(i \in E)$, 则 $p(i,j)$ 的定义域自 E 扩大到 $E \cup \{s\}$. 由于 $\gamma(i) > 0$, 扩大后的 P 有一中心 s,, 故可引用 Watanabe [1] 中的公式 (4.20):

$$h_C(i) = \int_C K(i,\xi)\mu^h(d\xi) \tag{10}$$

[1] 这里及下面用到的一些知识见 T. Watanabe [1] 与 Hunt [1].

由此得 (参看 Hunt [1] 中 (2.19) 式)

$$\mu_i^h(C)=\int_C \frac{K(i,\xi)}{h(i)}\,\mu^h(d\xi)=\frac{h_C(i)}{h}(i)\quad (i\in E^h) \tag{11}$$

由 (7) 及 (11) 得

$$\mu^h(C)=\sum_{i\in E^h}\gamma^h(i)\mu_i^h(C)=\sum_{i\in E^h}\gamma(i)h_C(i)\ \square$$

关于极小性有下列简单结论，为完全计仍给出证明.

引理 2 (i) 常数 1 是极小调和函数的充要条件是：存在不恒为 0 的有界调和函数，而且任一有界调和函数是常数.

(ii) 设 $\xi\in B_e$, 又 h 是 $K(\cdot,\xi)$- 调和、有界的函数，则 h 恒等于某一常数.

证 (i) 要用到下列事实：对任一极小调和函数 h, 必存在唯一 $\xi\in B_e$, 使 μ^h 集中在此点 ξ 上. 故如 1 极小调和， μ^1 集中在某点 $\xi\in B_e$ 上，亦即有 $P(x_\beta=\xi)=1$, 这里 x_β 是 1- 链的终极状态，而 P 是 p 及开始分布 γ 产生的概率. 既然 $\gamma(i)>0$, 故 $P_i(x_\beta=\xi)=1$, $i\in E$. 然而任一有界调和函数 u 可表为 $u(i)=E_if(x_\beta)$, 其中 f 是某个定义在 B_e 上的边界函数，而 E_i 是对 P_i 的期望. 因此

$$u(i)=E_if(x_\beta)=f(\xi)$$

是与 i 无关的常数.

反之，任取一不恒为 0 的有界调和函数 u, 由假定知 u 恒等于某大于 0 的常数 C, 故 C 调和，从而常数 1 也调和. 今如调和函数 $v\leqslant 1$, 仍由假设知 v 是一常数，因而与 1 成比例. 由此容易推知 1 是极小调和函数.

(ii) 由于 $\mu^{K(\cdot,\xi)}$ 集中在一点 ξ 上，仿 (i) 之证即知任一 $K(\cdot,\xi)$- 调和、有界的函数 h 是常数. □

(二) 过份函数的渐近性质

先讨论极限的存在性. 在过份函数渐近性质的研究中， F- 收敛性起着重要作用. 设 $\xi\in B_e$, 称 E 的子集 D 为 ξ 的一 F- 邻域，如对以 $\gamma^{K(\cdot,\xi)}$ 为开始分布的 (因而由引理 1, 对以 E_ξ 上任一概率分布为开始分布的)$K(\cdot,\xi)$- 链 $\{x_n(\omega)\}$, 存在正整数 $N\equiv N(\omega)$ 使对几乎一切 ω, $x_n(\omega)\in D$ 对一切 $n\geqslant N$ 成立.

称函数 $v(i)$ $(i\in E)$ 在 $\xi\in B_e$ 有 F- 极限 b(可能无穷), 并记为 $F\lim\limits_{i\to\xi}v(i)=b$, 如对 b 在广义直线 $[-\infty,\infty]$ 上的任一邻域 G, 存在 ξ 的 F- 邻域 D, 使当 $i\in D$ 时，有 $v(i)\in G$.

引理 3 存在 F- 极限 $F\lim\limits_{i\to\xi}v(i)=b$ 的充要条件是：对以 $\gamma^{K(\cdot,\xi)}$ 为开始分布的 (因而由引理 1, 对以 E_ξ 上任一概率分布为开始分布的)$K(\cdot,\xi)$- 链 $\{x_n\}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}v(x_n)=b$ (a.s.).

证 设 $F\lim\limits_{i\to\xi}v(i)=b$, 即对 b 的任一邻域 G, 存在 ξ 的 F- 邻域 D, 使 $v(i)\in G$ 对一切 $i\in D$ 成立. 固定此 D, 由定义，对以 $\gamma^{K(\cdot,\xi)}$ 为开始分布的 $K(\cdot,\xi)$- 链 $\{x_n\}$, 存在正整数 $N\equiv N(\omega)$, 使 $n\geqslant N$ 时，几乎处处有 $x_n\in D$; 从而有 $v(x_n)\in G$, (a.s.).

反之，设几乎处处有 $\lim\limits_{n\to\infty}v(x_n)=b$. 在一零测集上适当定义 b 的值后，可使 b 关于 $\{x_n\}$ 的不变 σ- 代数可测 [1]. 但由引理 2(ii) 及 Chung [1] 113 页，此 σ- 代数只含概率为 0

[1] 见 Chung, K. L. [1] §1.17.

或 1 的集，故 b 几乎处处等于常数．令 $\Omega_0=(\omega:\lim\limits_{n\to\infty}v(x_n(\omega))=b, b$ 为常数$)$, 则 $P(\Omega_0)=1$. 对 b 的任一邻域 G, 如 $\omega\in\Omega_0$, 则存在正整数 $N\equiv N(\omega)$, 使 $n\geqslant N$ 时有

$$v(x_n(\omega))\in G \tag{12}$$

取 $D=(x_n(\omega):\omega\in\Omega_0, n\geqslant N(\omega))$, 即 D 为满足括号中二条件的状态 $x_n(\omega)$ 的集； $D\subset E$. 由定义， D 是 ξ 的 F- 邻域，由 (12), 当 $i\in D$ 时，有 $v(i)\in G$. □

以下记号 $\lim\limits_{n\to\infty}v(x_n)$ 中，如 $\beta<\infty$, 我们总认为此极限存在而且等于 $v(x_\beta)$; 测度 μ 在 B_e 上的限制记为 μ_B; "μ_B—ξ" 表 "关于测度 μ_B 几乎一切的 ξ".

定理 2 设 (x_n,β) 为 1- 链，有开始分布 γ, 如果几乎处处存在极限 $\lim\limits_{n\to\beta}v(x_n)$, 则存在极限 $F\lim\limits_{i\to\xi}v(i)=b(\xi)(\mu_B-\xi)$.

证 由引理 3, 只要证明对 $\mu_B-\xi$, 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}v(y_n)$, 其中 $\{y_n\}$ 是以 $\gamma^{K(\cdot,\xi)}$ 为开始分布的 $K(\cdot,\xi)$- 链. 根据 (一) 中 (C), 适当选择基本空间 Ω 后，只要证几乎处处存在 $\lim\limits_{n\to\infty}v(x_{n\xi})$, 以 P^ξ 表马氏链 $\{x_{n\xi}\}$ 所产生的概率，则由假定

$$\begin{aligned}1&=P(\text{存在}\lim_{n\to\beta}v(x_n))=P(\beta<\infty)+P(\text{存在}\lim_{n\to\infty}v(x_n))\\&=\mu(E)+\int_{B_e}P^\xi(\text{存在}\lim_{n\to\infty}v(x_{n\xi}))\mu_B(d\xi)\end{aligned}$$

由于 $\mu(E)+\mu_B(B_e)=\mu(E\cup B_e)=1$, 故存在 $b(\xi)$ 使

$$P^\xi(\lim_{n\to\infty}v(x_{n\xi})=b(\xi))=1,\quad(\mu_B-\xi).\ \square$$

次讨论 F- 极限的数值．如何求出 $F\lim\limits_{i\to\xi}v(i)$ 的值？当 v 为有限过份函数时，问题可以解决．

引理 4 设 1 对马氏链 $\{x_n\}$ 是极小调和函数，对应点 $\xi(\in B_e)$. 若 v 是此链的有限过份函数，则

$$F\lim_{i\to\xi}v(i)=\inf_{i\in E}v(i)$$

证 根据引理 3, 只要证几乎处处

$$\lim_{n\to\infty}v(x_n)=\inf_{i\in E}v(i)$$

上式左方的极限由于 v 是有限过份函数而几乎处处存在并且有限 (见上引 Hunt 文). 为证等式成立，先设 v 有界．考虑 Riesz 分解式

$$v(i)=g(i)+h(i)$$

其中 g 是非负势而 h 是有界调和函数，由引理 2 知 $h(i)\equiv c$ (常数). 不难证明 [1] 几乎处处 $\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=0$. 既然 $g(i)\geqslant 0$, 可见

$$\lim_{n\to\infty}v(x_n)=c=\inf_{i\in E}v(i)\quad\text{(a.s.)}$$

[1] 证明可仿 Дынкин, Е. Б. [1] 定理 12.8.

对一般的 v, 令 $a(\omega)=\lim\limits_{n\to\infty}v(x_n(\omega))$. 如上述，可取 $a(\omega)$ 有限. 定义函数

$$v_m(i)=\min(m,v(i))$$

则 v_m 有界过份，故

$$\lim_{n\to\infty}v_m(x_n(\omega))=\inf_{i\in E}v_m(i)$$

由于 $v_m\uparrow v$ 及 $a(\omega)$ 的有限性，对几乎一切 ω, 存在正整数 $N\equiv N(\omega)$, 当 $n\geqslant N$ 时, $v(x_n(\omega))\leqslant a(\omega)+1$. 任取正整数 $M\equiv M(\omega)\geqslant a(\omega)+1$, 则当 $m\geqslant M$ 时

$$v(x_n(\omega))=v_m(x_n(\omega))\ \ (一切n\geqslant N)$$

注意当 $m\geqslant M_1$ (M_1 为某正整数) 时，

$$\inf_{i\in E}v_m(i)=\inf_{i\in E}v(i)$$

于是几乎处处有

$$\lim_{n\to\infty}v(x_n(\omega))=\lim_{n\to\infty}v_{M+M_1}(x_n(\omega))=\inf_{i\in E}v(i)\ \square$$

定理 3 设 u 是有限过份函数，则对 $\mu_B-\xi$, 有

(i) $$F\lim_{i\to\xi}\frac{u(i)}{h(i)}=\inf_{i\in H}\frac{u(i)}{h(i)}\tag{13}$$

其中 $\xi\in B_e$ 而 h 为对应于 ξ 的不恒为 0 的极小调和函数，又 $H=(i:\ h(i)>0)$;

(ii) 如 h 有界，则

$$F\lim_{i\to\xi}u(i)=\sup_{i\in H}h(i)\cdot\inf_{i\in H}\frac{u(i)}{h(i)}\tag{14}$$

(iii) 设 v 也是有限过份函数， h 有界，而且 $F\lim\limits_{i\to\xi}v(i)>0$, 则

$$F\lim_{i\to\xi}\frac{u(i)}{v(i)}=\inf_{i\in H}\left(\frac{u(i)}{h(i)}\right)\Big/\inf_{i\in H}\left(\frac{v(i)}{h(i)}\right)\tag{15}$$

证 因 h 对 P 极小调和，故 1 对 P^h 极小调和，由于 h- 链的终极分布集中在 h 所对应的点 ξ 上，因而作为 h- 链的极小调和函数， 1 也对应于点 ξ. 既然 u/h 为 h- 过份，在 H 中有限，由引理 4 得 (13).

在 (13) 中令 $u\equiv 1$, 得

$$F\lim_{i\to\xi}h(i)=\sup_{i\in H}h(i)>0\tag{16}$$

如 h 有界，此极限是有限的，代入 (13) 得

$$\begin{aligned}F\lim_{i\to\xi}u(i)&=F\lim_{i\to\xi}h(i)\cdot F\lim_{i\to\xi}\frac{u(i)}{h(i)}\\&=\sup_{i\in H}h(i)\cdot\inf_{i\in H}\frac{u(i)}{h(i)}\end{aligned}$$

此即 (14). 应用 (14) 于 v, 将所得式除 (14), 由假定 $F\lim\limits_{i\to\xi}v(i)>0$ 得 (15). $\square$

注 1 对已给边界点 $\xi \in B_e$, 定理 3 中 h 的一种取法为 $K(\cdot,\xi)$, 根据等式 [见 Hunt [1](2.19) 式]

$$P_i(x_\beta = \xi) = K(i,\xi)\mu\{\xi\} \tag{17}$$

可见, 如 $\mu\{\xi\} > 0$, 则 $K(\cdot,\xi)$ 必有界. 由于对应于 ξ 的任一极小调和函数 h 必与 $K(\cdot,\xi)$ 成比例, 故如 $K(\cdot,\xi)$ 有界, 则 h 也有界.

再考虑原子核情形.

迄今对有限过份函数的 F- 收敛收已研究清楚, 然而何时 F- 收敛化为通常的收敛? 试给出一简单的充分条件, 它概括了常见的实用情况, 为此要引进原子核的概念.

设 $\{x_n\}$ 是以 γ 为开始分布的、不中断的马氏链. 考虑状态空间 E 关于此链的 Blackwell 分解:

$$E = E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup \cdots \tag{18}$$

诸 E_i 互不相交, E_0 为完全非原子几乎闭集, 而 $E_j\,(j>0)$ 为原子几乎闭集 (见 Chung [1]§1.17). 称 $\xi_j\,(\in B_e)$ 为**原子边界点**, 如 $\mu\{\xi_j\} > 0$. 可证 [1] 全体原子几乎闭集 $\{E_j, j \geqslant 1\}$ 与全体原子边界点集 $\{\xi_j\}$ 间存在一一对应. 下设 E_j 与 ξ_j 对应.

设 ε_j 为 E_j 的子集, $(j \geqslant 1)$. 称 ε_j 是一原子核, 如

$$P(\mathcal{L}(E_j)) = P(\mathcal{L}(\varepsilon_j)) \tag{19}$$

而且对 ε_j 的任一无限子集 A 有

$$P(\mathcal{L}(\varepsilon_j - A)) = 0 \tag{20}$$

这里 $\mathcal{L}(\varepsilon) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=m}^{\infty}(x_n \in \varepsilon)$.

引理 5 对任一无界点列 [1] $\{j_n\} \subset \varepsilon_j$, 当 $n \to \infty$ 时, $\{j_n\}$ F- 收敛于 ξ_j.

证 任取 ξ_j 的 F- 邻域 C, 则对 $K(\cdot,\xi_j)$- 链 $\{y_n\}$, 存在正整数 $N \equiv N(\omega)$ 及 ω- 集 Ω_0, $P(\Omega_0) = 1$, 使对任一 $\omega \in \Omega_0$, 对一切 $n \geqslant N$ 有 $y_n(\omega) \in C$. 令

$$Y = (y_n(\omega):\ \omega \in \Omega_0,\ n \geqslant N(\omega)) \subset C$$

有必要时可放大 $N(\omega)$ 后, 可设 $Y \subset E_j$; 再由 (19) 可设 $Y \subset \varepsilon_j$. 由此即可推知一切 (除有穷多个外)$j_n \in Y$; 否则存在 $\{j_n\}$ 的一无限子集 A, 使

$$P(\mathcal{L}(\varepsilon_j - A)) \geqslant P(\mathcal{L}(Y - A)) = P(\mathcal{L}(Y)) = \mu\{\xi_j\} > 0$$

这与 (20) 矛盾, 于是存在正整数 M, 对 $n \geqslant M$ 有

$$j_n \in Y \subset C \ \square$$

定理 4 设 $\{x_n\}$ 是以 γ 为开始分布的马氏链, u 为此链的有限过份函数, 如果 ε_j 是一原子核, $\{j_n\}$ 为 ε_j 的任意一个无界的子列, 则存在有限极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u(j_n)$, 而且

$$\lim_{n\to\infty} u(j_n) = \sup_{i\in H} h(i) \cdot \inf_{i\in H} \frac{u(i)}{h(i)} \tag{21}$$

[1] 见 Chung: Acta Mathematica, 110:1–2(1963), 19–77.

[1] 称点列 $\{j_n\}$ 为无界的, 如对 E 中任意有限子集 D, 存在正整数 N, 当 $n \geqslant N$ 时, $j_n \overline{\in} D$.

这里 h 是对应于 ξ_j 的极小调和函数， $H=(i:\ h(i)>0)$.

证 因 ξ_j 对应于原子几乎闭集 E_j, 故 $\mu\{\xi_j\}>0$. 由注 1 知 h 有界. 由 (14) 得知 (21) 右方值等于 $F\lim\limits_{i\to\xi_j}u(i)$. 然而由引理 5

$$\lim_{n\to\infty}u(j_n)=F\lim_{i\to\xi_j}u(i)$$

此得证 (21). □

最后叙述过份测度的极限定理. 利用对偶性，不难得到过份测度的相应的结果. 设对转移矩阵 P 存在严格为正的过份测度 $\alpha(i)>0\,(i\in E)$. (当 P 满足不可分条件时，即 E 中任二状态互通时，如此的 α 必存在，见 §1 定理 4.) 令

$$q_{ji}=p(i,j)\alpha(i)/\alpha(j) \tag{22}$$

设 β 是对 P 的有限过份测度，定义

$$\beta^*(i)=\beta(i)/\alpha(i)$$

则 β^* 是对 $Q=(q_{ji})$ 的有限过份函数. 以 ξ^* 表 Q- 链的极小边界点， F^* 表它的 F- 收敛，由 (13) 得

$$F^*\lim_{i\to\xi^*}\frac{\beta(i)}{\alpha(i)h^*(i)}=\inf_{i\in H^*}\frac{\beta(i)}{\alpha(i)h^*(i)}$$

其中 h^* 为 Q- 链的极小调和函数，对应于 ξ^*, 而 $H^*=(i:\ h^*(i)>0)$.

(三) 对具连续参数马氏链的应用

考虑连续时间参数情形. 设 $X=\{x(t,\omega),0\leqslant t<\tau(\omega)\}$ 为可列齐次马氏链，其转移概率矩阵 $(p_{ij}(t))$ 满足条件

$$\lim_{t\to0}p_{ii}(t)=1\quad(i\in E) \tag{23}$$

设此过程的样本函数右连续，以 $Q=(q_{ij})$ 表密度矩阵，其中

$$q_{ij}=\lim_{t\to0}\frac{p_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t}$$

以下设

$$0<q_i\equiv-q_{ii}=\sum_{j\neq i}q_{ij}<\infty\quad(i\in E) \tag{24}$$

以 $\tau_n(\omega)$ 表样本函数的第 n 个跳跃点，即

$$\begin{aligned}&\tau_0(\omega)\equiv0\\&\tau_n(\omega)=\inf(t:\ t>\tau_{n-1}(\omega))\\&x(t,\omega)\neq x(\tau_{n-1}(\omega),\omega))\end{aligned}$$

我们假定中断时刻 $\tau(\omega)$ 为第一个飞跃点，即

$$\tau(\omega)=\lim_{n\to\infty}\tau_n(\omega) \tag{25}$$

因而 $X \equiv \{x(t,\omega),\ 0 \leqslant t < \tau(\omega)\}$ 是最小链. 考虑嵌入马氏链

$$y_n(\omega) = x(\tau_n(\omega), \omega) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{26}$$

以下总设 $\{y_n(\omega)\}$ 的转移矩阵满足条件 (3), 于是可以定义 $\{y_n\}$ 的马亭边界, 以下记号 $F\lim\limits_{i\to\xi}$ 系指对此边界而言.

设非负函数 $u(i)$ $(i \in E)$ 为关于 X 的过份函数, 简称为 X- 过份. 因而对任意 $t \geqslant 0$, 有

$$\sum_{j\in E} p_{ij}(t)u(j) \leqslant u(i) \quad (i \in E) \tag{27}$$

在 Watanabe [1] 中证明了: 函数 $u(i)$ 是 X- 过份的充要条件是它关于嵌入链 $\{y_n\}$ 过份. 这样一来, 对有限 X- 过份函数完全可以运用第 (二) 段中结果.

设已给函数 $f(i) \geqslant 0$, $i \in E$, 满足

$$u(i) \equiv E_i \int_0^\tau f(x(t,\omega))\,dt < \infty \quad (i \in E) \tag{28}$$

容易验证由此式定义的函数 u 对 X- 过份、有限.

设嵌入链 $\{y_n\}$ 的开始分布为 γ, ε 是此链的一原子核, 对应于边界点 ξ, 于是必有 $\mu\{\xi\} > 0$. 由 (17) 知函数

$$\mu_i\{\xi\} \equiv P_i\ (y_\beta = \xi)$$

是 $\{y_n\}$ 的对应于 ξ 的一极小调和函数. 任取一无界子列 $\{j_n\} \subset \varepsilon$, 由 (21) 得

$$\lim_{n\to\infty} E_{j_n} \int_0^\tau f(x(t,\omega))\,dt = \sup_{i\in H} \mu_i\{\xi\} \cdot \inf_{i\in H} \frac{E_i \int_0^\tau f(x(t,\omega))\,dt}{\mu_i\{\xi\}} \tag{29}$$

其中 $H = (i:\ \mu_i(\xi) > 0)$.

特别, 先在 (29) 中取 $f(i) = \delta_{li}$, 再取 $f(i) = \delta_{mi}$, $(l \in E, m \in E)$. 将所得二式相除, 如果

$$M_m = \inf_{i\in H} \frac{\int_0^\infty p_{im}(t)\,dt}{\mu_i\{\xi\}} > 0 \tag{30}$$

即得最小链的转移概率的积分比的公式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^\infty p_{j_n l}(t)\,dt}{\int_0^\infty p_{j_n m}(t)\,dt} = \frac{M_l}{M_m} \tag{31}$$

今考虑双边生灭过程 X 的特殊情形, 这时 F- 收敛化为通常的收敛.

称可列马氏链 X 为双边生灭过程, 如果它的密度矩阵 $Q = (q_{ij})$ 满足条件

$$q_{ij} = 0, \quad \text{如}|i-j| > 1$$

$q_{i\,i-1} = a_i > 0$, $q_{i\,i+1} = b_i > 0$, $q_i = -q_{ii} = a_i + b_i$, $i, j \in E = (\cdots, -1, 0, 1, \cdots)$, E 为全体整数集. 引入特征数

$$x_i = -b_0\Big(1 + \frac{b_{-1}}{a_{-1}} + \cdots + \frac{b_{-1}b_{-2}\cdots b_{i+1}}{a_{-1}a_{-2}\cdots a_{i+1}}\Big), \quad \text{如}i < -1$$

$$x_{-1} = -b_0, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = a_0$$

$$x_i = a_0\Big(1 + \frac{a_1}{b_1} + \cdots + \frac{a_1a_2\cdots a_{i-1}}{b_1b_2\cdots b_{i-1}}\Big), \quad \text{如}i > 1$$

$$Z_1 = \lim_{i \to -\infty} x_i, \qquad Z_2 = \lim_{i \to \infty} x_i$$

杨超群 [1] 中证明了：对嵌入链 $\{y_n\}$, 以 C_{in} 表自 i 出发经有穷多次跳跃到达 n 的概率，则

$$C_{in} = \begin{cases} \dfrac{Z_2 - x_i}{Z_2 - x_n} & \text{如} n < i \\ \dfrac{x_i - Z_1}{x_n - Z_1} & \text{如} n > i \end{cases} \tag{32}$$

(理解 $\frac{\infty}{\infty} = 1$); (3) 对 $\{y_n\}$ 不满足的充要条件是 $Z_1 = -\infty$, $Z_2 = \infty$, 故只要考虑至少有一 Z_i 有穷的情形 [1].

a. 设 $Z_1 = -\infty$, $Z_2 < \infty$, 这时只有一个原子几乎闭集 E, $\varepsilon = (n, n+1, \cdots)$ 是原子核

$$K(i,j) = \frac{G(i,j)}{\sum\limits_{v \in E} \gamma(v) G(v,j)} = \frac{C_{ij} G(j,j)}{\sum\limits_{v \in E} \gamma(v) C_{vj} G(j,j)} = \frac{C_{ij}}{\sum\limits_{v \in E} \gamma(v) C_{vj}} \tag{33}$$

当 $j > i$ 时，由 (32) 知 $C_{ij} = 1$, 故

$$K(i,j) = 1 \Bigg/ \left[\sum_{v<j} \gamma(v) + \sum_{v \geqslant j} \gamma(v) C_{vj} \right] \tag{34}$$

以 ∞ 表 ε 所对应的最小边界点，由于 $\sum\limits_{v \in E} \gamma(v) = 1$, 故

$$K(i, \infty) = \lim_{j \to \infty} K(i,j) = 1 \tag{35}$$

由引理 2(i) 之证可见 $\mu\{\infty\} \equiv P(y_\beta = \infty) = 1$

除 ∞ 外还有一边界点 $-\infty$, 类似计算得

$$K(i, -\infty) = (Z_2 - x_i) \Bigg/ \sum_{v \in E} \gamma(v)(Z_2 - x_v)$$

但因 $\mu\{-\infty\} = 0$, 故此边界点无关紧要.

设 u 为最小过程的有限过份函数，由 (21) 得

$$\lim_{i \to \infty} u(i) = \inf_{i \in E} u(i)$$

b. 设 Z_1, Z_2 都有穷，此时有二原子几乎闭集，各有原子核为 $\varepsilon_1 = (\cdots, -n-1, -n)$, $\varepsilon_2 = (n, n+1, \cdots)$, 它们分别对应的最小边界点记为 $-\infty, \infty$. 仿上算得

$$K(i, -\infty) = \frac{Z_2 - x_i}{\sum\limits_{v \in E} \gamma(v)(Z_2 - x_v)}, \quad K(i, \infty) = \frac{x_1 - Z_1}{\sum\limits_{v \in E} \gamma(v)(x_v - Z_1)}$$

对最小链 X 的任一有限过份函数 u, 有

$$\lim_{i \to -\infty} u(i) = (Z_2 - Z_1) \cdot \inf_{i \in E} \frac{u(i)}{Z_2 - x_i}$$

$$\lim_{i \to \infty} u(i) = (Z_2 - Z_1) \cdot \inf_{i \in E} \frac{u(i)}{x_i - Z_1}$$

[1] 如 $Z_1 = -\infty$, $Z_2 = \infty$, 则 $\{y_n\}$ 常返，故 $\{y_n\}$ 的 (或最小链 X 的) 每一过份函数 u 为一常数，注意 u 或处处有限，或恒等于 ∞, 此因 $p_{ij}(t) > 0$ $(t > 0, i, j \in E)$.

附录2 超过程的若干新进展

§1 引 言

超过程 (superprocess) 是近几年来国际上概率论研究中最新课题之一. 众所周知, 分支过程是一类重要的取离散值的随机过程, 它是群体发展的数学模型. 如改变时间尺度并令质点的质量以适当方式趋于 0, 则 W. Feller 指出 Galton–Watson 分支过程趋于一类扩散过程 [1]. M. Jiřina 称后者为连续态的分支过程 [2]; J. Lamperti 等研究了它的性质 [3,4]. 1968 年, S. Watanabe 发表了有份量的论文 [5], 接着又考虑了有迁入的情况 [6]. 后来沉寂了一段时间, 直到八十年代后期, 出现了研究的高潮, 参加这项工作的有美国、加拿大、法国、日本等的一些概率论专家, 如 E. B. Dynkin 、 D. A. Dawson 等, 前者把一类最重要的测度值过程称为超过程. 我国对超过程的研究虽刚开始, 但也取得了一些结果 [7,8,9].

简单说来, 超过程是一种取测度为值的具有分支性的马尔科夫过程 (简称后者为马程). 既然它是马程, 关于马程的一般方法和结论对它当然适用, 因之转移概率、无穷小算子、强马氏性、轨道性质、鞅问题、可加泛函等等对它都有意义. 另方面, 由于它取测度值, 它还有一般马程所没有的特殊性质, 如随机测度的支集等等. 再者, 分支性使它的 Laplace 泛函受到限制, 从而引导到深远的结果.

研究者由于各自的基础不同, 方法亦异. 法国学者多用随机分析, 而 E. B. Dynkin 及加拿大人则偏重于将概率方法与偏微分方程相结合, 以收到左右逢源双方获益之效.

本文的目的在于论述超过程的一些基本概念及其新进展, 其中包含国内学者的若干工作.

§2 超过程的定义

考虑 $d(\geqslant 1)$ 维欧氏空间 R^d 及其子集 Borel σ- 代数 $\mathcal{B}^d$. 可测空间 $(R^d, \mathcal{B}^d)$ 虽很特殊但却可容纳所有的结果. 本文中许多结论可推广到一般的空间. 以后不需要强调维数 d 的作用时, 简记 $R^d, \mathcal{B}^d$ 分别为 $R, \mathcal{B}$.

以 M 表 $\mathcal{B}$ 上所有有限测度的集, 在 M 中引进子集 σ- 代数 $\mathcal{B}^m$, 它是含 M 中一切下形集

$$(\mu:\ \mu \in M,\ \mu(B) \leqslant a),\quad B \in \mathcal{B},\ a \geqslant 0$$

的最小 σ- 代数. 在 M 中引进弱拓扑 (弱收敛).

取值于 $(M, \mathcal{B}^m)$ 中的马程 $X = \{x_t, t \geqslant 0\}$ 称为 MB 过程 (Measure-Valued Branching Process), 如它具有分支性: $\forall\, \mu, \nu \in M,\ t \geqslant 0$

$$p(\mu, t, \cdot) * p(\nu, t, \cdot) = p(\mu + \nu, t, \cdot), \tag{1}$$

其中 $p(\mu, t, A)$ $(\mu \in M, t \geqslant 0, A \in \mathcal{B}^m)$ 为 X 的转移概率, $*$ 表测度的卷积运算.

以 $b(\mathcal{B})$ 表定义在 R 上的有界 $\mathcal{B}$ 可测函数集，记 $<\mu,f>=\int_R f(x)\mu(dx)$. (1) 等价于 $\forall\,\mu,\nu\in M,\,t\geqslant 0,\,f\in b(\mathcal{B})$,

$$E_\mu\exp(-<x_t,f>)\cdot E_\nu\exp(-<x_t,f>)=E_{\mu+\nu}\exp(-<x_t,f>),\tag{1'}$$

E_μ 表关于 P_μ 之期望， P_μ 为 $x_0\equiv\mu$ 时 X 之分布.

$p(\mu,t,\cdot)$ 与其 Laplace 泛函

$$E_\mu\exp(-<x_t,f>)=\int_M e^{-<\nu,f>}p(\mu,t,d\nu),\quad 0\leqslant f\in b(\mathcal{B})$$

相互唯一决定.

一类重要的 MB 过程是超过程，它由下列二元给定：

1) 已给取值于 $(P,\mathcal{B})$ 中的马程 $\xi=\{\xi_t,t\geqslant 0\}$, 其转移概率为 $q(x,t,dy)$, 转移算子半群为 $\{T_t,t\geqslant 0\}$, 无穷小算子为 A. 本文设 ξ 为不中断的 Hunt 过程.

2) 已给实值函数 $B(x,\lambda)$, $x\in R$, $\lambda>0$,

$$B(x,\lambda)=a(x)-b(x)\lambda-c(x)\lambda^2-\int_0^\infty(e^{-\lambda u}-1+\lambda u)n(x,du),\tag{2}$$

其中 $a\geqslant 0,c\geqslant 0$ 及 b 皆为有界连续函数，在无穷远收敛，积分核 $n(x,du)$ 满足

$$\int_0^\infty(u\wedge u^2)n(x,du)\in b(\mathcal{B}),$$

称 $B(x,\lambda)$ 为分支函数.

称取值于 $(M,\mathcal{B}^m)$ 中的马程 $X=\{x_t,t\geqslant 0\}$ 为 (ξ,B) 超过程，如 $\forall\,\mu\in M,0\leqslant f\in b(\mathcal{B})$, 有

$$E_\mu\exp(-<x_t,f>)=\exp(-<\mu,V_t>),\tag{3}$$

其中 $V_t\equiv V_t(x)$ 是下列积分方程的唯一解：

$$V_t(x)=\int_0^t[T_sB(\cdot,V_{t-s}(\cdot))](x)ds+T_tf(x),\tag{4}$$

由 (3) 易见 X 具有分支性. (4) 可改写为

$$V_t(x)=\int_0^t\int_R q(x,s,dy)B(y,V_{t-s}(y))ds+T_tf(x),\tag{4'}$$

积分方程 (4) 形式上等价于偏微分方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial V_t(x)}{\partial t}=AV_t(x)+B(x,V_t(x))\\&V_0(x)=f(x)\end{aligned}\right\}.\tag{5}$$

如 ξ 为某某过程，也称 X 为超某某过程，例如，超布朗运动，超扩散过程等.

一种重要的特殊分支函数是

$$B(x,\lambda)=-\lambda^2,\tag{6}$$

这时 (4) 特殊化为

$$V_t(x) + \int_0^t T_s V_{t-s}^2(x)\,ds = T_t f(x).$$

本文以后所说的超布朗运动、超对称稳定过程，都是对 (6) 中分支函数而言.

§3　直观意义

设想粒子群在 $t=0$ 时按强度为 $\mu \in M$ 的 Poisson 点过程而分布，即

$$P(\pi_\mu(B)=n) = \frac{[\mu(B)]^n}{n!}e^{-\mu(B)},\quad n=0,1,2,\cdots$$

其中 $\pi_\mu(B)$ 表 $t=0$ 时位于 $B \in \mathcal{B}$ 中的粒子数. 设每一粒子沿 ξ 的轨道而运动，其寿命是随机的，有参数为 γ 的指数分布. 一粒子死亡后立即在死亡地点 x 产生 n 个同样后代粒子的概率设为 $p_n(x)$, $n=0,1,2,\cdots$. 每一新粒子又沿 ξ 的轨道同样地相互独立运动，如此继续. 设每一粒子有质量 β. 以 $\pi_\mu(t,B)$ 表 t 时位于 B 中的粒子数，则

$$x_t^\beta(B) = \beta\pi_\mu(t,B)$$

为 t 时位于 B 中诸粒子的质量和. 令

$$\varphi(x,\lambda) = \sum_{n=0}^\infty p_n(x)\lambda^n.$$

今取

$$\gamma_\beta = 1/\beta,\qquad \mu_\beta = \mu/\beta,$$

令 $\beta \to 0$, 从而平均寿命 $1/\gamma_\beta \to 0$, 强度 $\mu_\beta \to \infty$; 再设

$$[\varphi_\beta(x,1-\beta\lambda) - (1-\beta\lambda)]/\beta^2 \to B(x,\lambda) \tag{7}$$

在 $R\times[0,c]$ 中一致， $c>0$ 任意. 在这些条件下，如果

$$\sum_{n=0}^\infty np_n(x) \leqslant 1, \tag{8}$$

则可以证明：测度值过程 $(x_t^\beta, P_{\pi_{\mu/\beta}})$ 弱收敛于 (x_t, P_μ). 见 [10,11].

关于 [7] 中极限函数 $B(x,\lambda)$ 的一般形式， Dynkin 猜想：在条件 (8) 下， $B(x,\lambda)$ 具有形式 (2), 但其中 $a(x)\equiv 0$. 此猜想已被李增沪在 [8] 中证实.

无特别声明时，本文恒设 $a(x)\equiv 0$. 如 ξ 为 Feller 过程，此条件等价于超过程 X 不爆发，即其寿命为 ∞. 再者，当且仅当 $n(x,du)\equiv 0$ 时， X 有连续轨道 [14].

§4 超过程的存在与性质

方程 (4) 是否有唯一解？这是首先要解决的问题. 为此，考虑更一般的方程. 已给二非负函数 $f,g\in b(\mathcal{B})$, ξ 为 Hunt 过程，则方程

$$W_t(x)=\int_0^t[T_sB(\cdot,W_{t-s}(\cdot))](x)\,ds+\int_0^t T_sg(x)ds+T_tf(x) \tag{9}$$

$(t\geqslant 0,x\in R)$ 有唯一解 $W_t(x)\,(\equiv W_t(f,g)(x))$, 它有下列性质：

a) $W_t(x)$ 对 $t,x)$ 联合可测，而且

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|W_s\|_\infty<\infty,\quad 一切t>0.$$

b) 如 $\forall x$, $T_tf(x)$ 对 $t\geqslant 0$ 右连续, 则 $W_t(x)$ 对 $t\geqslant 0$ 也右连续. 如 g 固定, 则 $f\to W_t(f,g)$, $t\geqslant 0$ 是作用在 $b^+(\mathcal{B})$ 上之非线性算子半群 ($b^+(\mathcal{B})$ 为 $b(\mathcal{B})$ 中全体非负函数之集).

c) $\forall t\geqslant 0$ 及 $\mu\in M$, 在 $(M,\mathcal{B}^m)^2$ 上存在唯一质量不超过 1 的测度， $\Pi_t(\mu;d\nu,d\gamma)$, 使

$$\int\Pi_t(\mu;d\nu,d\gamma)e^{-<\nu,f>-<\gamma,g>}=e^{-<\mu,W_t(f,g)>}. \tag{10}$$

当 $g\equiv 0$ 时 (9) 化为 (4), 故知 (4) 有唯一解 $V_t=W_t(f,0)$, 而且

$$e^{-<\mu,V_t>}=e^{-<\mu,W_t(f,0)>}=\int p(\mu,t,d\nu)e^{-<\nu,f>},$$

其中 $p(\mu,t,d\nu)=\int_R\Pi_t(\mu;d\nu,d\gamma)$. 由 b) 知 $\{V_t,t\geqslant 0\}$ 有半群性，从而 $p(\mu,t,d\nu\}$ 确是马氏核. 由马程的一般理论，知存在取测度值的马程 X, 其转移概率为 $p(\mu,t,d\nu)$. 详见 [12].

当 $a(x)\equiv 0$ 时，若 ξ 为 Hunt 过程，则 X 也是 Hunt 过程 [12].

在 (6) 下，若 ξ 的转移概率具有 Dynkin 意义下的规则性，则 X 的转移概率也如此. 稍加条件后反之亦然 [13].

在鞅问题意义下， X 的无穷小算子 L 为 [12]

$$\begin{aligned}LF(\mu)=&\int_R\mu(dx)c(x)F''(\mu,x)+\int_R\mu(dx)[AF'(\mu;\cdot)(x)-b(x)F'(\mu;x)]\\&+\int_R\mu(dx)\int_0^\infty n(x,du)[F(\mu+u\varepsilon_x)-F(\mu)-uF'(\mu;x)],\end{aligned} \tag{11}$$

其中 A 为 Hunt 过程 ξ 的无穷小算子,

$$F'(\mu;x)=\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{F(\mu+\delta\varepsilon_x)-F(\mu)}{\delta},$$

ε_x 为集中在单点集 $\{x\}$ 上之概率.

L 的定义域 $D(L)$ 含定义在 M 上之下形函数

$$F(\mu)=\psi(<\mu,f_1>,\cdots,<\mu,f_n>), \tag{12}$$

其中 $\psi \in C_0^\infty(R)$ (R 上无穷次可微且在无穷远趋 0 的函数集), $f_i \in D(A)$, $n = 1, 2, \cdots$.

所谓鞅问题是指：对固定 $\mu \in M$,

(i) $\forall F \in D(L)$,

$$M_t^F \triangleq F(x_t) - F(x_0) - \int_0^t LF(x_s)\,ds, \quad t \geqslant 0 \tag{13}$$

是局部有界 P_μ 鞅，而且 P_μ-a.s. 右连续有左极限.

(ii) 反之，设 P 为右连左极函数可测空间上之概率， $P(x_0 = \mu) = 1$, 使 M^F 右边左极 P-a.s., 而且是 P 局部鞅，一切 $F \in D(L)$; 则 $P = P_\mu$.

二次变差

$$< M^F, M^G >_t = \int_0^t \Gamma(F, G)(x_s)\,ds,$$
$$\Gamma(F, G) = L(FG) - FL(G) - GL(F).$$

§5 矩 问 题

设 $0 \leqslant f \in b(\mathcal{B})$, 试求 $< x_t, f >$ 的各级矩

$$m_n \triangleq E_\mu[< x_t, f >^n] = \int_R < \nu, f >^n p(\mu, t, d\nu), \quad \mu \in M. \tag{14}$$

当 (2) 中 $a(x) \equiv 0$ 时，已知 [12]

$$m_1 =< \mu, T_t^b f >,$$
$$m_2 =< \mu, T_t^b f >^2 + \int_0^t \mu T_s(\widehat{c} \cdot (T_{t-s}^b f)^2) ds, \tag{15}$$

其中 $\widehat{c} = 2c + \int_0^\infty u^2 n(\cdot, du)$,

$$T_t^b f(x) = Ex\Big[e^{-\int_0^t b(\xi_s)ds} f(\xi_t)\Big].$$

如分支函数为 (6), 甚至对非时齐马程 ξ, 也可完全解决矩问题. 以 $q(r, x; u, dy)$ 表 ξ 的转移概率. 固定 $r < u$, 令

$$T_u^r f(x) = \int_R q(r, x; u, dy) f(y), \quad 0 \leqslant f \in b(\mathcal{B}),$$

对二非负函数， $\varphi_u^s(x), \psi_u^s(x) \in b(\mathcal{B})$, 定义其卷积

$$(\varphi * \psi)_u^r = \int_r^u T_s^r(\varphi_u^s \psi_u^s)\,ds.$$

记 $\varphi'^* = T_u^r f$, $\varphi^{n*} = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi^{k*} * \varphi^{(n-k)*}$, $\Phi_n =< \mu, \varphi^{n*} >$. 则各级矩 $m_n = E_{r,\mu}[< x_u, f >^n]$ 皆存在，而且可递推求出：

$$m_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{n-1} \cdot (n-k)! \Phi_{n-k} \cdot m_k \quad (m_0 = 1,\ C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ C_0^{n-1} = 1), \tag{16}$$

诸矩唯一决定 $< x_u, f >$ 关于 $P_{r,\mu}$ 之分布，且当 $|\lambda| < 1/4(u-r)\sup\limits_x |T_u^r f(x)|$ 时，有幂级数展开

$$E_{r,\mu}\exp(-\lambda < x_u, f >) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n \lambda^n, \tag{17}$$

其中 $b_0 = 1$, $nb_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k\Phi_k b_{n-k}$. 见 [10].

§6 超过程的变换

相对于同一 ξ, 设有二超过程，其概率分布绝对连续，试看其分支函数如何变化.

考虑 (2) 中的 $B(x,\lambda)$, 这里不假定 $a(x)$ 恒为 0, 因而 (ξ, B) 超过程 X 可能爆发. 设 X 的生命为 ζ. 对非负连续函数 $\widetilde{a}(x)$, $x \in R$, 定义

$$c_t = \int_0^t < x_s, \widetilde{a} > ds,$$

再对非负连续函数 $g \in D(A)$, 在 $\mathcal{F}_t = \sigma\{x_s, s \leqslant t\}\cap(t < \zeta)$ 上定义测度 Q_μ, 使

$$\frac{dQ_\mu}{dP_\mu} = H_t(g)e^{-c_t}, \tag{18}$$

其中 P_μ 为 (ξ, B) 超过程的分布，又

$$H_t(g) = I_{(t<\zeta)}\exp\left(-\left[< x_t, g > - \int_0^t < x_s, Ag + B(x, g(x)) > ds\right]\right),$$

则可证明下列类似 Girsanov 定理之结果：

Q_μ 是 $(\xi, \widetilde{B})$ 超过程 $\widetilde{X}$ 的分布,

$$\widetilde{B}(x,\lambda) = B(x, \lambda + g(x)) - B(x, g(x)) + \widetilde{a}.$$

特别，取 $\widetilde{a} = g = 0$, 则 $\widetilde{B}(x,\lambda) = B(x,\lambda) - a(x)$ (参看 §3 末).

更多的变换见 [14].

§7 超对称稳定过程的支集

设 ξ 为 $R(=R^d)$ 指数中 $a(0 < a \leqslant 2)$ 的对称稳定过程，它相应于 (6) 的超过程记为 $X^a = \{x_t^a,\ t \geqslant 0\}$. 当 $a = 2$ 时， X^2 是超布朗运动.

对 $\mathcal{B}(=\mathcal{B}^d)$ 上任一测度 ν, 以 $S(\nu)$ 表 ν 的闭支集 (closed support). 支集的大小反映了 ν 的散布程度. 为了描述集 $A \in \mathcal{B}$ 的大小，首先可考虑 A 的 d 维 Lebesgue 测度 $L_d(A)$. 如 $L_d(A) = 0$, 作为量尺，此测度已嫌太大，而且 A 的通常的拓扑维数也很可能小于 d. 于是需采用其它的维数与测度. 一种选择是 Hausdorff 维数 (H 维数), 记为 dim. 知道集 A 的 H 维数 $\dim A$ 后，如想获得更精确的信息，可考虑 A 的 Hausdorff 测度 (H 测度). 此测度由某一函数 $\phi(x)(x \in R)$ 产生，记为 $\phi - m$. 如集 A 的 H 测度 $0 < \phi - m(A) < \infty$, 则说 $\phi(x)$(关于 A) 为正确选择的.

对每固定的 t, x_t^α 是一随机测度， $S_t^\alpha \triangleq S(x_t^\alpha)$ 是一随机集. 以下结论 a.s. 成立，是指 "P^μ-a.s., 一切 $\mu \in M$." 在 [16,25] 中有下列结果.

固定 $t>0$, 存在随机集 B_t, 使对 R 中任一紧集 C, 有

$$
\begin{aligned}
&x_t^\alpha(B_t \cap C) = x_t^\alpha(C), \qquad (a.s.)\\
&\dim B_t \leqslant \alpha. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

上式可惊异处是与维数 d 无关. 这里 B_t 起到 S_t^α 的作用.

当 $d \geqslant \alpha$ 时， x_t^α 关于 L_d 奇异；

当 $d < \alpha$ 时 (其实 $d=1$), x_t^α 关于 L_d 绝对连续， $x_t^\alpha(da) = y^\alpha(t,a)da$, 而且可取密度 $y^\alpha(t,a)$ 为 (t,a) 二元连续.

考虑函数 $\phi_\alpha = x^\alpha \log\log \dfrac{1}{x} \ (0<\alpha\leqslant 2)$.

设 $d>\alpha$, 此时存在常数 c_i, 只依赖于 α, d, $0<c_1<c_2<\infty$, 使对任一 $t>0$, 任一 $A\in\mathcal{B}$, 有

$$c_1\phi_\alpha - m(A\cap B_t) \leqslant x_t(A) \leqslant c_2\phi_\alpha - m(A\cap B_t).$$

§8 超布朗运动的支集

对超布朗运动 $X \equiv X^2$, 可以得到更深刻的结果. 不妨设 $X = \{x_t, t\geqslant 0\}$ 的样本在弱拓扑下对 $t\geqslant 0$ 连续 [5,15]. 固定 $t>0$, a.s. 有

$d \geqslant 2$:

$$L_d(S_t) = 0, \qquad (20)$$

$$\dim S_t = 2 \ \text{(对照(19))}, \qquad (21)$$

$d\geqslant 3$: $\phi_2(x)$ 是 S_t 正确的 H 函数，即

$$0 < \phi_2 - m(S_t) < \infty. \qquad (22)$$

将这些结果与 d 维布朗运动 $W = \{W_t,\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$ 比较是有趣的. 令

$$\operatorname{Im} W = (W_t:\ 0\leqslant t\leqslant 1),$$

即当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时， W_t 的全体值所成之集，称为 W 的象集. 则有

$d\geqslant 2:\ \dim(\operatorname{Im} W) = 2;$ (23)

$d\geqslant 3$: $\operatorname{Im} W$ 的正确 H 函数也是 $\phi_2(x)$, 而且

$$\phi_2 - m(W_s,\ s\leqslant t) = c_d\cdot t \qquad (24)$$

c_d 是常数.

所不同者，对超布朗运动是在单点 t 上之 S_t. 另一差别是： $d=2$ 时， $\operatorname{Im} W$ 正确的 H 函数是

$$x^2\log\frac{1}{x}\log\log\log\frac{1}{x}; \qquad (25)$$

而 S_t 的正确 H 函数似还不知.

进一步，当 $d>2$ 时，任取 $0<t_1<\cdots<t_k$, 有

$$\dim \bigcap_{i=1}^{k} S_{t_i} \leqslant d-k(d-2);$$

而且 $\bigcap_{i=1}^{k} S_{t_i}$ 有有限的 $x^{d-k(d-2)}\log\log\frac{1}{x}-m$ 测度；特别，当 $k\geqslant d(d-2)^{-1}$ 时 (即 $d=3$, $k>2$ 或 $d>3$, $k>1$ 时), 此集是空集. 重复一遍，上述结论皆 P_μ-a.s., 一切 $\mu\in M$, 成立.

今设始值 μ 集中在 d 维球内，试看 x_t 如何扩散. 以 $B(x,r)$ 记 x 为球心， r 为半径之开球. 设 $S(\mu)\subset B(0,r)$, 则可证 [15]: 对 $R>r$, 有

$$P_\mu(\exists\, t\geqslant 0,\ 使x_t([\overline{B}(0,R)]^c)>0)=1-\exp\Big(-\frac{<\mu,g(\cdot/R)>}{R^2}\Big) \tag{26}$$

— 表闭包、 c 表补运算； g 为下方程之唯一正的只依赖于 $|x|$ 之解：

$$\Delta g(x)=g^2(x),\ \ x\in B(0,1);\ \ g(x)\to\infty,\ x\to\partial B(0,1), \tag{27}$$

Δ 为 Laplace 算子， ∂B 表 B 之边界. 特别，如 $\mu=\delta_0$, 则 (26) 右为 $1-\exp(-g(0)/R^2)$; 再如 $d=1$, 则 $g(0)\approx 8.38$. 由 (26)

$$P_\mu\Big(\bigcup_{t\geqslant 0} S_t\ 有界\Big)=1, \tag{28}$$

因之整个扩散范围不超出某 (随机) 球，故可定义

$$\mathcal{L}=\inf(r>0,\ \ 一切t\geqslant 0,\ x_t([\overline{B}(0,r)]^c)=0), \tag{29}$$

$$P_\mu(\mathcal{L}\leqslant r)=\exp(-<\mu,g(\cdot\,/\,r)>/\,r^2), \tag{30}$$

$E_\mu\mathcal{L}<\infty$; 特别 $E_{\delta_0}\mathcal{L}=\sqrt{g(0)\pi}$; $d=1$ 时 $E_{\delta_0}\mathcal{L}\approx 5.2$.

另一有趣之结果为：

$$\begin{aligned}&P_{\delta_0}(\exists\, t>0,\ 使x_t(B(x,\varepsilon))>0)分别等于\\&6/x^2,(d=1);\ 4/x^2,(d=2);\ 2/x^2,(d=3);\\&2/x^2\log|x|,(d=4);\ c\varepsilon^{d-4}/|x|^{d-2},(d\geqslant 5).\end{aligned} \tag{31}$$

c 为只依赖于 d 之常数.

回忆 $S_t=S(x_t)$. 今考虑取闭集为值的随机过程 $S=\{S_t,t\geqslant 0\}$, 我们想知道 S_t 对 t 是否也有某种连续性. 这样，就需在集所成之空间中引进拓扑.

设 k_1,k_2 为 R 中二非空紧集，定义

$$\begin{aligned}&\rho_1(k_1,k_2)=\min[\sup_{x\in k_1} r(x,k_2),1],\\&\rho(k_1,k_2)=\max(\rho_1(k_1,k_2),\rho_1(k_2,k_1)),\\&\rho(k_1,\phi)=1,\end{aligned} \tag{32}$$

其中 r 表 d 维欧氏距离. 以 $k(R)$ 表 R 中紧子集所成之空间, 称 ρ 为 $k(R)$ 中的 Hausdorff 距离. 可以证明 [16]: $\{S_t, t>0\}$ 是取值于 $(k(R),\rho)$ 中的右连续过程 (由于 S_0 可为 R, 故除去 $t=0$). 这意味着 S_t 的变化是缓和的.

形象地想, 倾水于地, 最初的湿影域为 S_0, $t=u$ 时湿影域为 $\overline{\bigcup\limits_{t<u} S_t}$. 考虑 $S(r,u) \triangleq \overline{\bigcup\limits_{r\leqslant t\leqslant u} S_t}$, 它对 u 不减. 研究 $S(r,u)$ $(u\geqslant r)$ 是一有趣问题, 现有结果不甚彻底, 其一较简明的结果是 [16]

$$x^4 \log\frac{1}{x} - m(S(r,\infty)) < \infty, \quad 一切 t>0. \tag{33}$$

§9 击中概率、k- 重点与极集

本节中仍考虑超布朗运动 X. 称 $R_1 = \overline{\bigcup\limits_{t>0} S_t}$ 为 X 的值域. 我们有

$$d\leqslant 3:\ L_d(R_1)>0;\quad d>3:\ L_d(R_1)=0. \tag{34}$$

R 之 H 维数见下 (38), H 函数参照 (33).

说 X 击中 A, 如 $A\cap R_1\neq\phi$. 如 $d\leqslant 3$, 有

$$P_\mu\,(X击中单点集\{x\}) = 1-\exp\left[-2(4-d)\int_R |y-x|^{-2}\mu(dy)\right]. \tag{35}$$

当且只当 $\int_R |y-x|^{-2}\mu(dy)=\infty$ 时此概率为 1. 但如 $d\geqslant 4$, X 不击中点. 称集

$$P_k = \bigcup_{I_1,\cdots,I_k}\left(\bigcap_{j=1}^{k} S(I_j),\ I_1,\cdots,I_k 为\ (0,\infty)\ 中不交紧区间\right)$$

为 X 之 k- 重点集. 当 $d\geqslant 4$ 时有

$$\dim(A\cap R_k)\leqslant \dim A - k(d-4), \tag{36}$$

其中负维数意味空集, 注意 R_k 当 $k=1$ 时与上面定义的 R_1 一致. 在 (36) 中取 $A=R^d$, 得

$$\dim R_k \leqslant d-k(d-4), \tag{37}$$

$$\dim R_1 = \dim\overline{\bigcup_{t>0} S_t}\leqslant 4\quad (与\ d\geqslant 4\ 无关) \tag{38}$$

(对照 (23)). 关于 R_k 的 H 测度, 至今只有较弱的结果:

$$d=4:\ R_k\ 有\ \sigma- 有穷的 x^4\left(\log\frac{1}{x}\right)^k - m;$$

$$d>4:\ R_k\ 有\ \sigma- 有穷的 x^{d-k(d-4)}\log\log\frac{1}{x} - m.$$

特别, 如 $k\geqslant d(d-4)^{-1}$, 则 $R_k=\emptyset$. 可见 $d=5$ 时无 5 及以上重点, $d=8$ 时无 2 及以上重点, 等等.

受 [19] 启发，猜想 R_k 之正确 H 函数可能为：

$$\phi(x) = x^4\left(\log\frac{1}{x}\log\log\log\frac{1}{x}\right)^k,\ \ d=4; \tag{39}$$

$$= x^{d-k(d-4)}\left(\log\log\frac{1}{x}\right)^k,\ \ d>4. \tag{40}$$

称集 $A\in\mathcal{B}$ 为 R_k 之极集，如 $A\cap R_k=\emptyset$; 称 A 为 R_k 之半极集，如 $A\cap R_k$ 至多可列，(a.s.). 如 $k=1$, 则简称 A 分别为极集或半极集 [16].

$d=4$: 如 $\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-k}-m(A)=0$, 则 A 为 R_k 之极集；如 A 有 σ- 有穷的 $\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-k}-m$, 则 A 为 R_k 之半极集.

$d>4$: 如 $x^{k(d-4)}-m(A)=0$, 则 A 为 R_k 之极集；如 A 有 σ- 有穷的 $x^{k(d-4)}-m$, 则 A 为 R_k 之半极集.

关于超过程的局部时可见 [15,18]. 在 [18] 中甚至定义了 R_k 上之局部时，它集中在 R_k 上； $k=1$ 时即为通常的局部时.

§10　非线性偏微分方程解的概率表示

考虑边值问题 (Dirichelet 问题):

$$-LV(x) = B(x, V(x)) + \rho(x),\ \ x\in D \tag{41}$$

$$V(x)\to f(a),\ x\to a\in\partial D,\ \ x\in D \tag{42}$$

这里 D 为 R 中有界域，边界为 ∂D; $\rho\geqslant 0$ 为有界函数； $f\geqslant 0$ 为 ∂D 上连续函数. ρ 在 $\overline{D}$ 中满足 Hölder 条件，即

$$|\rho(x)-\rho(y)|\leqslant c|x-y|^\lambda,\ \ c>0, \lambda>0 \text{ 皆常数,}$$

$B(x,\lambda)$ 见 (2), 但 $a(x)\equiv 0$. L 为 R 中一致椭圆算子，即

$$L=\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^d b_i\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{43}$$

其中 a_{ij}, b_i 皆有界，在 R 中满足 Hölder 条件，且

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)u_iu_j\geqslant k\sum_{i=1}^d u_i^2,\ k>0 \text{ 常数},\quad \text{一切}x\in R, \text{一切}u_1,\cdots,u_d.$$

在这些条件下，周知存在取值于 R 中的马程 $\xi=(\xi_t,P_x)$, 其无穷小算子为 L. 对应的 (ξ,B) 超过程 $X=\{x_t,t\geqslant 0\}$ 称为超扩散. 定义集 $D\in\mathcal{B}$ 的首出时 $\tau=\inf(t>0,\xi_t\overline{\in}D)$. 称点 $a\in\partial D$ 为规则点，如 $P_a(\tau=0)=1$. 以下设 ∂D 之点皆规则. 在 [20] 中证明了：对应于 D 之首出时 τ, 在 $(R,\mathcal{B})$ 上存在二随机测度 Y_τ, X_τ, 满足

$$P_\mu\exp\{-<y_\tau,\rho>-<X_\tau,f>\}=\exp\{-<\mu,V>\},\ \ (\mu\in M) \tag{44}$$

其中 $V \equiv V(x)$ 满足积分方程

$$V(x) = P_x \int_0^\tau B(\xi_s, V(\xi_s))ds + P_x \left[\int_0^\tau \rho(\xi_s)ds + f(\xi_\tau) \right]. \tag{45}$$

则 (41) 、 (42) 之唯一解可表示为

$$V(x) = -\log P_{\delta_x} \exp\{- < Y_\tau, \rho > - < X_\tau, f >\}. \tag{46}$$

特别，如 $B(x,\lambda) \equiv 0$,(41) 化为 $LV(x) = -\rho(x)$, $x \in D$. 我们得到熟知的

$$V(x) = P_x \left[\int_0^\tau \rho(\xi_s)ds + f(\xi_\tau) \right].$$

X_τ, Y_τ 之直观意义仍如 §3, 但应考虑粒子 α 的历史轨道 w_t^α, 它由自身及其所有前辈的轨道连接而成. 然后令 $\tau_\alpha = \inf(t: \ w_t^\alpha \overline{\in} D)$, $x_t^\beta(B) = \beta \sum\limits_\alpha I_B(w_t^\alpha)$,

$$X_\tau^\beta(B) = \beta \sum_\alpha I_B(w_{\tau_\alpha}^\alpha), \quad Y_\tau^\beta(B) = \beta \sum_\alpha \int_0^{\tau_\alpha} I_B(w_s^\alpha)\, ds,$$

在 §3 收敛下， $\beta \to 0$ 时， $x_t^\beta, X_\tau^\beta, Y_\tau^\beta$ 分别弱收敛于 x_t, X_τ, Y_τ.

取有界 Borel 可测函数 γ, 而且 $\inf\limits_x \gamma(x) > 0$. 下设

$$B(x,\lambda) = -\gamma(x)\lambda^\alpha, \quad 1 < \alpha \leqslant 2. \tag{47}$$

则可证超扩散 X 之全值域 $R_0 = \overline{\bigcup\limits_{t \geqslant 0} S_t}$ 有界， P_{δ_x}–a.s., 一切 $x \in R^d$, 而且对任开集D,

$$V(x) = -\log P_{\delta_x} \quad (R_0 \subset D) \tag{48}$$

是 $LV(x) = \gamma(x)V(x)^\alpha$, $x \in D$ 的极大正解.

§11　弱极集与可去奇点

称 $B \in \mathcal{B}$ 为 X 的弱极集，如 $B^c \neq \emptyset$, 且

$$P_{\delta_x}(R_0 \cap B \neq \emptyset) = 0, \quad 一切 x \overline{\in} B. \tag{49}$$

设 X 为对应于 (47) 之超扩散. 可以证明 [20]: 闭集 G 为弱极集的充要条件是下二条件之一:

a) 如 V 在 $D = G^c$ 中满足 (48), 则 $V = 0$;

b) (48) 在 D 中之极大解有界.

例　在 $R^d \setminus \{0\}$ 中考虑 $\frac{1}{2}\Delta V = V^\alpha$. $d < \frac{2\alpha}{\alpha - 1}$ 时， $V(x) = c/|x|^{2/(\alpha-1)}$ 是一正解， $c > 0$ 为常数. $|x| \to 0$ 时 $V(x) \to \infty$, 故单点集非弱极集. $d \geqslant \frac{2\alpha}{\alpha-1}$ 时，则可证 [21] 此方程之每一正解在 0 附近有界，故单点集为弱极集. 此结果对某些超扩散也成立.

本节下设 (48) 中 $\gamma(x)=1$. 弱极集与方程之可去奇点间有密切关系. 设 k 为紧集, 则 k 为弱极集之充要条件是: k 是方程

$$Lu = u^{\alpha} \tag{50}$$

之可去奇点集. 详言之: 设 k 为紧的弱极集, $k\subset C$ (开), 则 (50) 在 $D\setminus k$ 中每一正解可延拓到 D 上使之成为一次连续可微且满足 Hölder 条件, 因而此解在 k 附近有界; 反之, 如 (50) 在 $D\setminus k$ 中之最大解在 k 附近有界, 则 k 为弱极集.

还可用 H 维数来形容弱极集. 固定 $A\in\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
d>\frac{2\alpha}{\alpha-1}:&\ \text{若}\ \dim\ A<d-\frac{2\alpha}{\alpha-1},\ \text{则}\ A\ \text{为弱极集};\\
&\ \text{若}\ \dim A>d-\frac{2\alpha}{\alpha-1},\ \text{则}\ A\ \text{非弱极集}.\\
d<\frac{2\alpha}{\alpha-1}:&\ \text{唯一之弱极集是空集}.\\
d=\frac{2\alpha}{\alpha-1}:&\ \text{若}\ L-\dim A<\frac{1}{\alpha-1},\ A\ \text{为弱极集};\\
&\ \text{若}\ L\text{-}\dim A>\frac{1}{\alpha-1},\ A\ \text{非弱极集}.
\end{aligned}$$

这里 L-$\dim(A)$ 表 A 的 Carleson 对数维数, 它由 $\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-\beta}$, $(\beta>0)$ 产生, 正如 H 维数由 x^{β}, $(\beta>0)$ 产生一样.

§12 极限定理

本节设 X 为超布朗运动. 如始值 $x_0\equiv\mu\in M$, 则过程必灭绝. 但如 μ 为无限测度, 就会出现有趣现象, 故讨论极限定理时应允许超过程取无限测度为值. 一种选择是, 考虑如下测度空间

$$\begin{aligned}
M_p\equiv M_p(R^d)=\{\mu:\ &\mu\ \text{为}\ \mathcal{B}^d\ \text{上 Radon 测度, 而且}\\
&d\mu/(1+|x|^p)\ \text{为有限测度},\ p>d\}.
\end{aligned} \tag{51}$$

S. Watanabe 在 [5] 中证明了取值于 M 中超布朗运动存在, 其轨道在弱收敛下连续; I. Iscoe[23] 则证明了取值于 $M_p(p>d)$ 中超布朗运动存在, 其轨道在淡收敛下右连左极. 显见 d 维 Lebesgue 测度 $L_d\in M_p$. 本节设 $x_0=L_d$. $x_t(t>0)$ 对 L_d 之绝对连续性已见 §7.

今考虑 $t\to\infty$ 之情形 [31], 并简记 L_d 为 L.

$d\leqslant 2$: 对每有界开集 G, 依 P_L 测度 $\lim\limits_{t\to\infty}x_t(G)=0$.

$d>2$: x_t 弱收敛到唯一非平凡的平稳分布.

现在来研究另一测度值过程 $Y=\{y_t,\ t\geqslant 0\}$:

$$y_t(B)=\int_0^t x_s(B)\,ds,\quad B\in\mathcal{B}^d \tag{52}$$

$$<y_t,\varphi>=\int_0^t <x_s,\varphi>\,ds \tag{53}$$

关于后者的 Laplace 变换有下列结果 [23,15]:

设 φ 为 R^d 上非负连续函数，有紧支集，则

$$E_\mu \exp\left\{ -\int_0^t < x_s, \varphi > ds \right\} = \exp\{- < \mu, u(t) >\}, \quad \mu \in M_p, \tag{54}$$

其中 $u(t) = u(t,x)$ 是下方程之解:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \Delta u(s) - u^2(s) + \varphi, \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \tag{55}$$
$$u(0) = 0.$$

关于极限行为，有 [23,15]:

$$d = 1: \ P_L\Big(\lim_{t\to\infty} \frac{< y_t, \varphi >}{t} = 0 \Big) = 1; \ P_L\Big(\int_0^\infty x_t(c)\, dt < \infty \Big) = 1, \ c - \text{紧}.$$

$d = 2$: y_t/t弱收敛到 $\xi \cdot L$, $(t \to \infty)$, $\xi > 0$ 为无穷可分随机变量.

$$P_L\Big(\int_0^\infty x_s(0)\, ds = \infty \Big) = 1, \ 0\text{- 非空开}.$$

$$d \geqslant 3: \ P_L\Big(\lim_{t\to\infty} \frac{y_t}{t} = L \Big) = 1, \ \text{Vague 收敛意义下}.$$

最后讨论另一类极限定理 (类似于中心极限定理). 固定 R^d 上速降连续函数 $\phi \geqslant 0$, 使

$$A(x) \equiv \int_{R^d} \frac{\phi(y)}{|x-y|^{d-2}}\, dy < \infty.$$

定义实数值过程 $Z = \{z_t, t \geqslant 0\}$:

$$z_t = \frac{1}{\sqrt{t}} \Big(\int_0^t < x_s, \phi > ds - E_L \int_0^t < x_s, \phi > ds \Big).$$

定理 A 如 $d > 4$, 则当 $t \to \infty$ 时， z_t 依分布收敛到随机变量 Z_∞, 其 Laplace 变换为

$$E_L e^{-\theta z_\infty} = \exp\left[\theta^2 c^2 \int_{R^d} A^2(x)\, dx \right], \quad \theta > 0,$$
$$c = \Gamma\Big(\frac{d-2}{2}\Big) \Big/ 4\pi^{d/2}.$$

今如视 $\phi \in S(R)$ 为参变函数，其中

$$S(R) = \{f: \ R^d \text{ 上无穷次可微，且 } f^{(n)} \text{ 速降}, n = 1, 2, \cdots\}.$$

定理 B 如 $d > 4$, 当 $t \to \infty$ 时

$$< z_t, \phi > = \frac{1}{\sqrt{t}} \Big(\int_0^t < x_s, \phi > ds - E_L \int_0^t < x_s, \phi > ds \Big), \quad \phi \in S(R)$$

收敛于 Gauss 场 z_∞, 其相关泛函为

$$E[< z_\infty, \phi > \cdot < z_\infty, \psi >] = c \int_{R^d} \int_{R^d} \frac{\phi(x)\psi(y)}{|x-y|^{d-4}}\, dx dy, \quad c \text{ 为常数}.$$

除积分型泛函 (52) 外，超过程的一般泛函之研究见 [28].

结 束 语

、 超布朗运动是最好的老师，由于它很特殊，人们得到的结果最多最深入；而且它还提供思想和方法，以便研究那些结果可推广到一般超过程.

超过程与位势论间之关系，部分结果已述于 §9, §10, 这方面的研究还才开始 [20,22].

更一般的模型，如有迁入情形 (即不仅原有的粒子作随机繁殖，而且有新的粒子随机迁入) 、多种粒子情形，都很值得研究 [29,30].

由本文 (3) 、 (4) 所确定的测度值马程通常称为 Dawson–Watanabe 型的. 另外还有二类测度值过程为 Orstein–Uhlenbeck 型及 Fleming–Viot 型，本文并未涉及，见 [32].

参 考 文 献

[1] Feller, W., *Diffusion processes in genetics*, Proc, 2nd Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probability, (1951), 227–246.

[2] Jiřina, M., *Stochastic branching processes with continuous state space*, Czech. Jour. Math., 8(1958), 292–313.

[3] Lamperti, J., *The limit of a sequence of branching processes*, Z. Wahrsch., 7(1967), 271–288.

[4] Lamperti, J., Ney, P., Conditioned branching processes and their limiting diffusions, Теория вероят и её примен., XIII, 1(1968), 126–137.

[5] Watanabe, S., *A limit theorem of branching processes and continuous state branching processes*, J. Math. Kyoto Univ., 8:1(1968), 141–167.

[6] Kawazu, K., Watanabe, S., Branching processes with immigration and related limit theorems, Теория вероят. и её примен., XVI(1971), 34–51.

[7] 李占炳， Dynkin, E. B. 问题的推广，北京师范大学学报 (自然科学版), 4(1989), 11–12.

[8] 李增沪， *On the branching mechanism of superprocesses*, 数学进展， 19:1(1990), 117–118.

[9] 王梓坤，超过程的幂级数展开，数学物理学报， 10:4(1990), 361–364.

[10] Dynkin, E. B., *Branching particle systems and superprocesses*, (1989), to appear.

[11] Dynkin, E. B., *Path processes and historical superprocesses*, (1990), Preprint.

[12] Fitzsimmons, P. J., *Construction and regularity of measure-valued Markov branching processes*, Israel J. Math., 64(1988),337–361.

[13] Dynkin, E. B., *Regular transition functions and regular superprocesses*, Transactions of the Amer. Math. Soc., 316:2(1989), 623–635.

[14] Karoui, N. El, Roelly-coppoletta, S., *Study of a general class of measure-valued branching processes; A levy-Hincin representation*, Preprint.

[15] Iscoe, I., *On the supports of measure-valued critical branching Brownian Motion*, Ann. Probab., 16:1(1988), 200–221.

[16] Dawson, D. A., Iscoe, I., Perkins, E. A., *Super-Brownian Motion: Path properties and hitting probability*, Probab. Theory and Rel. Fields, 83(1989), 135–205.

[17] Iscoe, I., *Ergodic theory and a local occupation time for measure-valued critical branching Brownian Motion*, Stochastics, 18(1986), 197–243.

[18] Dynkin, E. B., *Representation for functionals of superprocesses by multiple stochastic integral, with applications to self-intersection local times*, Astérisque, 157–158,(1988), 147–171.

[19] Le Gall J. F., *Exact Hausdorff measure of Brownian multiple points*, In Cinlar, E., Chung, K. L., Getoor, R. K., eds. Seminar on stochastic processes, 1987.

[20] Dynkin, E. B., *A probabilistic approach to one class of nonlinear differential equations*, (1989), Preprint.

[21] Brezio, H., Veron, L., *Removable singularities of some nonlinear equations*, Arch. Rational Mech.

Anal., 75(1980), 1–6.

[22] Dynkin, E. B., *Superdiffusions and parabolic nonlinear differential equations*, (1990), Preprint.

[23] Iscoe, I., *A weighted occupation time for a class of measure-valued branching processes*, Probab. Theory and Rel. Fields, 71:1(1986), 85–116.

[24] Roelly-Coppoletta, S., *A criterion of convergence of measure-valued processes: Application to measure branching processes*, Stochastics, 17(1986), 43–65.

[25] Dawson,D., Hochberg, K., *The carrying dimension of a stochastic measure diffusion*, Ann. Probab., 7(1979), 693–703.

[26] Dawson, D., *The critical measure diffusion process*, Z. Wahrsch., 40(1977), 125–145.

[27] Dynkin, E. B., *Superprocesses and their linear additive functionals*, Trans. Amer. Math. Soc., 314(1989), 255–282.

[28] Dynkin, E. B., *Additive functionals of superdiffusion processes*, (1990), Preprint.

[29] Gorostiza, L. G., *Limit theorems for supercritical branching random fields with immigration*, Adv. in Applied Mathematics, 9(1988), 56–86.

[30] Gorostiza, L. G., Lopez-Mimbela, J. A., *The multitype measure branching process*, Adv. Appl. Prob., 22(1990), 49–67.

[31] Sugitani, S., *Some properties for the measure-valued branching diffusion processes*, J. Math. Soc. Japan, 41:3(1989),437–461.

[32] Dynkin, E. B., *Three classes of infinite dimensional diffusions*, 1988, Preprint.

[33] Li Zenghu (李增沪), Li Zhanbing (李占柄), Wang Zikum(王梓坤), *Asymptotic Behavior of the Measure-valued Branching Process with Immigration*, Science in China (ser. A), 36:6 (1993), 769–777.

下卷各节内容的历史的注

第十一、十二章

关于马尔科夫过程论与位势关系的研究，先行者为 S. Kakutani, 见第十二章末的文献 [13], 他发现平面上 Dirichlet 问题的解可由二维布朗运动的概率特征来表达，详见 §11.5. 稍后有 Doob, J. L. 的工作 [7]. 一般理论的建立则应归功于 G. A. Hunt [11]. 1965 年， E. B. Dynkin 把微分方程的概率解法严谨地写入书 [8](俄文版). 1968 年，出现了专著 [1]. 此后许多概率书中都有关于位势的章节，而集大成者，当推 Doob, J. L. 的专著《 Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart 》， 1984, (有中译本). 此项研究现仍继续中. §11.12 中定理 3～ 定理 7 源出王梓坤 [21].

第十三章

§13.1 定理 4 由 Lévy 提出，这里的证明取材于 Chung [1]; 本节其他的定理都属于 Doob [2].

§13.2 转移概率 $(p_{ij}(t))$ 在标准性条件 $p_{ij}(t)\to\delta_{ij}$ 下的可微性，最初由 Колмогоров 于 1951 年 [3] 中当作预言提出. 后来在附加条件 $q_i<\infty$ 或 $q_j<\infty$ 下， Austin [1] [2], Юшкевич [1], Chung 给出证明. 最后由 Ornstein [1] 于 1960 年彻底证实，这里所述的定理 2 的证明即取自该文，但原证相当简略. 定理 3,4,5,6 见 Doob [3],[1].

§13.3 定理 1, 2, 4 及引理 2 见 Doob [3],[1], 引理 2 是强马尔科夫性的前奏. 定理 5 是 Feller [2] 中一结果在可列状态空间情况下的特殊化.

第十四章

§14.1 引理 2 中第二结论由朱成熹 [1] 得到. 定理 2 中 (i) 的证见 Chung [1], (ii) 由 Lévy 给出.

§14.2 定理 1 由 Doob [2] 得到，定理 2 属于 Lévy, 定理 4 的叙述仿 Chung [1], 定理 5 由 Chung [1] 给出.

§14.3 本节结果及证明属于 Chung [1], II. 9, 那里对强马氏性研究的历史有简要叙述. 关于一般马氏过程的强马氏性见 Дынкин [1], [2].

第十五章

§15.1 本节结果属于王梓坤 [6], 那里对一般的马氏过程讨论了 0–1 律.

§15.2 除定理 [1] 见 Chung [1] 外，其它结果取材于王梓坤 [7].

§15.3 定理 1,2 来源于吴立德 [1],, 定理 3,4 来源于杨超群 [1].

§15.4 嵌入问题最初由 Elfving 于 1937 年提出. 定理 1,2,3 由吴立德 [2] 得到，定理 2,3 与系 2 也为王梓坤于 1956 年获得， D. G. Kendall 亦曾证明系 2. 本节中连续扩充不唯一的例 1 由孟庆生、郭冠英造出，例 2 见 Speakman [1]. 其他结果见 Johansen [1].

第十六章

§16.1 定理 1 见 Добрушин [1], 定理 2, 3 见王梓坤 [2], [5].

§16.2 本节大部结果来源于王梓坤 [4], 其它是新证明的，但引理 3 取自 Reuter [1].

§16.3 引理 1 见 Ledermann and Reuter [1]. 定理 2 改进了 Гнеденко [1] 中一结果. 其余定理是新结果.

§16.4 定理 2 来源于 Гихман-Скороход [1], 其余是新结果.

§16.5 定理 1, 2 的证明取材于 Saaty [1].

§16.6 关于生灭过程的应用可参看 Feller [1], Bharucha-Reid [1].

第十七章

§17.1–§17.7 全部结果来源于王梓坤 [2], [3], [5], 杨向群做了显著的改进，参看王梓坤、杨向群 [1]. 关于生灭过程的构造问题，几乎同时于 1958 年左右由好几位作者所研究. Feller 用分析方法研究了比较一般的马氏链的构造，并深入地讨论了生灭过程，见他的文章 [3]. Karlin 及 McGregor 发表了一系列关于生灭过程的论文，其中的 [1] 用积分形式表达了转移概率，并研究了过程的性质. Юшкевич [2] 用半群的方法构造 Q 过程. 本章所叙述的概率方法，由作者所发展，并由杨超群、侯振挺、郭青峰等继续深入，他们并吸取了其它方法的优点，见杨超群 [2],[3].

§17.8 本节源出王梓坤 [9]. 关于生灭过程性质更多的研究，可参看杨超群 [4].

附　录　1

§1 马尔科夫链的势与过份函数，最初由 Doob [4] 及 Hunt [1] 所研究，这里的叙述主要参考 Doob [4].

§2 本节中关于马亭边界的叙述见 Hunt [1] 及 Watanabe [1]; 过份函数的极限定理则属于王梓坤 [8].

附　录　2

λ– 系与 $\mathcal{L}$– 系方法的明确叙述首见于 Е. Б. Дынкин [2].

参　考　文　献

王梓坤： [1] 生灭过程停留时间与首达时间的分布，中国科学， 2(1980), 109–117.

[2] Классификация всех процессов размножения и гибели, Научные доклады высшей школы, Физ.-Матем. Науки, 4(1958), 19–25.

[3] *On a birth and death process*, Science Record (科学记录), New Ser., III No. 8(1959), 331–334.

[4] *On distributions of functionals of birth and death processes and their applications in the theory of queues*, Scientia Sinica (中国科学), X: 2(1961), 160–170.

[5] 生灭过程构造论，数学进展， 5:2(1962), 137–179.

[6] 马尔科夫过程的零一律，数学学报， 15:3(1965), 342–353.

[7] 常返马尔科夫过程的若干性质，数学学报， 16:2(1966), 166–178.

[8] *The Martin boundary and limit theorems for excessive functions*, Scientia Sinica (中国科学), XIV: 8(1965), 1118–1129.

[9] 生灭过程的遍历性与零一律，南开大学学报，自然科学， 5:5(1964), 93–102.
王梓坤、杨向群： [1] 中断生灭过程的构造，数学学报， 21:1(1978), 66–71.
刘文： [1] 可列齐次马氏链转移概率的频率解释，河北工学院学报，第 1 期 (1976), 69–74.
[2] 关于可列齐次马氏链转移概率的强大数定律，数学学报， 21:3(1978), 231–242.
朱成熹： [1] 非齐次马尔科夫链样本函数的性质，南开大学学报，自然科学， 5:5(1964), 95–104.
[2] 非齐次转移函数的分析性质，数学进展， 8:1(1965), 34–54.
许宝騄： [1] 欧氏空间上纯间断的时齐马尔科夫过程的概率转移函数的可微性，北京大学学报， 3 (1958), 257–270.
孙振祖： [1] 一类马氏过程的一般表示式，郑州大学学报， 2(1962), 17–23.
吴立德： [1] 齐次可数马尔科夫过程积分型泛函的分布，数学学报， 13:1(1963), 86–93.
[2] 关于连续参数的马尔科夫链的离散骨架，复旦大学学报， 9:4(1964), 483–489.
[3] 可数马尔可夫过程状态的分类，数学学报， 15:1(1965), 32–41.
李志阐： [1] 半群与马尔科夫过程齐次转移函数的微分性质，数学进展 8(1965), 153–160.
李漳南： [1] 一类相依变数的强大数定律. 南开大学学报，自然科学， 5:5(1964), 41–50.
李漳南、吴荣： [1] 可列状态马尔科夫链可加泛函的某些极限定理，同上杂志 (1964), 121–140.
杨超群： [1] 可列马氏过程的积分型泛函和双边生灭过程的边界性质，数学进展， 7:4(1964), 397–424.
[2] 一类生灭过程，数学学报， 15:1(1965), 9–31.
[3] 关于生灭过程构造论的注记，数学学报， 15:2(1965), 174–187.
[4] 生灭过程的性质，数学进展， 9:4(1966), 365–380.
[5] 柯氏向后微分方程组的边界条件，数学学报， 16:4(1966), 429–452.
[6] 双边生灭过程，南开大学学报 (自然科学), 5:5(1964), 9–40.
[7] 可列马尔可夫过程的不变换，湘潭大学学报 (1978), 29–43.
施仁杰： [1] 可列马尔可夫过程的随机时间替换，南开大学学报 (自然科学), 5:5(1964), 51–88.
[2] 马尔科夫过程对于随机时间替换的不变性质，南开大学学报， (自然科学), 5:5(1964), 199–204.
郑曾同： [1] 测度的弱收敛与强马氏过程，数学学报， 11:2(1961), 126–132.
梁之舜： [1] Об условных Марковских процессах, Теория Вероятностей и её применения, 5:2(1960), 227–228.
[2] Инвариантность строго Марковского свойства при преобразования Дынкина, 同上杂志， 6:2(1961), 228–231.
[3] Интегральное представление одного класса эксцессивных случайных величин, Вестник Московского Университета, Серии 1(1961), 36–37.
胡迪鹤： [1] 抽象空间中的 $q-$ 过程的构造理论，数学学报， 16(1966),150–165.
[2] 度量空间中的转移函数的强连续性、 Feller 性和强马尔可夫性，数学学报， 20(1977), 298–300.
[3] 可数的马尔可夫过程的构造理论，北京大学学报 (自然科学), 2(1965), 111–143.
[4] 关于某些随机阵的调和函数，数学学报， 22:3(1979), 276–290.
侯振挺： [1] Q 过程的唯一性准则，中国科学 (1974), 第二期， 115–130.
[2] 齐次可列马尔可夫过程中的概率 - 分析法 (1), 科学通报， 18:3(1973), 115–118
[3] 齐次可列马尔可夫过程的样本函数的构造，中国科学， 3(1975), 259–266.
侯振挺、郭青峰： [1] 齐次可列马尔可夫过程，科学出版社， 1978.
[2] 齐次可列马尔可夫过程构造论中的定性理论，数学学报， 19:4(1976), 239–262.
侯振挺、汪培庄： [1] 可逆的时齐马尔可夫链 — 时间离散情形，北京师范大学学报 (自然科学), 1(1979), 23-44.
钱敏平： [1] 平稳马氏链的可逆性，北京大学学报， 4(1978), 1–9.
墨文川： [1] 齐次可列马尔可夫过程的可加泛函，山东大学学报， 2(1978), 1–10.
Austin, D. G.: [1] *Some differentiation properties of Markoff transition probability functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 7(1956), 756–761.
[2] *Note on differentiating Markoff transition functions with stable terminal states*, Duke Math. J., 25(1958), 625–629.
Bharucha-Reid A. T.: [1] Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications, 1960.
Chung, K. L.: [1] Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, 1960.

[2] *On the Boundary Theory for Markov Chains*, Acta Mathematica, 110:1-2 (1963), 19–77; 115:1 -2(1966), 111–163.

Гихман, И. И., Скороход, А. Н.: [1] Введение в теорию случайных процессов, 1965.

[2] Теория случайных процессов, I, 1971; II, 1973; III, 1975.

Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев:

[1] Математические методы в теория надежности, 1965.

Добрушин, Р. Л.: [1] Об условиях регулярности однородных по времени Марковских процессов со счетным чеслом возможных состояхий, Успех Матем. Наук, 7:6(1952), 185–191.

[2] Некоторие классы однородных счетных Марковских процессов, *Теория Вероят. и её прим.*, II:3(1957), 377–380.

Doob, J. L.: [1] Stochastic Processes, 1953.

[2] *Topics in the theory of Markoff chains*, Trans. Amer. Math. Soc., 52(1942), 37–64.

[3] *Markoff chains–denumerable case.* Trans. Amer. Math. Soc., 58(1945), 455–473.

[4] *Discrete potential theory and boundaries*, Journ. Math. Mech., 8(1959), 433–458.

[5] *State spaces for Markov chains*, Trans. Amer. Math. Soc., 149(1970), 279–305.

Дынкин, Е. Б.: [1] Марковские Процессы, 1963.

[2] Основания Теории Марковских Процессов, 1959. (汉译本：马尔科夫过程论基础，王梓坤译).

Dynkin, E. B. and Yushkevich, A. A.: [1] Markov Processes: Theorems and Problems, 1969.

Feller, W.: [1] An Introduction to Probability Theory and Its Applications, 1(1957); 2(1971).

[2] *On the integro-differential equations of purely discontinuous Markoff processes*, Trans. Amer. Math. Soc., 48(1940), 488–575; Errata, 58(1945), 474.

[3] *The birth and death processes as diffusion process*, Journ. Math. Pures. Appl., 9(1959), 301–345.

Hunt, G. A.: [1] *Markoff chains and Martin boundaries*, Illinois J. Math., 4(1960), 313–340.

Johansen, S.: [1] *Some results on the imbedding problem for finite Markov chains*, J. London Math. Soc., (2), 8(1974), 345–351.

Karlin, S. and McGregor, J. L.: [1] *The classification of birth and death processes,* Trans. Amer. Math. Soc., 86(1957), 366–400.

[2] *Linear growth, birth and death processes*, J. Math. Mech., 1(1958), 643–662.

Keilson, J.: [1] *Log-concavity and log-convexity in passage time densities of birth and death processes*, J. Applied Probability, 8(1971), 391–398.

Kendall, D. G.: [1] *On the generalized and death process*, Ann. Math. Statist., 19(1948), 1–15.

[2] *Some recent developements in the theory of denumerable Markov processes*, Trans. Fourth Prague Conference (1965), 11–17.

[3] *On the behaviour of a standard Markov transition function near* $t = 0$, Zs. f. Wahrsch., 3(1965), 276–278.

Kingman, J. F. C.: [1] *Markov Transition Probabilities*, Zs. f. Wahrsch., (I) 7(1967), 248–270; (II) 9(1967), 1–9, (III) 10(1968), 87–101; (IV) 11(1969), 9–17.

Lamb, C.: [1] *Decomposition and construction of Markov chains,* Zs. f. Wahrsch., 19(1971), 213–224.

Ledermann, W. and Reuter, G. E. H.: [1] *Spectral theory for the differential equations of simple birth and death processes*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, ser.A, 246(1954), 321–369.

Lévy, P.: [1] *Systémes Markoviens et stationnaires. Cas dénombrable*, Ann. Sci. école norm. Super. 69(1951), 327–381.

Ornstein, D.: [1] *The differentiability of transition functions*, Bull. Amer. Math. Soc., 66(1960), 36–39.

Reuter, G. E. H.: [1] *Denumerable Markov processes and the associated contraction semi-groups on 1*, Acta Math., 97(1957), 1–46.

[2] *Denumerable Markov processes (IV), on C. T. Hou's uniqueness theorem for Q-semigroups*, Zs. f. Wahrsch., 33(1976), 309–315.

Сарымсаков, Т. А.: Основы Теории Процессов Маркова, 1954.

Saaty, T. L.: [1] Elements of Queueing Theory with Applications, 1961.

Smith, G.: [1] *Instantaneous states of Markov processes*, Trans. Amer. Math. Soc., 110(1964), 185–195.

Soloviev, A. D.: [1] *Asymptotic distribution of the moment of first crossing of a high level by a birth and*

death process, Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. and Probability (1972), 71–86.
Speakman, J. M. O.: [1] *Two Markov chains with a common skeleton*, Zs. f. Wahrsch., 7(1967), 224.
Юшкевич, А. А.: [1] Некоторые замечания о граничных услобиях для процессов размножения и гибели, Trans. Fourth Prague Conference (1965), 381–388.
[2] О дифференцируемости переходных вероятностей однородного Марковского процесса со счетным чеслом состояний, Уч. Зап. Мгу., 186, Математика 9(1959), 141–160.
Walsh, J.: [1] *The Martin Boundary and Completion of Markov chains*, Zs. f. Wahrsch., 14(1970), 169–188.
Watanabe, T.: [1] *On the theory of Martin boundaries induced by countable Markov processes*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Series A, Math. 33(1960), 39–108.
William, D.: [1] *On the construction problem for Markov chains*, Zs. f. Wahrsch., 3(1964), 227–246; 5(1966), 296–299.
[2] *Fictitionus states couplel laws and local time*, Zs. f. Wahrsch., 11(1969), 288–310.

新参考书目

[1] 王寿仁，概率论基础和随机过程，科学出版社， 1986.
[2] 邓集贤、许刘俊，随机过程，高等教育出版社， 1992.
[3] 卢同善，随机泛函分析及其应用，青岛海洋大学出版社， 1990.
[4] 帅元祖，整体随机过程，四川科学技术出版社， 1989.
[5] 朱成熹，随机极限引论，南开大学出版社， 1989.
[6] 朱成熹，测度论基础，科学出版社， 1986.
[7] 刘文，测度论基础，辽宁教育出版社， 1985.
[8] 李漳南、吴荣，随机过程教程，高等教育出版社， 1987.
[9] Rangquan Wu (吴让泉), Stochastic Differential Equations, Pitman Advanced Publishing Program, Boston, London, Melbourne, 1985.
[10] 严加安，鞅与随机积分引论，上海科学技术出版社， 1981.
[11] 严士健，无穷粒子马尔可失过程引论，北京师范大学出版社， 1989.
[12] 严士健、王隽骧、刘秀芳，概率论基础，科学出版社， 1982.
[13] 何声武，随机过程导论，华东师范大学出版社， 1989.
[14] 吴智泉、王向忱，巴氏空间上的概率论，吉林大学出版社， 1990.
[15] Xiang-Qun Yang (杨向群), The Construction Theory of Denumerable Markov Processes, Hunan Science and Technology Publishing House, John Wiley and Sons, Chichester, New York, 1990.
[16] 杨向群，可列马尔科夫过程构造论，湖南科学技术出版社， 1986 (第二版).
[17] 陈木法，跳过程与粒子系统，北京师范大学出版社， 1986.
[18] Mu Fa Chen (陈木法), From Markov Chains to Non-equilibrium Particle Systems, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1992.
[19] 张文修，集值测度与随机集，西安交通大学出版社， 1989.
[20] 胡迪鹤，随机过程概论，武汉大学出版社， 1986.
[21] Hou Zhenting, Guo Qingfeng (侯振挺、郭青峰),Homogeneous Denumerable Markov Processes, Springer-Verlag, Science Press, 1988.
[22] 林正炎、陆传荣，强极限定理，科学出版社， 1992.
[23] Kai Lei Zhong (钟开莱), Lectures from Markov Processes to Brownian Motion, Springer-Verlag, New York, 1980.
[24] 施仁杰、卢科学，时间序列分析引论，西安电子科技大学出版社， 1988.
[25] 胡宣达，随机微分方程稳定性理论，南京大学出版社， 1986.
[26] 钱敏平，随机过程引论，北京大学出版社， 1990.
[27] 黄志远，随机分析学基础，武汉大学出版社， 1988.
[28] Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus (布朗运动和随机计算), Springer-Verlag, New York, 1988.

[29] 龚光鲁，随机微分方程引论，北京大学出版社， 1987.
[30] 熊大国，随机过程理论与应用，国防工业出版社， 1991.
[31] 戴永隆，随机点过程，中山大学出版社， 1984.
[32] Yuan Shih Chow, Henry Teicher, Probability Theory, Independence, Interchangeability, Martingales, second edition, Springer-Verlag, World Publishing Corporation, 1989.
[33] E. B. 邓肯， A. A. 尤什凯维奇，马尔可夫过程 (定理与问题), 张饴慈，刘吉江译，科学出版社， 1988.
[34] И. И. 基赫曼， A. B. 斯科罗霍德，随机过程论，科学出版社，第一卷，邓永录、邓集贤、石北源译， 1986. 第二卷，周概容，刘嘉琨译， 1986, 第三卷，石北源、区景祺译， 1992.
[35] 伊·帕尔逊，随机过程，邓永录、杨振明译，高等教育出版社， 1987.
[36] 王梓坤，概率论基础及其应用，科学出版社， 1986.
[37] 袁震东，近代概率引论，科学出版社， 1991.
[38] Wang Zikun (王梓坤), Yang Xiangqun (杨向群), Birth and Death Process and Markov Chains, Springer-Verlag, Science Press, 1992.
[39] 施仁杰，马尔可夫链基础及其应用，西安电子科技大学出版社， 1992.
[40] 胡迪鹤，分析概率论，科学出版社， 1984.
[41] 邓永录，梁之舜，随机点过程及其应用，科学出版社， 1992.
[42] 戴永隆，随机点过程，中山大学出版社， 1984.
[43] 侯振挺等，马尔可夫过程的 Q- 矩阵问题，湖南科学技术出版社， 1994.
[44] 戴永隆，马尔可夫振荡问题，广东科学技术出版社， 1993.
[45] K. L. Chung, Lectures from Markov Processes to Brownian Motion, Springer, 1982.
[46] J. L. Doob, Classical Potential Theory and its Probabilistic Counterpart, Springer, 1984.
[47] S. N. Ethier and T. G. Kurtz, Markov Processes–Characterization and Convergence, John Wiley and Sons, New York, 1986.
[48] M. Sharpe, General Theory of Markov Processes, Academic Press Inc., 1988.
[49] D. Revuz, M. Yor, Continuous Martingales and Brownian Motion, Springer-Verlag, 1991.
[50] Yu. A. Rozanov, Markov Random Fields, Springer-Verlag, 1982.
[51] I. Karatzas, S. E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer-Verlag, 1988.
[52] D. Williams, Diffusions, Markov Processes and Martingales, J. Wiley and Sons, vol.1,(1979), vol.2.

下卷名词索引

[1]这表示此名词首次出现于 §2.

[General Information]
书名=随机过程通论　（下册）
作者=王梓坤著
页数=618
SS号=80407280
DX号=
出版日期=1996年05月第1版
出版社=北京师范大学出版社